

LINEÁRNA ALGEBRA A GEOMETRIA 3

Ospravedlňujem sa, že sa mi nepodarilo prísť na prednášku v ráno 5.12. Bohužiaľ kvôli nehode niekde na Lafranconi bola na diaľnici kolóna až po Stupavu, a tak mi cesta do práce trvala skoro o dve hodiny dlhšie než zvyčajne.

Čo sa týka materiálu, rada by som uzavrela tému lineárnych variet. Ostávajú už iba dve prednášky, a tie by som chcela venovať kvadratickým útvarom, čo sú v rovine kuželosečky. Preto pripájam zvyšok k lineárnym varietám (je tam i nejaký prekryv s poslednou prednáškou, pre úplnosť) aj s nejakými príkladmi na počítanie. K vzdialenostiam je najnáročnejšou časťou vedieť spočítať vzdialenosť dvoch mimobežných priamok v $\mathbb{E}^3$. Pri uhloch stačí vedieť narábať s uhlami priamok v rovine (aj keď teóriu máte pre úplnosť uvedenú všeobecnejšie).

Budúci týždeň na prednáške by sme sa pozreli na príklady, ktoré Vám robili problém, a prešli by sme na kuželosečky.

1. LINEÁRNE VARIETY

1.1. Vzdialenosť lineárnych variet.

Definícia 1.1. *Vzdialenosť lineárnych variet α, β je vzdialenosť množín ich bodov*

$$|\alpha\beta| = \inf\{|XY| \mid X \in \alpha, Y \in \beta\}.$$

Nasledujúce tvrdenia ukazujú, že v definícii vzdialenosti lineárnych variet sa infimum naozaj nadobúda, t.j. že existujú body $A \in \alpha$, $B \in \beta$ také, že $|\alpha\beta| = |AB|$.

Tvrdenie 1.2. $|A\alpha| = |AA_\alpha^\perp|$.

Dôkaz. $X \in \alpha$ ľubovoľný, potom $X - A = (X - A_\alpha^\perp) + (A_\alpha^\perp - A)$, a teda z kolmosti

$$|X - A|^2 = \dots = |X - A_\alpha^\perp|^2 + |A_\alpha^\perp - A|^2,$$

čiže $|AX| \geq |AA_\alpha^\perp|$. □

Výpočet vzdialenosti bodu A od lineárnej variety α :

- (1) nájdeme $A_\alpha^\perp$,
- (2) vypočítame $|AA_\alpha^\perp|$.

Špeciálny prípad, keď α je nadrovina, sme odvodili na prednáške:

Tvrdenie 1.3. *Nech $P = (p_1, \dots, p_n)$ a α je nadrovina daná všeobecne $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 = 0$. Potom*

$$|P\alpha| = \frac{|a_1p_1 + \dots + a_np_n + a_0|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Úloha 1. Na priamke $p: x_1 + x_2 - 8 = 0$ nájdite také body, ktoré sú rovnako vzdialené od bodu $P = (2, 8)$ i od priamky $q: x_1 - 3x_2 + 2 = 0$.

Úloha 2. Určte množinu všetkých bodov X , pre ktoré $|Xp| = 3|Xq|$, ak $p: x + y - 1 = 0$, $q: 2x - y + 2 = 0$.

Úloha 3. Určte všeobecné rovnice dotyčníc zostrojených ku kružnici $k(S, r)$ zo začiatku súradnicovej sústavy, ak $S = (3, -2)$ a $r = 1$.

Úloha 4. Dané sú body $A = (0, 3)$, $B = (6, 4)$, $C = (-4, 0)$. Napíšte všeobecnú rovnicu priamky p , ktorá obsahuje bod C a má rovnakú vzdialenosť od bodov A a B .

Ohľadne vzdialenosti netriviálnych (t.j. rôznych od bodu a rôznych od celého priestoru) disjunktných variet chceme znovu ukázať, že existujú body A, B také, že

$$A \in \alpha, B \in \beta, |\alpha\beta| = |AB|.$$

Definícia 1.4. *Priečka lineárnych variet α, β , kde $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ je priamka určená bodmi $A \in \alpha, B \in \beta$ takými, že $|\alpha\beta| = |AB|$.*

Teda priečka je presne priamka prechádzajúca hľadanými bodmi. Stále však treba ukázať, že priečka naozaj existuje. To vyplýva z nasledujúceho tvrdenia.

