

2. LOKÁLNE VLASTNOSTI ROVINNÝCH KRIVIEK

2.1. Priamka a krivka v afinnej rovine. Nech $f \in k[x, y]$ je rovinná krivka, nech l je priamka $\overleftrightarrow{AB}$, kde $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$. Budeme skúmať prienik priamky a krivky v afinnej rovine. Priamku l si vyjdríme parametricky: $X = (1-t)A + tB (= A + (B-A)t)$, po rozpísaní do súradníc tak máme

$$\begin{aligned}x(t) &= (1-t)a_1 + tb_1 \quad (= a_1 + (b_1 - a_1)t) \\y(t) &= (1-t)a_2 + tb_2 \quad (= a_2 + (b_2 - a_2)t).\end{aligned}$$

Prienik priamky l s krivkou f nájdeme pomocou rovnice

$$(2) \quad f(x(t), y(t)) = 0.$$

Nastane jedna z dvoch možností:

- (i) Ľavá strana v rovnosti (2) je nulová. To znamená, že pre ľubovoľnú hodnotu parametra t leží bod $(x(t), y(t))$ priamky l na krivke f . Priamka l je teda komponentou krivky f .
- (ii) Ľavá strana v rovnosti (2) nie je nulová, máme tak polynomicke rovnicu pre t , ktorej stupeň nie je väčší ako stupeň f . Na krivke f teda ležia tie body $(x(t), y(t))$ priamky l , keď t je koreňom rovnice (2).

Na polynóm na ľavej strane rovnosti (2) sa budeme odkazovať aj ako na *priesekový polynóm* krivky f a priamky l . Celú rovnicu (2) budeme nazývať tiež *priesekovou rovnicou*.

Ako jednoduchý dôsledok predchádzajúceho pozorovania dostávame nasledovnú lemu.

Lema 2.1. *Nech f je krivka stupňa $d \geq 1$ a nech l je priamka. Ak l nie je komponentou f (t.j. ak $V(l) \not\subseteq V(f)$), tak priamka l pretína krivku f v najviac d bodoch.*

Veľkú časť semestra sa budeme zaoberať zdokonaľovaním tohto výsledku až po známu Bézoutovu vetu, ktorá presne popisuje počet priesekov dvoch rovinných kriviek.

Cvičenie 2.2. Nájdite spoločné body jednotkovej kružnice $x^2 + y^2 - 1$ a priamky určenej bodmi $(-1, 0)$ a $(1, 1)$.

Príklad 2.3. Nech $f = y - x^2$ je parabola v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ a p nech je priamka prechádzajúca začiatkom súradnicovej sústavy, teda p má rovnicu $y = cx$, kde $c \in k$ popisuje sklon (smernicu) priamky.

Priamka a krivka majú takmer vždy dva spoločné body: $(0, 0)$ a (c, c^2) . Keď sa hodnota c blíži k $(0, 0)$, oba priesečníky sa k sebe približujú, až nakoniec splynú do jedného bodu.

Opačným smerom sa na túto situáciu môžeme pozrieť takto: parabola $y - x^2$ a priamka $y = 0$ majú spoločný iba jeden bod. Avšak pokiaľ by sme zadanie trošička pozmenili, čiže ak by sme veľmi málo zmenili koeficienty v definujúcich rovniciach, tento bod sa rozpadne na dva body.

Všimnime si, že priesekový polynóm má v tomto prípade v danom prieseku dvojnásobný koreň. Situáciu teda vieme podchytiť aj algebraicky.

Cvičenie 2.4. Uvažujte kubickú parabolu $y = x^3$ a podobne ako v predchádzajúcom príklade sledujte jej prieseky s priamkami cez $(0, 0)$. Koľko spoločných bodov viete vo všeobecnosti nájsť? Čo sa deje, keď smernica priamky ide k nule?

