

3.5. Výpočty v projektívnej rovine. Vo všeobecnosti sa výpočty na projektívnych krivkách, (či na projektívnych algebraických množinách) robia tak, že sa najprv zúžime na afinnú časť krivky obsahujúcu body, o ktoré sa zaujímame (pracujeme s krivkou “lokálne”). No niektoré výpočty sa dajú robiť priamo v projektívnej rovine, špeciálne rovinne krivky sú spravidla výbornými objektami pre takéto “globálne” výpočty.

Nech $F \in k[z_0, z_1, z_2]$ je forma, t.j. ide o krivku v projektívnej rovine. Potom dehomogenizácia $f(x, y) = F(1, x, y)$ popisuje krivku lokálne, presnejšie popisuje jej body, ktoré sa nachádzajú v afinnej mape

$$U_0 = \{(a_0 : a_1 : a_2) \mid a_0 \neq 0\},$$

t.j. $f(a_1, a_2) = 0$ práve vtedy, keď $F(1, a_1, a_2) = 0$.

Skúmame teraz derivácie polynómov f a F . Nech najprv F je monóm: $F = z_0^{d_0} z_1^{d_1} z_2^{d_2}$ a teda $f = x^{d_1} y^{d_2}$. Lahko sa presvedčíme, že derivácia dehomogenizácie F sa rovná dehomogenizácii derivácie (inak povedané, dehomogenizácia a derivácia komutujú):

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial z_1} \big|_{(1,x,y)} = d_1 z_0^{d_0} z_1^{d_1-1} z_2^{d_2} \big|_{(1,x,y)} = d_1 x_1^{d_1-1} y_2^{d_2} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x.$$

(Deriváciu F podľa z_i zapisujeme skráteno F_i .) Keďže derivácia lineárnej kombinácie monómov je súčet lineárnej kombinácie derivácií, dokázaný vzťah platí pre ľubovoľnú formu a jej dehomogenizáciu, nielen pre monóm.

Tvrdenie 3.13. (*Eulerov vzorec*) Pre formu $F \in k[z_0, z_1, z_2]$ stupňa d platí

$$z_0 F_0 + z_1 F_1 + z_2 F_2 = dF.$$

Dôkaz. dú

□

Dôsledok 3.14. Bod P je singulárnym bodom projektívnej krivky $F \in k[z_0, z_1, z_2]$ práve vtedy, keď

$$F_0(P) = F_1(P) = F_2(P) = 0.$$

Tvrdenie 3.15. Ak P je regulárny bod projektívnej krivky $F \in k[z_0, z_1, z_2]$, potom jej dotyčnica v bode P je

$$F_0(P)z_0 + F_1(P)z_1 + F_2(P)z_2 = 0.$$

Dôkaz. Nech $P = (p_0 : p_1 : p_2)$ a nech napr. $p_0 \neq 0$, budeme teda predpokladať, že $p_0 = 1$, a tak afinné súradnice P sú (p_1, p_2) . Nech f je dehomogenizácia F vzhľadom na z_0 , t.j. $f(x, y) = F(1, x, y)$. Potom dotyčnica f v P má rovnicu

$$f_x(P)(x - p_1) + f_y(P)(y - p_2) = 0.$$

Homogenizáciou tejto rovnice získame rovnicu dotyčnice v $\mathbb{P}^2$:

$$f_x(P)(z_1 - p_1 z_0) + f_y(P)(z_2 - p_2 z_0) = 0$$

a túto upravíme na tvar v tvrdení pomocou Eulerovho vzorca a rovností $F_1(P) = f_x(P)$, $F_2(P) = f_y(P)$ pre bod P s homogénnymi súradnicami $(1 : p_1 : p_2)$. □

Podobne ako sme si v afinnej rovine definovali priesekový polynóm popisujúci priesečníky krivky s parametrizovanou priamkou, si môžeme definovať priesekovú formu projektívnej krivky a parametrizovanej projektívnej priamky:

Nech $F \in k[z_0, z_1, z_2]$ je projektívna krivka a nech $A = (a_0 : a_1 : a_2), B = (b_0 : b_1 : b_2)$ sú rôzne body v $\mathbb{P}^2$. Priamku L cez A, B môžeme parametricky zapísať ako množinu bodov

$$X = sA + tB, \quad \text{kde} \quad (s : t) \neq (0 : 0).$$

Na parametrizáciu sa teda (podobne ako v afinnom prípade) môžeme pozeráť ako na zobrazenie $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^2, (s : t) \mapsto sA + tB$. Priesekovú formu potom už ľahko dostaneme dosadením parametrizácie L do rovnice krivky:

$$\Phi(s, t) = F(z_0(s, t), z_1(s, t), z_2(s, t)).$$

Naozaj $\Phi(s, t)$ je binárna forma stupňa rovnakého ako bol stupeň krivky F - tu máme prvý rozdiel oproti afinnému prípadu, kde priesekový polynóm mohol mať nižší stupeň, než bol stupeň krivky.

