

ZADANIA ZO 7.11., M. MAJTÁN

1. AFINNÝ PRIESTOR

1.1. Štruktúra a definícia afinného priestoru.

Úloha 1. Nájdite ťažisko trojuholníka v rovine.

- Ťažnica je úsečka spájajúca vrchol trojuholníka a stred protilahlej strany.
- Ťažisko delí ťažnicu v pomere 1 : 2.

Nájdite ťažisko

- (i) v trojuholníku ABC , kde $A = (-2, -2)$, $B = (4, 0)$, $C = (-5, 2)$ (cvične, nepovinné),
- (ii) v trojuholníku ABC , kde $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$.

Úloha 2. Popíšte pomocou súradníc osovú súmernosť v prípade, že os súmernosti je rovnobežná s niektorou súradnicovou osou.

1.2. Afinná súradnicová sústava.

Cvičenie 3. V rovine je daný trojuholník ABC a body $D = S(B, C)$, $E = S(A, C)$, $F = S(A, B)$. Nájdite súradnice vrcholov trojuholníka v afinnej súradnicovej sústave $(F, E-F, D-F)$.

Cvičenie 4. (kreslite si k tejto úlohe aj obrázok) Napíšte súradnice bodu $A = (2, 1)$ v súradnicovej sústave $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, keď

- (1) $O = (-1, 3)$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$,
- (2) $O = (0, 0)$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (1, 1)$,
- (3) $O = (2, 3)$, $\mathbf{e}_1 = (0, -1)$, $\mathbf{e}_2 = (1, 1)$.

1.3. Dĺžka vektora, vzdialenosť dvoch bodov.

Úloha 5. Na súradnicových osiach v reálnej rovine nájdite body, ktorých vzdialenosť od bodu $(5, 2)$ je 3.

Úloha 6. V rovine sú dané body $A = (-1, 0)$ a $B = (3, 2)$.

- (1) Na y -osi nájdite bod C tak, aby trojuholník ABC mal pri vrchole C pravý uhol.
- (2) Vypočítajte obsah tohto trojuholníka.

2. PRIAMKA V $\mathbb{A}^2$

Úloha 7. Vyjadrite body P_i ako afinné kombinácie bodov $A = (2, 1)$, $B = (-1, 2)$: $P_1 = (8, -1)$, (b) $P_2 = (-7, 4)$, (c) $P_3 = (4, 7)$.

Cvičenie 8. Zistite, či ide o tú istú priamku:

- $p: x = 1 + 3t, y = 2 - t, \quad q: x = 3t, y = 1 - t,$
- $p: x = -2 - t, y = 5 + t, \quad q: x = -2 + t, y = 5 + t,$
- $p: x = 2 + t, y = 2 + 2t, \quad q: x = 1 - t, y = -2t.$

Cvičenie 9. Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ktorá

- (a) prechádza bodom $(2, -4)$ a má smer $\mathbf{u} = (-3, -1)$,

- (b) má parametrické vyjadrenie $x = 5t$, $y = -8 + 4t$,
- (c) os x pretína v bode $(2, 0)$ a os y v bode $(0, -6)$
- (d) je rovnobežná s priamkou $7x - 3y + 5 = 0$ a prechádza bodom $(1, 1)$,
- (e) je kolmá na priamku $4x + 5y - 3 = 0$ a prechádza začiatkom súradnicovej sústavy.

Cvičenie 10. Nájdite parametrické vyjadrenie priamky:

- (a) $5x - 2y + 10 = 0$,
- (b) $x = 0$,
- (c) $y - 3 = 0$,
- (d) $x - y = 0$.

Vedeli by ste overiť správnosť výsledku?

Úloha 11. Vypočítajte obsah trojuholníka s vrcholmi $A = (-1, 1)$, $B = (3, -2)$ a $C = (2, 2)$.

stratégia:

- vzorec pre obsah trojuholníka
- dĺžku úsečky vypočítať vieme
- vypočítať vzdialenosť bodu od priamky: nájsť kolmý priemet bodu na priamku

Úloha 12. Nájdite stred a polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC , keď $A = (-10, 3)$, $B = (15, -2)$, $C = (-3, 10)$.

- stratégia 1: stred opísanej kružnice je v priesečníku osí strán
- stratégia 2: treba napísať rovnicu kružnice prechádzajúcej danými bodmi

Cvičenie 13. Aké súradnice majú priesečníky priamky p : $2x - 3y - 7 = 0$

- (a) so súradnicovými osami,
- (b) s priamkou q : $x - y + 1 = 0$,
- (c) s priamkou r : $x = 4 - t$, $y = 2 + t$?