Nech f je rovinná krivka, l priamka a P bod. Potom symbolom $I_P(f, l)$ budeme označovať *priesekové číslo* alebo *priesekovú násobnosť*, a budeme ním rozumieť nasledovnú hodnotu:

- (i) Ak $P \notin V(l)$, potom $I_P(f, l) = 0$.
- (ii) Ak $P \in V(l)$ a l je komponentou f , potom $I_P(f, l) = \infty$.
- (iii) Ak $P \in V(l)$ a l nie je komponentou f , potom $I_P(f, l)$ je násobnosť t_0 ako koreňa priesekového polynómu $\Phi(t) = (f(x(t_0), y(t_0)))$ (t.j. exponent pri $(t - t_0)$ vo faktorizácii $\Phi(t)$), kde t_0 je parameter zodpovedajúci bodu P na priamke (čiže $P = (x(t_0), y(t_0))$).

Z doterajších úvah dostávame aj spresnenie Lemy 2.1:

Lema 2.5. *Nech f je krivka stupňa $d \geq 1$ a nech l je priamka. Ak l nie je komponentou f , tak*

$$\sum_{P \in V(l)} I_P(f, l) \leq \deg(f).$$

Nie je možné namiesto nerovnosti v Leme 2.5 dokázať rovnosť, aj keď počítame všetky priesečníky so správnymi násobnosťami:

Cvičenie 2.6. Nech $f = y^2 - x^3 - x^2$. Nájdite pomocou priesekového polynómu priesečníky tejto krivky

- (a) s x -osou,
- (b) so zvislou priamkou cez $(-1, 0)$.

Naša definícia priesekového čísla má jeden problém: jeho výpočet je viazaný na konkrétnu parametrizáciu priamky. Aby sme mali istotu, že definícia je korektná, potrebujeme sa presvedčiť, že $I_P(f, l)$ nezávisí od toho, akú parametrizáciu priamky si zvolíme.

Tvrdenie 2.7. *Priesekové číslo $I_P(f, l)$ závisí len od l , f a P , a nezávisí od parametrizácie priamky l .*

Dôkaz. Nech $l = \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$, čo nám dáva dve parametrizácie priamky l , kvôli prehľadnosti budeme parametre v nich označovať rôznymi písmenami:

$$\begin{aligned} X(t) &= (1-t)A + tB, \\ X(u) &= (1-u)C + uD. \end{aligned}$$

Presekové polynómy vzhľadom na jednotlivé parametrizácie označíme Φ a Ψ :

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= f((1-t)A + tB), \\ \Psi(u) &= f((1-u)C + uD). \end{aligned}$$

Medzi parametrizáciami pomocou t a u existuje súvislosť, ktorú vieme vyjadriť lineárne. Nech bod A zodpovedá v parametrizácii pomocou C, D parametru u_A , podobne pre B :

$$\begin{aligned} A &= (1-u_A)C + u_AD, \\ B &= (1-u_B)C + u_BD. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} X(t) &= (1-t)A + tB \\ &= (1-t)((1-u_A)C + u_AD) + t((1-u_B)C + u_BD) \\ &= (1 - ((1-t)u_A + tu_B))C + ((1-t)u_A + tu_B)D = X(u(t)). \end{aligned}$$

Máme tak, že $u = u(t) = (1 - t)u_A + tu_B$, čiže keď máme priamku l parametrizovanú parametrom u (pomocou C, D), vieme ju jednoducho reparametrizovať pomocou A, B . Podobne, keď poznáme priesekový polynóm $\Psi(u)$ (= priesekový polynóm vzhľadom na parametrizáciu pomocou C, D), ľahko z neho získame aj priesekový polynóm Φ (= priesekový polynóm vzhľadom na parametrizáciu pomocou A, B): $\Phi(t) = \Psi(u(t))$. Bod priamky l , ktorý v parametrizácii cez A, B zodpovedá parametru t_i , v parametrizácii cez C, D zodpovedá parametru $u_i = (1 - t_i)u_A + t_i u_B$. Odtiaľ potom máme, že

$$u - u_i = (1 - t)u_A + tu_B - ((1 - t_i)u_A + t_i u_B) = (t - t_i)(u_B - u_A).$$

Teda ak

$$\Psi(u) = (u - u_1)^{d_1} \dots (u - u_n)^{d_n}$$

je faktorizácia $\Psi(u)$ nad $\bar{k}$, potom

$$\Phi(t) = (u_B - u_A)^{\deg f} (t - t_1)^{d_1} \dots (t - t_n)^{d_n}$$

je faktorizácia $\Phi(t)$ nad $\bar{k}$. □

Na záver si ešte ukážeme, že prieseková násobnosť nezávisí ani od voľby súradnicovej sústavy. Vyskúšajme si to najprv na príklade.

