

Keďže tento vzťah musí platiť pre všetky λ a tiež všetky body projektívneho priestoru, musí ísť o nulový polynóm, čiže $d = d'$ a $F_i \equiv 0$ pre $i \neq d$. $\square$

Dôsledok 3.8. *Nech $F \in k[z_0, \dots, z_n]$ je homogénny polynóm. Ak $F(a_0, \dots, a_n) = 0$, potom aj $F(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = 0$ pre ľubovoľné $\lambda \in k$.*

Formy nad k s premennými $z_0, z_1, \dots, z_n$ sú polynómy z okruhu $k[z_0, z_1, \dots, z_n]$. Dajú sa teda rozložiť na súčin ireducibilných polynómov. Z nasledujúcej lemy navyše dostaneme, že ireducibilné členy vo faktorizácii polynómu sú tiež formy.

Lema 3.9. *Nech $F \in k[z_0, \dots, z_n]$ je forma a nech $g \in k[z_0, \dots, z_n]$ je deliteľom g . Potom g je tiež forma.*

Dôkaz. Nech $F = gh$ a nech g nie je forma. Rozpíšme si g aj h ako súčet foriem:

$$\begin{aligned} g &= G_a + G_{a+1} + \dots + G_b \\ h &= H_c + H_{c+1} + \dots + H_d \quad G_a G_b H_c H_d \neq 0, \end{aligned}$$

kde G_i resp. H_j je forma stupňa i resp. j . Potom

$$gh = G_a H_c + \dots G_b H_d,$$

kde $G_a H_c \neq 0$ je forma stupňa $a + c$, podobne $G_b H_d$ je forma stupňa $b + d$. Ak by $a < b$ tak $a + c < b + d$, čo je spor. $\square$

Teda ak $F \in k[z_0, \dots, z_n]$ je forma a

$$F = cF_1^{r_1} \dots F_s^{r_s}$$

je jej jednoznačný rozklad, tak F_i sú tiež formy.

Afinnú krivku sme si definovali ako prvok v $(k[x, y] \setminus k) / \sim$, teda je to nekonštantný polynóm v $k[x, y]$ modulo násobenie nenulovými skalármi.

Podobne *projektívna rovinná krivka* alebo krivka v $\mathbb{P}^2(k)$ bude nekonštantná forma F z $k[x_0, x_1, x_2]$ modulo násobenie nenulovými skalármi. Bod $P = (p_0, p_1, p_2) \in \mathbb{P}^2$ leží na krivke F , ak $F(p_0, p_1, p_2) = 0$. Množinu všetkých bodov projektívnej krivky F označujeme podobne ako pri afinných krivkách $V(F)$.

Analogicky ako pri afinných krivkách, ak $F \in k[x_0, x_1, x_2]$ je forma a

$$F = cF_1^{r_1} \dots F_s^{r_s}$$

je jej faktorizácia, potom krivka F_i je *komponentou* krivky F a r_i je *násobnosť* komponenty F_i .

3.3. Pokrytie projektívneho priestoru afinnými mapami. Projektívny priestor dimenzie n sme formálne definovali ako množinu priamok v $\mathbb{A}^{n+1}$ prechádzajúcich začiatkom súradnicovej sústavy (ekvivalentne ako jednorozmerné podpriestory k^{n+1}).

Na druhej strane si ho často predstavujeme ako rozšírenie afinného priestoru rovnakej dimenzie. Priestor $\mathbb{A}^n$ je tak podmnožinou priestoru $\mathbb{P}^n$. Nevlastné body (body v nekonečne) sú body v $\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{A}^n$.

Budeme teraz bližšie skúmať súvis týchto dvoch konštrukcií.