Ktoré zo zadaní (b),(c) sa počítalo pohodlnejšie?

Úloha 14. Dané sú rovnice dvoch strán obdĺžnika: $5x + 2y - 7 = 0$, $5x + 2y - 36 = 0$ a rovnica jeho diagonály: $3x + 7y - 10 = 0$. Nájdite rovnice zvyšných strán a druhej diagonály.

3. PRIAMKA A ROVINA V $\mathbb{A}^3$

Cvičenie 15. Zistite, ktoré z bodov $A = (5, 8, 15)$, $B = (-1, -1, -3)$, $C = (5, 7, 1)$, $D = (0, \frac{1}{2}, 0)$, $E = (0, 0, 1)$ ležia na priamke $p = \{x_1 = 1 + 2t, x_2 = 2 + 3t, x_3 = 3 + 6t\}$.

Cvičenie 16. Zistite, či bod M leží v rovine $A + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, kde $A = (2, 2, 1)$, $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 3, 0)$:

- (a) $M = (6, 30, 13)$,
- (b) $M = (7, 17, 8)$,
- (c) $M = (7, 13, 8)$,
- (d) $M = (12, 32, 15)$.

Cvičenie 17. Nájdite parametrické vyjadrenie roviny v $\mathbb{A}^3$, ktorá

- (a) prechádza bodom $A = (1, 2, 3)$ a má smer $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ ($\mathbf{e}_i$ sú jednotkové súradnicové vektory),
- (b) prechádza bodom A a má smerové vektory $\mathbf{u} = (-5, 6, 4)$, $\mathbf{v} = (2, -1, 0)$,
- (c) prechádza bodmi $B = (3, 2, 1)$, $C = (1, -1, 0)$ a jej smer obsahuje smer y -osi,
- (d) prechádza bodom $M = (-1, 1, 1)$ a obsahuje y -os,
- (e) prechádza bodom $N = (-2, 3, 0)$ a obsahuje priamku p : $(x = 1, y = 2 + t, z = 2 - t)$,

- (f) prechádza priamkou $q: (x = 2 + 3t, y = -1 + 6t, z = 4t)$ a jej smer obsahuje smer priamky $r: (x = -1 + 2t, y = 3t, z = -t)$.

Cvičenie 18. Napíšte kanonické rovnice priamky a prepíšte ich do tvaru sústavy rovníc:

- (a) $x = 1 + 2t, y = 2 + 3t, z = 3 + 6t,$
 (a) $x = 8 + 3t, y = -3t, z = 1 + 2t.$

Úloha 19. Napíšte sústavy rovníc pre strany (priamky) trojuholníka, ktorého vrcholy sú priesečníky súradnicových osí s rovinou $\alpha: 5x + 6y + 3z - 2 = 0$. (V podstate netreba nič počítať.)

Cvičenie 20. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza priamkou

$$\begin{aligned} p: 2x + 3y - z + 5 &= 0 \\ 3x - 2y + 2z - 1 &= 0 \end{aligned}$$

a má smerový vektor

- (a) $\mathbf{u} = (1, 1, 1),$
 (a) $\mathbf{u} = (4, -7, -13).$

Cvičenie 21. Nájdite všeobecnú rovnicu roviny v $\mathbb{A}^2$:

$$\alpha: x = 1 - u + 2v, y = 2 + u + v, z = 1 + 2u - 3v.$$

Ako môžete overiť správnosť výsledku?

Úloha 22. Ukážte, že body $M = (-3, -3, 7), N = (-5, 2, 2)$ ležia v rovine určenej bodmi $A = (2, 1, 3), B = (2, 4, 0), C = (-3, 0, 4)$ a nájdite všeobecnú rovnicu priamky MN v afinnej súradnicovej sústave $\langle A, B - A, C - A \rangle$.

Cvičenie 23. Dokážte, že roviny

$$\begin{aligned} \alpha: x &= 1 + u - v, y = -u + 2v, z = u + v, \\ \beta: 3x + 2y - z - 3 &= 0 \end{aligned}$$

sú totožné, a že priamka

$$p: x = 2 + t, y = -1, z = 1 + 3t$$

leží v rovine α .

Cvičenie 24. Nájdite parametrické vyjadrenie priamky, ktorá leží v rovine

$$\alpha: x + 2y - z + 1 = 0$$

a pretína priamky

$$\begin{aligned} p: x &= 1 + t, y = t, z = 4t, \\ q: 3x + y + z - 11 &= 0, x + z - 3 = 0. \end{aligned}$$