Veta 1.5. *Nech α, β sú disjunktné variety a nech $A \in \alpha, B \in \beta$. Body A, B určujú priečku α, β práve vtedy, keď $B - A \in (V_\alpha + V_\beta)^\perp$.*

Dôkaz. “ $\Leftarrow$ ”: Nech $B - A \perp V(\alpha)$ a tiež $B - A \perp V(\beta)$. Nech $X \in \alpha$ ľubovoľný aj $Y \in \beta$ ľubovoľný. Potom $Y - X = (Y - B) + (B - A) + (A - X)$ a odtiaľ

$$|X - Y|^2 = (Y - X)(Y - X) = \dots = |B - A|^2 + |_{nieco}|^2 \geq |B - A|^2$$

“ $\Rightarrow$ ”: Nech $B - A \notin (V(\alpha) + V(\beta))^\perp$, napríklad nech $B - A \notin V(\alpha)^\perp$. Nech $B^\perp = B_\alpha^\perp$. Potom $(B - A) = (B - B^\perp) + (B^\perp - A)$ a odtiaľ $|B - A|^2 > |B - B^\perp|^2$, čiže AB nebola priečka. $\square$

Špeciálny prípad: vzdialenosť rovnobežných variet: každým bodom menšej variety vieme viesť priečku:

$$\alpha \parallel \beta, \dim \alpha \leq \dim \beta \Rightarrow V(\alpha) \subset V(\beta) \Rightarrow V(\alpha)^\perp \supset V(\beta)^\perp \Rightarrow (V(\alpha) + V(\beta))^\perp = V(\alpha)^\perp$$

Teda vzdialenosť môžeme nájsť:

- (1) $A \in \alpha$ – ľubovoľný
- (2) $B = A_\beta^\perp$
- (3) $|\alpha\beta| = |AB|$, lebo AB je priečka ($B - A \perp V(\beta) \Rightarrow B - A \perp V(\alpha)$).

Úloha 5. Dokážte, že priamka p : $x_1 = 0$, $x_2 = 1 + t$, $x_3 = 3 - 2t$, $x_4 = 2t$ je rovnobežná s rovinou α : $x_1 = 1 + u + v$, $x_2 = u$, $x_3 = -1 - 2u$, $x_4 = u - v$ a vypočítajte $|p\alpha|$.

Špeciálny prípad, keď α, β sú rovnobežné nadroviny:

Tvrdenie 1.6. *Nech α : $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 = 0$ a β : $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b_0 = 0$. Potom*

$$|\alpha\beta| = \frac{|a_0 - b_0|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Úloha 6. Dokážte práve vyslovené tvrdenie. (Počítajte vzdialenosť daných nadrovín podobne ako sme sa prednáške odvodzovali vzorec pre vzdialenosť bodu od nadroviny.)

Vzdialenosť mimobežných priamok $p = P + \langle \mathbf{u} \rangle, q = Q + \langle \mathbf{v} \rangle \subset \mathbb{E}^3$:

postup nájdením priečky:

- (1) $\beta = P + \langle [\mathbf{u}] + [\mathbf{u}, \mathbf{v}]^\perp \rangle$,
- (2) $B = \beta \cap q$,
- (3) $A \in p \dots$
- (4) $|pq| = |AB|$.

postup redukciou na rovnobežné variety:

- (1) $\alpha = P + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$,

$$(2) |pq| = |Q\alpha|.$$

Úloha 7. Vypočítajte vzdialenosť mimobežiek: $p: x = 2 + t, y = -1 - t, z = t$, $q: y - 3 = 0, x + 2z - 4 = 0$ ($\sqrt{14}$)

1.2. Uhol lineárnych variet.

Definícia 1.7. Nech $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sú vektory. Uhol vektorov $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ je také číslo $\varphi \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \langle 0, \Pi \rangle$, pre ktoré platí

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}.$$

Zo Schwartzovej nerovnosti máme, že $-1 \leq \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} \leq 1$, takže naozaj existuje φ spĺňajúce danú rovnosť. Ďalej, keďže funkcia $\cos$ je prostá na intervale $\langle 0, \Pi \rangle$ je takéto φ jediné.