Nech $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$. Priestor $\mathbb{A}^n$ uvažujeme ako vložený do $\mathbb{P}^n$, takže bodu $(a_1, \dots, a_n)$ priradíme homogénne súradnice, napríklad $(1 : a_1 : \dots : a_n)$. Týmto spôsobom skonstruujeme všetky také body $\mathbb{P}^n$, ktorých prvá homogénna súradnica je nenulová. Body s

prvou súradnicou nulovou sú nevlastné, pričom bod $(0 : a_1 : \dots : a_n)$ zodpovedá všetkým priamkam, ktorých smerový vektor je $(a_1, \dots, a_n)$. Naopak, vezmime bod $(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n$ taký, že $a_0 \neq 0$. K tomuto bodu projektívneho priestoru vieme priradiť bod v $\mathbb{A}^n$: platí, že

$$(a_0 : \dots : a_n) = \left(1 : \frac{a_1}{a_0} : \dots : \frac{a_n}{a_0}\right),$$

takže dostávame bod $(\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}) \in \mathbb{A}^n$. S afinným priestorom $\mathbb{A}^n$ sme týmto postupom v $\mathbb{P}^n$ stotožnili množinu

$$U_0 = \{(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n \mid a_0 \neq 0\}.$$

Vynechali sme nevlastné body

$$\mathbb{P}^n \setminus U_0 = \{(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n \mid a_0 = 0\},$$

Množina U_0 nevlastných bodov nie je v $\mathbb{P}^n$ nijak špeciálna. Analogicky definujeme množiny $U_1, \dots, U_n$:

$$U_i = \{(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n \mid a_i \neq 0\}.$$

Každá z týchto množín sa dá stotožniť s n -rozmerným afinným priestorom, tak ako sme to urobili v prípade U_0 :

$$\begin{aligned} \varphi_i : \mathbb{A}^n &\rightarrow U_i, & (a_1, \dots, a_n) &\mapsto (a_1 : \dots : a_i : 1 : a_{i+1} : \dots : a_n) \\ \varphi^{-1} : U_i &\rightarrow \mathbb{A}^n, & (a_0 : \dots : a_n) &\mapsto \left(\frac{a_0}{a_i} : \dots : \frac{a_{i-1}}{a_i} : \frac{a_{i+1}}{a_i} : \dots : \frac{a_n}{a_i}\right). \end{aligned}$$

Množiny $U_0, \dots, U_n$ sa nazývajú *afinnými mapami* a všetky spolu pokrývajú celý afinný priestor:

$$\mathbb{P}^n = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_n.$$

Inklúzia „ $\supseteq$ ” je zrejímavá, keďže $U_i \subset \mathbb{P}^n$, opačná inklúzia platí, lebo ak $(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n$, potom existuje $i \in \{0, \dots, n\}$ také, že $a_i \neq 0$, a teda $(a_0 : \dots : a_n) \in U_i$.

3.4. Krivky v projektívnej rovine. Nás bude takmer výlučne zaujímať projektívna rovina:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = U_0 \cup U_1 \cup U_2, \quad U_i = \{(a_0 : a_1 : a_2) \mid a_i \neq 0\}$$

Príklad. $F = z_1^2 + z_2^2 - z_0^2$ je kvadratická krivka v $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Skúsme túto krivku vizualizovať, teda načrtnúť V_F . Najjednoduchšie je nakresliť vždy nejakú afinnú časť krivky, uvažujme napríklad body krivky F , ktoré ležia v affinej mape U_0 :

$$V_F \cap U_0 = \{(a_0 : a_1 : a_2) \mid a_1^2 + a_2^2 - a_0^2 = 0 \wedge a_i \neq 0\}$$

Pre bodu v U_0 platí, že $a_0 \neq 0$, preto môžeme písať

$$(a_0 : a_1 : a_2) = \left(1 : \frac{a_1}{a_0} : \frac{a_2}{a_0}\right).$$

Vidíme, že potom $(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0})$ sú afinné súradnice v tejto mape (t.j. keď $U_0 \cong \mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$). Afinné súradnice krivky tak musia spĺňať rovnosť $(\frac{a_1}{a_0})^2 + (\frac{a_2}{a_0})^2 - 1 = 0$, teda rovnica danej krivky v afinných súradniciach je $x^2 + y^2 - 1 = 0$, kde $x = z_1/z_0$ a $y = z_2/z_0$.