Príklad 2.8. Majme krivku $f = y - x^2$, uvažujme jej prieseky s priamkou $l = y - 2x$.

Priamku si parametrizujeme:

$$x(t) = t, \quad y(t) = 2t,$$

ide o parametrizáciu cez body $A = (0, 0)$ a $B = (1, 2)$, teda $X(t) = (1 - t)A + tB$. Zodpovedajúci priesekový polynóm je

$$\Phi(t) = f(X(t)) = f(x(t), y(t)) = y(t) - x^2(t) = 2t - t^2,$$

odkiaľ už ľahko vyčítame, že f a l majú dva priesečníky násobnosti 1: $(0, 0)$ a $(2, 4)$.

Zobrazme teraz f aj l afinnou transformáciou φ :

$$\varphi : (x, y) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y}) = (1 + x + y, 1 + y).$$

Pre inverznú transformáciu tak máme

$$\varphi^{-1} : (\tilde{x}, \tilde{y}) \mapsto (x, y) = (\tilde{x} - \tilde{y}, \tilde{y} - 1).$$

Odtiaľ rovnica pre transformovanú krivku je

$$\tilde{f} = f(\tilde{x} - \tilde{y}, \tilde{y} - 1) = -\tilde{x}^2 + 2\tilde{x}\tilde{y} - \tilde{y}^2 + \tilde{y} - 1.$$

Parametrizácia transformovanej priamky je

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= 1 + 3t \\ \tilde{y} &= 1 + 2t. \end{aligned}$$

(Všimnite si, že bod priamky $(0, 0)$ zodpovedajúci parametru 0 sa zobrazí do bodu $(1, 1)$, ktorý na transformovanej priamke zodpovedá tiež parametru 0; podobne pre bod priamky zodpovedajúci parametru 1.)

Pre priesekový polynóm po transformácii tak máme

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) &= -\tilde{x}^2(t) + 2\tilde{x}(t)\tilde{y}(t) - \tilde{y}^2(t) + \tilde{y}(t) - 1 \\ &= -(1 + 3t)^2 + 2(1 + 3t)(1 + 2t) - (1 + 2t)^2 + (1 + 2t) - 1 \\ &= 2t - t^2. \end{aligned}$$

Tvrdenie 2.9. *Nech f je krivka, l je priamka a P je bod v $\mathbb{A}^2$. Nech ďalej $\varphi : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ je afinná transformácia. Nech $\tilde{f}$ resp. $\tilde{l}$ označujú transformovanú krivku resp. priamku, potom $I_{\varphi(P)}(\tilde{f}, \tilde{l}) = I_P(f, l)$.*

Dôkaz. Pre transformovanú krivku máme $\tilde{f}(X) = f(\varphi^{-1}(X))$. Ak $X(t) = (x(t), y(t))$ je parametrizácia priamky l pred transformáciou, potom $\varphi(X(t))$ je jej parametrizácia po transformácii. Pre priesekový polynóm tak máme

$$\tilde{f}(\varphi(X(t))) = f(\varphi^{-1}(\varphi(X(t)))) = f(X(t)),$$

kde naľavo je priesekový polynóm krivky a priamky pre transformáciou, a napravo je ich priesekový polynóm po transformácii. Týmto je tvrdenie ukázané. $\square$

2.2. Singulárne body krivky, dotyčnica, dotykový kužeľ. KAG FMFI UK BRATISLAVA

E-mail address: jana.chalmovianska@fmph.uniba.sk