

2.5. Dotyčnica krivky, dotykový kužel. Nech f je krivka a nech $P \in V(f)$ (t.j. $m_P(f) \geq 1$). Ak $m_P(f) = r$ a l je taká priamka, že $I_P(f, l) > r$, potom l nazývame *dotyčnicou* krivky f v bode P . Pre daný bod P krivky l sa zjednotenie všetkých dotyčníc krivky f v bode P nazýva *dotykovým kuželom* v bode P .

Krivky f, g sa *dotýkajú* v P , ak

- $P \in V(f)$ a $P \in V(g)$,
- existuje priamka l , ktorá je zároveň dotyčnicou f aj g v bode P .

Z Tvrdenia 2.9 vyplýva, že vlastnosť priamky byť dotyčnicou krivky v danom bode nezávisí od zvolenej afinnej súradnicovej sústavy. Bez ujmy na všeobecnosti sa preto môžeme obmedziť na štúdium dotykového kužela krivky v bode $O = (0, 0)$.

Pre skrátenie zápisu budeme ďalej parciálne derivácie polynómu f podľa x resp. y označovať f_x resp. f_y .

Nech $m_P(f) = 1$, t.j. nech O je regulárny bod krivky:

$$f = f_x(O)x + f_y(O)y + \text{členy vyšších stupňov},$$

pričom platí, že $(f_x(O), f_y(O)) \neq (0, 0)$. Priamka l bude dotyčnicou f v O práve vtedy, keď pre jej smerový vektor (u, v) platí, že

$$f_x(O)u + f_y(O)v = 0,$$

čiže keď vektory $(f_x(O), f_y(O))$ a (u, v) sú na seba kolmé, a teda vidíme, že $(f_x(O), f_y(O))$ je normálovým vektorom dotyčnice. V regulárnom bode má teda krivka jedinou dotyčnicu:

Tvrdenie 2.24. *Nech $f \in k[x, y]$ je krivka a nech $P = (p_1, p_2)$ je regulárny bod krivky. Potom*

$$f_x(P)(x - p_1) + f_y(P)(y - p_2)$$

je rovnica dotyčnice krivky f v bode P .

Dôkaz. Uvedená priamka má podľa predchádzajúcich úvah smer dotyčnice. Navyše (dosadením) sa ľahko presvedčíme, že prechádza daným bodom krivky. $\square$

Príklad 2.25. Nech $P = (p_1, p_2)$ leží na priamke $l = ax + by + c$. Potom dotyčnicou priamky l v bode P je samotná priamka l .

Príklad 2.26. Jednotková kružnica $f = x^2 + y^2 - 1$ nemá singulárne body, v každom svojom bode má teda jednu dotyčnicu. Konkrétnejšie, ak $P = (p_1, p_2) \in V(f)$, tak dotyčnicou f v bode P je priamka $p_1x + p_2y - 1$.

Teraz zovšeobecníme Tvrdenie 2.24 na ľubovoľný (aj singulárny) bod krivky. Najprv nech $O = (0, 0)$ je r -násobným bodom krivky $f \in k[x, y]$. Teda

$$f = a_{r0}x^r + a_{r-1,1}x^{r-1}y + \cdots + a_{0r}y^r + \text{členy vyšších stupňov},$$

kde aspoň jeden z koeficientov a_{ij} , $(i + j = r)$ je nenulový. Priamka l je dotyčnicou f v bode O , ak jej smerový vektor (u, v) je riešením homogénnej časti f r -tého stupňa, teda ak

$$(8) \quad a_{r0}u^r + a_{r-1,1}u^{r-1}v + \cdots + a_{0r}v^r = 0.$$

Homogénne polynómy s dvoma premennými sa nápadne podobajú na ľubovoľné (čiže nie nutne homogénne) polynómy s jednou premennou. Špeciálne máme nasledovné tvrdenie:

Lema 2.27. *Nech pole k je algebraicky uzavreté. Nech $F \in k[u, v]$ je homogénny polynóm, $F \neq 0$. Potom*

$$F(u, v) = (\alpha_1 u + \beta_1 v)^{r_1} \dots (\alpha_m u + \beta_m v)^{r_m}.$$

