

5. INFLEXNÉ BODY PROJEKTÍVNEJ KRIVKY, HESSIÁN

Nech $F \in k[x_0, x_1, x_2]$ je forma popisujúca krivku v $\mathbb{P}^2$. Nech P je regulárny bod krivky F a nech L je dotyčnica ku krivke F v bode P , teda platí, že $I_P(F, L) \geq 2$. Ak $I_P(F, L) \geq 3$, potom P nazývame **inflexným bodom** krivky F .

Keďže, ako sme ukázali, je $I_P(F, L)$ projektívny invariant, “inflexnosť” bodu sa zachováva pri projektívnych transformáciách, inými slovami inflexný bod krivky sa projektívnou transformáciou zobrazí zas na inflexný bod.

Príklad 5.1. Skúsme nájsť inflexné body krivky zúplnenia krivky $y^2 = x^3$ v projektívnej rovine. V $\mathbb{P}^2$ je rovnica tejto krivky $F = z_0 z_2^2 - z_1^3$. Jej derivácie sú (F_i znamená $\frac{\partial F}{\partial z_i}$):

$$F_0 = z_2^2, \quad F_1 = -3z_1^2, \quad F_2 = 2z_0 z_2.$$

Odtiaľ zistíme, že krivka F má jediný singulárny bod, a síce $(z_0 : z_1 : z_2) = (1 : 0 : 0)$.

Nech A je regulárny bod krivky F . Dotyčnica F v bode A je potom daná lineárnou formou

$$L : a_2^2 z_0 - 3a_1^2 z_1 + 2a_0 a_2 z_2.$$

Potrebuje túto priamku parametrizovať, aby sme mohli skonštruovať priesekovú formu priamky L a krivky F . K tomu potrebujeme poznať dva body na priamke L . Jedným je bod $A = (a_0 : a_1 : a_2)$. Druhý bod na L nájdeme v tvare $B = (b_0 : b_1 : 0)$. Keďže B leží na L , dostávame tak, že $B = (3a_1^2 : a_2^2 : 0)$.

Teraz môžeme L parametrizovať: $X = sA + tB$. Rozpísané do súradníc:

$$\begin{aligned} z_0 &= a_0 s + 3a_1^2 t, \\ z_1 &= a_1 s + a_2^2 t, \\ z_2 &= a_2 s. \end{aligned}$$

Prieseková forma je potom

$$\Phi(s, t) = F(sA + tB) = \dots = -3a_1 a_2^4 s t^2 - 3a_2^6 t^3.$$

Vidíme, že $(s : t) = (1 : 0)$ je v každom prípade aspoň dvojnásobným koreňom formy Φ , čo zodpovedá faktu, že priamka L je dotyčnicou krivky F v bode A . Bod A je inflexný, ak $(1 : 0)$ je trojnásobným koreňom, teda ak $-3a_1 a_2^4 = 0$. Tejto podmienke zodpovedá jediný regulárny bod na krivke F , a síce $(0 : 0 : 1)$.

Dotyčnica krivky v regulárnom bode je popísaná prvými deriváciami definujúceho polynómu. Druhé derivácie zas charakterizujú inflexné body.

Matica

$$(F_{ij}) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial z_j} \right)_{i,j=0,1,2}$$

sa nazýva **Hesseho matica** polynómu F . Jej determinant sa nazýva **Hessián** polynómu (alebo krivky) F a označuje sa H_F . Krivka v $\mathbb{P}^2$ určená Hessiánom polynómu (krivky) F je **Hesseho krivka** polynómu (krivky) F . Niekedy sa tiež krivka určená determinantom Hesseho matice nazýva Hessián.

Lema 5.2. *Nech je na $\mathbb{P}^2$ definovaná (bijektívna) projektívna transformácia. Nech krivka F sa touto transformáciou zobrazí na krivku G a konkrétne bod $P \in V(F)$ na bod $Q \in V(G)$. Potom $H_F(P) = 0$ práve vtedy, keď $H_G(Q) = 0$.*

Dôkaz. Nech A je matica inverznej transformácie, čiže $\mathbf{p} = A\mathbf{q}$, kde $\mathbf{p}$ resp. $\mathbf{q}$ je stĺpcový vektor so súradnicami bodu P resp. Q . Čiže transformácia $\mathbf{z} \mapsto A\mathbf{z}$ ($\mathbf{z}$ je stĺpcová matica $(z_0 \ z_1 \ z_2)^T$) zobrazí body krivky G na body krivky F , teda pre polynómy F a G platí

$$G(\mathbf{z}) = F(A\mathbf{z}).$$

Derivovaním tejto rovnosti zistíme, že pre Hesseho matice platí

$$(G_{ij})(Q) = (A^T(F_{ij})(P)A).$$

Pre Hessiány potom platí:

$$\begin{aligned} H_G(Q) &= \det((G_{ij})(Q)) = \det(A^T(F_{ij})(P)A) = \det A^T \det(F_{ij}(P)) \det A \\ &= (\det A)^2 H_F(P). \end{aligned}$$

Matica A je regulárna, keďže ide o projektívnu transformáciu, a tak dostávame tvrdenie lemy. $\square$

Veta 5.3. *Nech P je regulárny bod krivky F . Bod P je inflexný práve vtedy, keď*

$$H_F(P) = 0.$$

Dôkaz. Ak P je priamka, potom každý jej bod je inflexný a ľahko sa presvedčíme, že v tomto špeciálnom prípade je tvrdenie vety pravdivé.