Porovnajme si práve definovanú priesekovú formu s priesekovým polynómom, ktorý sme počítali v afinnom prípade.

Nech F je krivka a L priamka v projektívnej rovine, a nech L nie je komponentou F . Uvažujme bod $P \in V(F) \cap V(L)$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $P = (1 : p_1 : p_2)$. Priamka L bude parametrizovaná pomocou svojich bodov $A = (1 : a_1 : a_2)$ a $B = (0 : b_1 : b_2)$ (určite také dva body na priamke ležia). V $\mathbb{P}^2$ je teda jej parametrizácia $(s : a_1s + b_1t : a_2s + b_2t)$ a tak prieseková forma je

$$\Phi = F(s, a_1s + b_1t, a_2s + b_2t).$$

Parametrizácia priamky v $\mathbb{A}^2$ je $(a_1 + b_1t, a_2 + b_2t)$ a zodpovedajúci priesekový polynóm je potom

$$\Psi = f(a_1 + b_1t, a_2 + b_2t).$$

Zrejme $(0 : 1)$ je koreňom Φ , ak bod $B = (0 : b_1 : b_2)$ leží na krivke F . Tento bod neleží v affinej časti f krivky F . Ostatné korene Φ môžeme hľadať v tvare $(1 : t)$. Vidíme, že

$$(10) \quad \Phi(1, t_0) = \Psi(t_0),$$

čiže v affinej mape U_0 pomocou Φ a Ψ dosávame tie isté násobnosti priesekov priamky s krivkou. Preto môžeme priesekovú násobnosť priamky a krivky s tým istým výsledkom počítať aj priamo v projektívnej rovine pomocou priesekovej formy.

Podobne ako pre priesekový polynóm v afinnom prípade, aj pre priesekovú formu sa dá ukázať, že projektívnou transformáciou sa zachováva. Tiež sa dá ukázať, že priesekové číslo definované pomocou priesekovej formy nezávisí od parametrizácie priamky. Môžeme to ukázať buď priamo pre formy, dôkazy by prebiehali úplne rovnako ako v afinnom prípade. Alebo sa obe vlastnosti dokážu reštrikciou na afinnú mapu s poukázaním na (10).

Z konštrukcie priesekovej formy máme aj analógiu Lemy 2.5 (ide už o špeciálny prípad Bézoutovej vety):

Lema 3.16. *Nech F je krivka stupňa $d \geq 1$ a nech L je priamka v $\mathbb{P}^2$. Ak L nie je komponentou F , tak*

$$\sum_{P \in V(L)} I_P(F, L) \leq \deg(F).$$

V prípade, že je pole k , nad ktorým pracujeme, algebraicky uzavreté, potom

$$\sum_{P \in V(L)} I_P(F, L) = \deg(F).$$

Príklad 3.17. Uvažujme krivku v afinnej rovine, $f = 2y^2 - x^3 - x^2$ a priamku cez body $A = (1, 0)$ a $B = (1, 1)$.

Priesekový polynóm krivky a priamky je kvadratický a nájdeme tak dva jednoduché priesečníky priamky a krivky:

$$\Phi(t) = f(1, t) = 2t^2 - 2 = 2(t - 1)(t + 1),$$

priesečníkmi sú tak body $(1, 1)$ a $(1, -1)$.

Keď túto krivku uvažujeme v projektívnej rovine, popísaná je formou $F = 2z_0z_2^2 - z_1^3 - z_0z_1^2$. Priamka cez A a B má parametrizáciu

$$z_0 = s + t, \quad z_1 = s + t, \quad z_2 = t$$

a prieseková forma je potom

$$\Phi(s, t) = -2(s + t)s(s + 2t).$$

Takto okrem priesečníkov, ktoré sme našli v afinnej mape, nájdeme ešte tretí spoločný priesečník, bod $(0 : 0 : 1)$.

KAG FMFI UK BRATISLAVA

E-mail address: `jana.chalmovianska@fmph.uniba.sk`