Uhol lineárnych variet si budeme definovať len v špeciálnych prípadoch:

- priamka – priamka
- priamka – lineárna varieta
- nadrovina – nadrovina

Uhol lineárnych variet, napríklad dvoch priamok, bude číslo, nie časť roviny.

Definícia 1.8. Nech $p = A + \langle \mathbf{u} \rangle$, $q = B + \langle \mathbf{v} \rangle$. Potom uhol priamok p, q je také číslo φ , že

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}.$$

Teda uhol dvoch priamok je v intervale $\langle 0, \Pi/2 \rangle$

Úloha 8. Určte všeobecnú rovnicu priamky p priestoru $\mathbb{E}^2$, ktorá obsahuje bod $M = (2, 1)$ a jej uhol s osou $\vec{x}$ je $\pi/4$.

Úloha 9. Lúč svetla sa pohybuje po priamke $p: x - 2y + 5 = 0$. Napíšte rovnicu priamky q , po ktorej sa lúč pohybuje po odraze od priamky $r: 3x - 2y + 7 = 0$ a určite bod odrazu M .

Úloha 10. V priestore $\mathbb{E}^2$ sú dané body $A = (3, 3)$ a $B = (0, 2)$. Na priamke $p: x_1 + x_2 - 4 = 0$ nájdite taký bod (body), z ktorého vidieť úsečku AB pod uhlom $\pi/4$.

Definícia 1.9. Nech $\alpha: a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 = 0$, $\beta: b_1x_1 + \dots + b_nx_n + b_0 = 0$ sú nadroviny. Potom ich uhol je také číslo φ , že

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|},$$

kde $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ sú ich normálové vektory.

Uhol nadrovín je zhodný s uhlom priamok, ktoré sú na tieto nadroviny kolmé.

Definovať uhol priamky s ľubovoľnou lineárnou varietou je už trochu komplikovanejšie:

Definícia 1.10. Nech $M \subset \mathbb{A}^n$ je ľubovoľná množina a nech $\alpha \subset \mathbb{A}^n$ je lineárna varieta. Ortogónalnym priemetom množiny M do lin var α rozumieme množinu $M^\perp = \{A^\perp \mid A \in \alpha\}$.

Tvrdenie 1.11. Nech p je priamka a α nech je lineárna varieta. Potom priemetom p do α je buď bod (ak $p \perp \alpha$) alebo priamka (inak).

Dôkaz. Nech $p \perp \alpha$. Nech $P \in p$ a nech $P^\perp$ je jeho kolmý priemet do α , t.j. $P = \alpha \cap \Pi_\alpha^\perp(P)$. Nech $X \in p$ je ľubovoľný bod na priamke p . Potom $X \in \Pi_\alpha^\perp(P)$, a preto $\Pi_\alpha^\perp(X) = \Pi_\alpha^\perp(P)$, a preto $X^\perp = P^\perp$, t.j. všetky body priamky p sa premietnu do jedného bodu na α .

Nech $p \not\perp \alpha$. Definujme si

$$\Pi_\alpha^\perp(p) = p \sqcup \Pi_\alpha^\perp(P), \text{ kde } P \in p.$$

Potom $\dim \Pi_\alpha^\perp(p) = 1 + \dim \Pi_\alpha^\perp(P)$. Keďže $V(\Pi_\alpha^\perp(p)) + V(\alpha) = V(\mathbb{A}^n)$, tak $\Pi_\alpha^\perp(p) \cap \alpha$ je priamka, označíme ju $p^\perp$. Platí, že ak $X \in p$, tak $X^\perp \in p^\perp$ a naopak ak $Y \in p^\perp$, tak existuje $X \in p$ taký, že $Y = X^\perp$. $\square$

Definícia 1.12. Nech p je priamka a α je lineárna varieta. Potom uhol p a α definujeme ako uhol p a $p^\perp$, kde $p^\perp$ je ortogonálny priemet p do α .

Úloha 11. (Záverečná, nesúvisí s uhlami.) Nájdite obdĺžnik, ktorý pri danej dĺžke uhlopriečky bude mať najväčší obsah. (Postupovať môžete napríklad tak, že si zavediete si súradnicovú kde jeden koncový bod uhlopriečky leží v začiatku a druhý na kladnej časti x -osi.)

KAGDM FMFI UK BRATISLAVA

E-mail address: `jana.chalmovianska@fmph.uniba.sk`