

Tvrdenie 2.9. *Nech f je krivka, l je priamka a P je bod v $\mathbb{A}^2$. Nech ďalej $\varphi : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ je afinná transformácia. Nech $\tilde{f}$ resp. $\tilde{l}$ označujú transformovanú krivku resp. priamku, potom $I_{\varphi(P)}(\tilde{f}, \tilde{l}) = I_P(f, l)$.*

Dôkaz. Pre transformovanú krivku máme $\tilde{f}(X) = f(\varphi^{-1}(X))$. Ak $X(t) = (x(t), y(t))$ je parametrizácia priamky l pred transformáciou, potom $\varphi(X(t))$ je jej parametrizácia po transformácii. Pre priesekový polynóm tak máme

$$\tilde{f}(\varphi(X(t))) = f(\varphi^{-1}(\varphi(X(t)))) = f(X(t)),$$

kde naľavo je priesekový polynóm krivky a priamky pre transformáciou, a napravo je ich priesekový polynóm po transformácii. Týmto je tvrdenie ukázané. $\square$

2.2. Singulárne body rovinnej krivky.

Príklad 2.10. Nech $f \in \mathbb{R}[x, y]$, $f = y^2 - x^3 - x^2$ je singulárna kubická krivka, *nód* (angl. *node*) a $l = y - cx$ je priamka cez $(0, 0)$ s parametrizáciou

$$x(t) = t, \quad y(t) = ct.$$

Priesekový polynóm je potom

$$\Phi(t) = f(x(t), y(t)) = f(t, ct) = t^2(c^2 - t - 1).$$

Čiže $t = 0$ je dvojnásobný koreň priesekového polynómu, a v prípade (a len v prípade) keď $c = \pm 1$ je $t = 0$ dokonca trojnásobným koreňom. Inými slovami, takmer pre všetky priamky cez $O = (0, 0)$ je $I_O(f, l) = 2$, a v prípade dvoch priamok, konkrétne keď $c = \pm 1$, je $I_O(f, l) = 3$.

Nech $P = (p_1, p_2)$ je bod krivky $f \in k[x, y]$, čiže pre ľubovoľnú priamku l prechádzajúcu bodom P platí $I_P(f, l) \geq 1$. *Násobnosť bodu P na krivke f* označujeme $m_P(f)$ a rozumieme ňou

$$m_P(f) = \min\{I_P(f, l) \mid l \ni P\}.$$

Násobnosť $m_P(f) = 0$ práve vtedy, keď P nie je bod krivky f . Ak $m_P(f) = 1$, bod P sa nazýva *jednoduchý* alebo *regulárny* bod krivky f . Ak $m_P(f) = 2$ ($m_P(f) = 3$, $m_P(f) = r$), bod P sa nazýva *dvojnásobný* (*trojnásobný*, *r-násobný*) bod krivky f . Tiež môžeme povedať, že krivka f má v P dvojnásobný (trojnásobný, *r-násobný*) bod. Ak $m_P(f) > 1$, hovoíme tiež, že P je *singulárny* bod krivky f .

Príklad 2.11. Krivka $f = (x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 \in \mathbb{R}[x, y]$ má v $(0, 0)$ trojnásobný bod. Týmto bodom prechádzajú tri vetvy krivky.

Príklad 2.12. Pozor, nie je pravda, že násobnosť bodu je rovná počtu vetiev krivky prechádzajúcich cez tento bod, viď napr. krivka $f = y^2 - x^3 \in \mathbb{R}[x, y]$ (singulárna kubika, *hrot*, angl. *cusp*.)

Príklad 2.13. Singulárny bod krivky nemusí byť viditeľný na obrázku, viď bumerang $y(x^2 + y^2) - x^4 - y^4$: v reálnej rovine krivka “vyzerá hladko” v $(0, 0)$. V komplexnej rovine by sme videli, že jej dotykový kužeľ v $(0, 0)$ pozostáva z troch priamok.

Cvičenie 2.14. *Astroida* je krivka $f = (1 - x^2 - y^2)^3 - 27x^2y^2 \in \mathbb{R}[x, y]$. Podobne ako kružnica má aj astroida jednoduchú parametrizáciu pomocou goniometrických funkcií:

$$(x(t), y(t)) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Overte, že $(1, 0)$ je singulárnym bodom krivky. Aké ďalšie sigulárne body ešte nájdete? (Zatiaľ len metóda pokus - omyl.)