Dôkaz. Ide len o úpravu F na polynóm o jednej premennej:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{i=0}^d a_i u^i v^{d-i} = v^d \sum_{i=0}^c a_i \left(\frac{u}{v}\right)^i \\ &= a_c v^d \left(\frac{u}{v} - \gamma_1\right)^{r_1} \dots \left(\frac{u}{v} - \gamma_s\right)^{r_m} \\ &= a_c v^{d-c} (u - \gamma_1 v)^{r_1} \dots (u - \gamma_m v)^{r_m}. \end{aligned}$$

□

Vráťme sa teraz k hľadaniu dotyčníc krivky v singulárnom bode. Videli sme, že rovnica (8) popisuje dotykový kužeľ krivky f v bode O . Ak je pole, nad ktorým pracujeme, algebraicky uzavreté, potom polynóm na ľavej strane faktorizuje na lineárne členy:

$$a_r x^r + a_{r-1,1} x^{r-1} y + \dots + a_{0,r} y^r = (\alpha_1 x + \beta_1 y)(\alpha_2 x + \beta_2 y) \dots (\alpha_r x + \beta_r y).$$

Vidíme, že dotyčnice krivky f v bode O sú presne lineárne faktory homogénnej časti f najnižšieho stupňa.

Ak hľadáme dotyčnice krivky v bode $P \neq (0, 0)$, tak v prípade, že je bod P regulárny, je výhodné použiť Tvrdenie 2.24. Naopak, ak je bod P singulárny, zvyčajne sa urobí posunutie, ktorým bod P posunieme do $(0, 0)$, a až potom sa hľadajú dotyčnice.

Presnejšie teraz vieme popísať niektoré typy singularít: *nód* je r -násobný bod krivky ($r \geq 2$) s r rôznymi dotyčnicami, *hrot* je zas dvojnásobný bod krivky jednou (dvojnásobnou) dotyčnicou.

Príklad 2.28. Krivka $y^2 - x^3 - x^2$ má v bode $(0, 0)$ dotykový kužeľ $y^2 - x^2$ pozostávajúci z dvoch dotyčníc: $x - y$ a $x + y$.

3. KRIVKY V PROJEKTÍVNEJ ROVINE

3.1. Projektívna rovina. Projektívnu rovinu zrejme poznáte ako rozšírenie afinnej roviny pridaním priesečníkov rovnobežiek, tieto nové body sa zvyknú nazývať *nevlastnými bodmi* alebo *bodmi v nekonečne*.

S bodmi v afinnej rovine vieme pracovať vďaka tomu, že každý bod má svoje súradnice. Tie môžeme dosadiť do rovnice priamky (krivky) a zistiť tak, či daný bod leží na priamke (krivke) alebo nie. So súradnicami tiež pracujeme, keď aplikujeme na rovinu afinnú transformáciu.

Nevlastným bodom by sme tiež radi priradili súradnice, aby sme s nimi mohli neskôr počítať. Aby sme ich rozlíšili od súradníc bodom afinnej roviny, používajú sa tzv. *rozšírené súradnice*: rozšírené súradnice bodu $P = (p_1, p_2)$ afinnej roviny budú $(1, p_1, p_2)$. Bod v nekonečne, ktorým prechádza priamka l so smerovým vektorom (u, v) , bude mať rozšírené súradnice $(0, u, v)$. Avšak (u, v) nie je jediný smerový vektor tejto priamky, aj vektor $(5u, 5v)$ je jej smerovým vektorom. Všeobecnejšie, každý nenulový násobok (u, v) je smerovým vektorom tejto priamky. Nevlastný bod priamky l tak má aj súradnice

$(0, 5u, 5v)$, všeobecnejšie $(0, \lambda u, \lambda v)$ pre ľubovoľné $\lambda \neq 0$. Aby sme sa vyhli nejednoznačnosti priradenia medzi nevlastnými bodmi a ich súradnicami, používame tzv. *homogénne súradnice*:

$$(0 : u : v) = (0 : \lambda u : \lambda v) \quad \text{pre všetky } \lambda \neq 0.$$

Nakoniec, aby sme udržali čo najväčšiu podobnosť medzi súradnicami vlastných a nevlastných bodov, aj pri vlastných bodoch budeme používať homogénne súradnice, teda

$$(1 : p_1 : p_2) = (\lambda : \lambda p_1 : \lambda p_2) \quad \text{pre všetky } \lambda \neq 0.$$