Nejaké body krivky F ale táto rovnica nepopisuje, presnejšie nepopisuje body krivky F , ktoré neležia v U_0 . Sú to body:

$$z_1^2 + z_2^2 - z_0^2 = 0 \quad \wedge \quad z_0 = 0.$$

Tomuto vyhovujú body $(0 : 1 : i)$, $(0 : 1 : -i)$ – tzv. *kružnicové body*.

Vidíme, že forma stupňa d s $n + 1$ premennými je podobná polynómu stupňa d s n premennými. Medzi nimi sa môžeme presúvať *homogenizáciou* a *dehomogenizáciou*:

- nech $F \in k[z_0, z_1, \dots, z_n]$ je forma, potom polynóm $f(x_1, \dots, x_n) = F(1, x_1, \dots, x_n)$ je dehomogenizáciou F (t.j. $x_i = z_i/z_0$)
- nech $f \in k[x_1, \dots, x_n]$, $\deg f = d$, potom forma $F \in k[z_0, z_1, \dots, z_n]$ stupňa d taká, že $F(1, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ je homogenizáciou f (zapisujeme aj $F = f^h$)

Pomocou homogenizácie a dehomogenizácie vieme prepojiť projektívnu krivku a jej afinnú časť: ak $F \in k[z_0, z_1, z_2]$ popisuje projektívnu krivku, potom dehomogenizácia $f(x, y) = F(1, x, y)$ popisuje jej časť v afinnej mape U_0 (analogicky vieme nájsť časti krivky v afinných mapách U_1 a U_2). Naopak, ak $f \in k[x, y]$ je afinná roviná krivka, potom homogenizácia F polynómu f popisuje *zúplnenie* krivky f .

Pozor, homogenizácia a dehomogenizácia nie sú to celkom inverzné akcie:

$$\begin{aligned} F &= z_0^2 z_1 - z_0 z_1 z_2 + z_0^3 \\ f &= F(1, x_1, x_2) = x_1 - x_1 x_2 + 1 \\ f^h &= z_0 z_1 - z_1 z_2 + z_0^2 \neq F \end{aligned}$$

Príklad 3.10. Uvažujme reálnu afinnú krivku $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Afinnú rovinu vnoríme do projektívnej ako U_0 :

$$\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \quad (a, b) \mapsto (1 : a : b).$$

Rovnica krivky potom bude

$$(z_1 - z_0)^2 + z_2^2 = z_0^2.$$

Ako táto krivka “vyzerá” v afinných mapách U_1 a U_2 ?

Príklad 3.11. Uvažujme reálnu afinnú krivku $y = x^3$ v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Vnoríme $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ do $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ako U_0 a postupnou vizualizáciou krivky v U_1 a U_2 (pre úplnosť a poučenie aj zistíme, aké nevlastné body má krivka v jednotlivých mapách) odhalíme aj singulárny bod tejto krivky.

Krivku môžeme skúsiť vizualizovať aj globálne. Projektívnu rovinu si môžeme predstaviť ako dvojrozmernú sféru, na ktorej sme dva protíhlé body stotožnili. Postupovať pri vizualizácii krivky môžeme napríklad takto:

- (1) vizualizovať časť krivky v $U_0 \cong \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$,
- (2) vložiť U_0 do $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ (ako xy -rovinu),
- (3) zdvihnúť U_0 do roviny $z = 1$,
- (4) premietnuť na jednotkovú sféru - uvidíme aj body v ∞ .

Príklad 3.12. *Vivianiho krivka* je prienik guľovej a kužeľovej plochy:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ide o priestorovú krivku. Presvedčíme sa, že jej projekciou do yz -roviny je tzv. *Geronova lemniskata*:

$$y^2 - x^2 + x^4 = 0.$$

Vnoríme $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ do $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ako U_0 . V mape U_2 , (t.j. pôvodná y -os sa stane nevlastnou priamkou) má krivka v $(0, 0)$ izolovaný (singulárny) bod.