Nech teda stupeň krivky je aspoň 2. Keďže inflexnosť sa zachováva pri projektívnych transformáciách, môžeme prepokladať, že inflexný bod má projektívne súradnice $(1 : 0 : 0)$ (afinné $(0, 0)$) a navyše tiež, že x -os je dotyčnicou krivky v tomto bode, teda dotyčnica má rovnicu $y = 0$ v afinných súradniciach alebo $z_2 = 0$ v projektívnych. Rovnica krivky v afinných súradniciach je teda

$$f(x, y) = ay + (bx^2 + 2cxy + dy^2) + \dots$$

(pokračuje členmi stupňa aspoň 3), kde $a \neq 0$. V projektívnych súradniciach bude potom jej rovnica (d je stupeň krivky)

$$F(z_0, z_1, z_2) = az_2z_0^{d-1} + (bz_1^2 + 2cz_1z_2 + dz_2^2)z_0^{d-2} + \dots$$

Bod dotyku $P = (1 : 0 : 0)$ leží na dotyčnici, ďalší bod na nej je napríklad $Q = (0 : 1 : 0)$, a teda dotyčnica má parametrizáciu $sP + tQ$, v súradniciach $z_0 = s, z_1 = t, z_2 = 0$. Prieseková forma $\Phi(s, t)$ má potom tvar

$$\Phi(s, t) = F(s, t, 0) = bt^2s^{d-2} + \dots$$

Bod P je inflexným práve vtedy, keď $(1 : 0)$ je 3-násobným koreňom Φ , čo nastáva práve vtedy, keď $b = 0$. Ostáva ešte ukázať, že táto podmienka je ekvivalentná s tvrdením, že $H_F(P) = 0$. O tom sa ľahko presvedčíme, keď nájdeme Hessián krivky F v bode P :

$$H_F(P) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a(d-1) \\ 0 & 2b & 2c \\ a(d-1) & 2c & 2d \end{vmatrix} = -2a^2b(d-1)^2.$$

$\square$

Príklad 5.4. Znovu uvažujme kubickú krivku $F = z_0z_2^2 - z_1^3$. Jej Hessián (a Hesseho krivka) je

$$H_F = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2z_2 \\ 0 & -6z_1 & 0 \\ 2z_2 & 0 & 2z_0 \end{vmatrix} = 24z_1z_2^2.$$

Odtiaľ už ľahko dostaneme, že jediným regulárnym bodom krivky F , ktorý leží zároveň aj na Hesseho krivke, je bod $(0 : 0 : 1)$

Dôsledok 5.5. *Nech F je regulárna krivka v $\mathbb{P}^2$ stupňa aspoň 3. Potom F má inflexný bod.*

Dôsledok 5.6. *Nech F je ireducibilná kubická krivka v $\mathbb{P}^2$. Potom F má najviac 9 inflexných bodov.*

Dôkaz. Ak F má stupeň d , potom jej Hessián má stupeň $3(d - 2)$. Z Bézoutovej vety potom už dostávame oba dôsledky. $\square$

5.1. Inflexné body Steinerovej kubiky. Nech $F = z_0^3 + z_1^3 + z_2^3 + 3\lambda z_0 z_1 z_2$ ($\lambda^3 \neq -1$) je regulárna Steinerova kubika. Nájdeme všetky jej inflexné body.

Hessián F je

$$H_F = 27 \cdot 2(-\lambda^2(z_0^3 + z_1^3 + z_2^3) + (4 + \lambda^3)z_0 z_1 z_2).$$

Pre nájdenie inflexných bodov potrebujeme vyriešiť sústavu rovníc

$$\begin{aligned} (z_0^3 + z_1^3 + z_2^3) + 3\lambda z_0 z_1 z_2 &= 0 \\ -\lambda^2(z_0^3 + z_1^3 + z_2^3) + (4 + \lambda^3)z_0 z_1 z_2 &= 0. \end{aligned}$$

Keďže $\lambda^3 \neq -1$, je táto sústava ekvivalentná sústave

$$\begin{aligned} z_0^3 + z_1^3 + z_2^2 &= 0 \\ z_0 z_1 z_2 &= 0, \end{aligned}$$

ktorej riešenia už ľahko nájdeme:

$$\begin{aligned} P_{00} &= (0 : -1 : 1) & P_{01} &= (0 : \epsilon : 1) & P_{02} &= (0 : \epsilon^2 : 1) \\ P_{10} &= (1 : 0 : -1) & P_{11} &= (1 : 0 : \epsilon) & P_{12} &= (1 : 0 : \epsilon^2) \\ P_{20} &= (-1 : 1 : 0) & P_{21} &= (\epsilon : 1 : 0) & P_{22} &= (\epsilon^2 : 1 : 0) \end{aligned}$$

kde ϵ je primitívna tretia odmocnina z -1 , t.j. je to komplexné číslo, ktoré je riešením rovnice $x^2 - x + 1 = 0$. Steinerova kubika má tak presne deväť inflexných bodov. Všimnime si, že tieto body vôbec nezávisia od parametra λ . Ide o veľmi zaujímavú konfiguráciu bodov. Po trojiciach ležia na priamkach a pre ľubovoľné dva inflexné body existuje na ich spojnici aj tretí. Inflexné body Steinerovej kubiky tvoria vlastne afinnú rovinu nad trojprvkovým poľom $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.