Dostávame sa tak k formálnej konštrukcii projektívnej roviny, či všeobecnejšie, n -rozmerného projektívneho priestoru:

Nech k je pole, potom n -rozmerný projektívny priestor nad k je množina priamok v $\mathbb{A}^{n+1}(k)$, ktoré prechádzajú bodom $(0, \dots, 0)$. Presnejšie, nech $\sim$ je nasledovná relácia na $\mathbb{A}^{n+1}(k) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$:

$$(a_0, \dots, a_n) \sim (a'_0, \dots, a'_n), \text{ ak } (a'_0, \dots, a'_n) = (\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) \text{ pre nejaké } \lambda \neq 0, \lambda \in k.$$

Lahko sa overí, že $\sim$ je reláciou ekvivalencie, a teda rozkladá množinu $\mathbb{A}^{n+1}(k) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ na triedy ekvivalencie. Body *projektívneho priestoru* sú potom jednotlivé triedy:

$$\mathbb{P}^n(k) = (\mathbb{A}^{n+1}(k) \setminus \{(0, \dots, 0)\}) / \sim.$$

Každý bod v $\mathbb{P}^n$ je takto reprezentovaný viacerými $(n+1)$ -ticami čísiel z k : $(a_0, \dots, a_n)$ a $(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$ ($\lambda \neq 0$) určujú ten istý bod v $\mathbb{P}^n$. Tieto $(n+1)$ -tice nazývame *homogénnymi súradnicami* bodu v $\mathbb{P}^n$. Pri zápise bodu pomocou jeho súradníc používame dvojbodku: $(a_0 : \dots : a_n)$. Z konštrukcie projektívneho priestoru vyplýva, že

$$(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n \quad \text{práve vtedy, keď} \quad a_i \neq 0 \quad \text{pre nejaké } i.$$

Príklad 3.1. Kružnica v reálnej afinnej rovine predstavuje reálnu projektívnu priamku: stereografická projekcia je bijekcia medzi bodmi kružnice a bodmi projektívnej priamky.

Príklad 3.2. Sféra v $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ *nie je* modelom reálnej projektívnej roviny! V tomto prípade stereografická projekcia zobrazí celú nevlastnú priamku na jediný bod. (Pozor, toto ešte nie je dôkaz, že sféra nie je modelom $\mathbb{P}^2$, iba sme sa presvedčili, že stereografická projekcia v tomto prípade nedáva bijekciu.)

Príklad 3.3. Jednotkový disk, čiže kruh v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ spolu s hranicou, t.j. množina

$$\{(a, b) \mid a^2 + b^2 \leq 1\}$$

je modelom reálnej projektívnej roviny. Bijekciu môžeme popísať v troch krokoch:

- (1) vnoríme $\mathbb{A}^2$ do $\mathbb{A}^3$ tak, že rovinu stotožníme so súradnicovou rovinou $z = 0$,
- (2) premietneme body disku v smere osi z na rotačný paraboloid $z = (x^2 + y^2)$
- (3) urobíme projekciu paraboloidu z bodu $(0, 0, 1)$ do roviny $z = 0$.

(dú: vypracovať)

3.2. Krivky v $\mathbb{P}^2$.

Príklad 3.4. Krivky v projektívnej rovine chceme definovať podobne ako v afinnom prípade pomocou polynómov. Uvažujme napríklad polynóm $f = z_1 z_2 - 1 \in k[z_0, z_1, z_2]$ a skúsme zistiť, či takýto polynóm popisuje nejakú množinu v projektívnej rovine.

Nech $p = (1 : 1 : 1)$. Potom platí, že $f(1, 1, 1) = 1 \cdot 1 - 1 = 0$ a teda bod p by sme mohli zaradiť medzi body variety. Avšak pre ten istý bod p máme tiež $p = (2 : 2 : 2)$ a tentokrát $f(2, 2, 2) = 2 \cdot 2 - 1 \neq 0$. Množina $\{(a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2 \mid f(a_0, a_1, a_2) = 0\}$ nie je korektne definovaná.