2.3. Formálne derivovanie. Nech R je okruh bez deliteľov nuly, nech $R[x]$ sú polynómy nad R . Nech

$$f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \cdots + f_nx^n \in R[x].$$

Potom *deriváciou* polynómu p nazývame polynóm

$$f'(x) = f_1 + 2f_2x + \cdots + nf_nx^{n-1}.$$

Indukciou n -tá derivácia polynómu f je

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Takto máme deriváciu polynómu definovanú nad ľubovoľným poľom, dokonca aj nad okruhom. Takisto máme týmto už zadané aj parciálne derivácie polynómov o viac premenných, keďže

$$k[x_1, x_2, \dots, x_r] = (k[x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_r])[x_i].$$

Takto definovaná derivácia má rovnaké vlastnosti ako derivácia nad $\mathbb{R}$ definovaná pomocou limit:

Tvrdenie 2.15. *Derivácia nad R má nasledovné vlastnosti:*

- (i) $(f + g)' = f' + g'$ pre $f, g \in R[x]$,
- (ii) $(cf)' = cf'$ pre $c \in R$ a $f \in R[x]$,
- (iii) $(fg)' = f'g + fg'$ pre $f, g \in R[x]$,
- (iv) $(f^n)' = nf^{n-1}f'$ pre $f \in R[x]$,
- (v) $f'(g_1(x), \dots, g_n(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(g_1(x), \dots, g_n(x))g'_i(x)$
pre $g_i \in R[x]$ a $f \in R[x_1, \dots, x_n]$.

Dôkaz. dú ((i)–(iv)) je len mechanické rozpisovanie definície, (v) stačí ukázať pre f pozostávajúce z jedného člena, a potom aplikovať (i) a (ii). $\square$

Nech

$$(3) \quad f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \cdots + f_nx^n.$$

Postupným derivovaním a dosadzovaním sa ľahko presvedčíme, že

$$f(0) = f_0, \quad f'(0) = f_1, \quad f''(0) = 2!f_2, \quad \dots \quad f^{(n)}(0) = n!f_n.$$

Teda zápis (3) polynómu f je aj jeho Taylorovým rozvojom v 0. Všeobecnejšie Taylorov rozvoj f v bode a máme, ak polynóm zapíšeme v tvare

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n.$$

Veta 2.16. *(Taylorov rozvoj polynómu.) Nech $f \in R[x]$, $\deg f = n$ a nech $a \in R$. Potom*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x - a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x - a)^n.$$

Dôkaz. Nech

$$(4) \quad f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots + c_n(x - a)^n.$$

Aby sme zistili hodnoty koeficientov $c_0, c_1, \dots, c_n$, derivujme túto rovnosť:

$$\begin{aligned} f'(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + \dots + nc_n(x-a)^{n-1} \\ f''(x) &= 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + \dots + (n-1)nc_n(x-a)^{n-2} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= n!c_n \end{aligned}$$

Keď v týchto rovnostiach (všetne (4)) dosadíme $x = a$, dostávame, že $f^{(i)} = i!c_i$, a tvrdenie vety je dokázané. $\square$

Veta 2.17. (Taylorov rozvoj polynómu viacerých premenných.) Nech $f \in R[x_1, \dots, x_n]$, $\deg f = n$ a nech $(a_1, \dots, a_r) \in R^r$. Potom

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_r) &= f(a_1, \dots, a_r) + \\ &\quad \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_r)(x_i - a_i) + \\ &\quad \frac{1}{2!} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_1, \dots, a_r)(x_i - a_i)(x_j - a_j) + \\ &\quad \dots \text{ až po } n\text{-tú mocninu.} \end{aligned}$$

Dôkaz. Označme

$$(5) \quad f(a_1 + (x_1 - a_1)t, \dots, a_r + (x_r - a_r)t) = g(t).$$

Urobme teraz Taylorov rozvoj polynómu $g(t)$ v 0:

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}t^n,$$

kde jednotlivé koeficienty získame derivovaním zloženej funkcie:

$$\begin{aligned} g(0) &= f(a_1, \dots, a_r) \\ g'(0) &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_r)(x_i - a_i) \\ g''(0) &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_1, \dots, a_r)(x_i - a_i)(x_j - a_j) \\ &\dots \end{aligned}$$

Na záver v (5) nahradíme $g(t)$ jeho Taylorovým rozvojom, položíme $t = 1$, a tým dostaneme dokazovanú rovnosť. $\square$

2.4. Hľadanie singulárnych bodov krivky. Zatiaľ vieme pre danú krivku a daný bod overiť, či je krivka v tomto bode singulárna, a prípadne zistiť aj jej násobnosť v tomto bode. Teraz by sme chceli pre ľubovoľnú danú krivku jej singulárne body nájsť.

Tvrdenie 2.18. Nech $P = (p_1, p_2)$ je bod a $f \in k[x, y]$ je rovinná krivka. Potom P je m -násobným bodom krivky f práve vtedy, keď sú splnené nasledovné podmienky:

- $P \in V(f)$ (t.j. $f(P) = 0$),
- všetky parciálne derivácie f rádu menšieho ako m sú v P nulové,
- existuje parciálna derivácia f rádu m , ktorá je nenulová v P .

Dôkaz. Nech

$f(x, y) = a_{00} + a_{10}(x - p_1) + a_{01}(y - p_2) + a_{20}(x - p_1)^2 + a_{11}(x - p_1)(y - p_2) + a_{20}(y - p_2)^2 + \dots$
je Taylorov rozvoj polynómu f v bode P , teda

$$a_{ij} = \binom{i+j}{i} \frac{1}{(i+j)!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(P) = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(P).$$

Priamku cez P parametrizujeme

$$x(t) = p_1 + ut, \quad y(t) = p_2 + vt,$$

bod P teda zodpovedá parametru $t = 0$. Prieškový polynóm potom je

$$\Phi(t) = a_{00} + (a_{10}u + a_{01}v)t + (a_{20}u^2 + a_{11}uv + a_{02}v^2)t^2 + \dots \text{ členy vyšších stupňov.}$$

Odtiaľ vidíme, že P leží na krivke f práve vtedy, keď

$$(6) \quad a_{00} = 0$$

Bod P je aspoň dvojnásobným bodom krivky f práve vtedy, keď (6) a navyše $(a_{10}u + a_{01}v) = 0$ pre všetky (u, v) . Špeciálne, ak $(u, v) = (1, 0)$, dostaneme, že $a_{10} = 0$, a ak $(u, v) = (0, 1)$, potom $a_{01} = 0$. Dostávame teda, že P je aspoň dvojnásobným bodom krivky f práve vtedy, keď (6) a navyše

$$(7) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(P) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0.$$

Ďalej bod P je aspoň trojnásobným bodom krivky f práve vtedy, keď (6), (7) a navyše $(a_{20}u^2 + a_{11}uv + a_{02}v^2) = 0$ pre všetky (u, v) . Podobne ako predtým môžeme postupne položiť $(u, v) = (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ a dostaneme tak podmienku, že bod P je aspoň trojnásobným práve vtedy, keď (6), (7) a navyše

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) = 0.$$

Týmto spôsobom môžeme formulovať podmienky pre r -násobnosť bodu na krivke a tvrdenie je dokázané. $\square$

Dôsledok 2.19. *Nech $O = (0, 0)$ je bod a $f \in k[x, y]$ je rovinná krivka. Potom O je m -násobným bodom krivky f práve vtedy, keď najnižší stupeň člena, ktorý sa v polynóme f nachádza s nenulovým koeficientom, je m .*

Dôsledok 2.20. *Bod $P = (p_1, p_2)$ je singulárnym bodom krivky f práve vtedy, keď*

$$f(P) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(P) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0.$$

Cvičenie 2.21. Nájdite všetky singularitu astroidy

- (a) nad $\mathbb{R}$,
- (b) nad $\mathbb{C}$.

Cvičenie 2.22. Overte, že priamka nemá singulárne body.

Príklad 2.23. Krivka $y^2 + x^3 + x^2 \in \mathbb{R}[x, y]$ má v $(0, 0)$ tzv. *izolovaný singulárny bod* (izolovanú singularitu).