Použijeme premennú z_0 na homogenizáciu pôvodného polynómu: nech

$$f^h = z_1 z_2 - z_0^2.$$

Potom bod $p = (1 : 1 : 1)$ spĺňa rovnosť $f^h(p) = 0$ bez ohľadu na to, ktoré súradnice bodu p dosadíme za premenné v polynóme f^h . Všeobecnejšie, nech pre $q = (q_0 : q_1 : q_2) \in \mathbb{P}^2$ platí, že $f^h(q_0, q_1, q_2) = 0$. Ak $(q'_0 : q'_1 : q'_2)$ sú iné súradnice toho istého bodu q , potom $(q'_0 : q'_1 : q'_2) = (\lambda q_0 : \lambda q_1 : \lambda q_2)$ pre nejaké λ . Po dosadení týchto súradníc do zhomogenizovaného polynómu f^h dostávame

$$f^h(\lambda q_0, \lambda q_1, \lambda q_2) = \lambda q_1 \lambda q_2 - (\lambda q_0)^2 = \lambda^2 (q_1 q_2 - q_0^2) = \lambda^2 f^h(q_0, q_1, q_2) = 0.$$

Množina

$$\{(a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2 \mid f^h(a_0, a_1, a_2) = 0\}$$

je tak korektne definovaná.

Definícia 3.5. $F \in k[z_0, \dots, z_n]$ sa nazýva *homogénny polynóm (forma) stupňa d* , ak všetky jeho členy majú stupeň d :

$$(9) \quad F = \sum_{i_0 + \dots + i_n = d} c_{i_0, \dots, i_n} z_0^{i_0} \dots z_n^{i_n}, \quad c_{i_0, \dots, i_n} \in k.$$

Príklad 3.6.

- $z_1 + z_2 - 5z_3$ – lineárna forma
- $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3$ – kvadratická forma
- $z_1^3 - z_2^2 z_3$ – kubická forma

Lema 3.7. *Nech k je nekonečné pole. Potom polynóm $F \in k[z_0, \dots, z_n]$ je homogénny stupňa d práve vtedy, keď pre všetky $\lambda \in k$ platí*

$$F(\lambda z_0, \dots, \lambda z_n) = \lambda^d F(z_0, \dots, z_n).$$

Dôkaz. Zapišme F ako v (9). Nech

$$F(a_0, \dots, a_n) = \sum c_{i_0, \dots, i_n} a_0^{i_0} \dots a_n^{i_n} = 0.$$

Nech $\lambda \in k$. Potom platí

$$\begin{aligned} F(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) &= \sum c_{i_0, \dots, i_n} (\lambda a_0)^{i_0} \dots (\lambda a_n)^{i_n} = \sum \lambda^d c_{i_0, \dots, i_n} a_0^{i_0} \dots a_n^{i_n} \\ &= \lambda^d \sum c_{i_0, \dots, i_n} a_0^{i_0} \dots a_n^{i_n} = \lambda^d F(a_0, \dots, a_n) = 0. \end{aligned}$$

Pre opačnú implikáciu rozpíšme F ako súčet foriem:

$$F = F_0 + F_1 + \dots + F_{d'}, \quad \text{kde } F_i \text{ je forma stupňa } i.$$

Potom pre ľubovoľné $\lambda \in k$ platí

$$F(\lambda z_0, \dots, \lambda z_n) = F_0(\lambda z_0, \dots, \lambda z_n) + F_1(\lambda z_0, \dots, \lambda z_n) + \dots + F_{d'}(\lambda z_0, \dots, \lambda z_n)$$

a podľa predchádzajúcej časti dôkazu potom

$$F_0(z_0, \dots, z_n) + \lambda F_1(z_0, \dots, z_n) + \dots + \lambda^{d'} F_{d'}(z_0, \dots, z_n) - \lambda^d F(z_0, \dots, z_n) = 0.$$

Keďže tento vzťah musí platiť pre všetky λ a tiež všetky body projektívneho priestoru, musí ísť o nulový polynóm, čiže $d = d'$ a $F_i \equiv 0$ pre $i \neq d$. $\square$

Dôsledok 3.8. *Nech $F \in k[z_0, \dots, z_n]$ je homogénny polynóm. Ak $F(a_0, \dots, a_n) = 0$, potom aj $F(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = 0$ pre ľubovoľné $\lambda \in k$.*

KAG FMFI UK BRATISLAVA

E-mail address: `jana.chalmovianska@fmph.uniba.sk`