9. Úlohy na 5. a 6.12.

Komplexné čísla

87. Nájdite všetky komplexné čísla z také, že $z^3 + 1 = 0$. Úlohu riešte (a) geometricky, (b) algebraicky.

Axióma rovnobežnosti

88. Ukážte, že ak v Hilbertovej rovine (t.j. v rovine, kde platia axiómy incidencie, usporiadania a zhodnosti) platí axióma rovnobežnosti, potom je súčet vnútorných uhlov trojuholníka rovný dvom pravým uhlom. (Dôkaz by ste mali poznať zo strednej školy, prípadne sa inšpirujte: Euklides I.32.)

Dokazovanie v incidenčnej geometrii

Konečná projektívna rovina je taký model konečnej incidenčnej geometrie (t.j. geometrie s konečným počtom bodov), v ktorom má každá priamka aspoň tri body a každé dve priamky sa pretnú.

89. Nech p a q sú dve rôzne priamky v konečnej projektívnej rovine. Ukážte, že existuje bod B taký, že $B \notin p$, $B \notin q$.

90. Ukážte, že v konečnej projektívnej rovine má každá priamka rovnaký počet bodov. (Nápoveda: pomocou bodu $B \notin p \cup q$ premietnite body priamky p na body priamky q.)

Dokazovanie v usporiadanej rovine

91. Ukážte, že vnútro trojuholníka je neprázdne.

92. Nech $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ sú polpriamky neležiace na jednej priamke a nech C, E sú body na ramenách uhla $\angle BAD$ také, že $A * B * C$ a $A * D * E$. Ukážte, že úsečka CE nepretína úsečku BD.

Konštrukčné úlohy

93. Dané sú dva rôzne body A, B neležiace na danej priamke p. Zostrojte bod X na priamke p, pre ktorý je:

(a) súčet dĺžok úsečiek $|AX| + |BX|$ najmenší,
(b) rozdiel dĺžok úsečiek $|AX| - |BX|$ najväčší, ak B je bližšie k p ako A.

94. Nech A a je vnútorný bod ostrého konvexného uhla. Na ramenách tohto uhla nájdite body B, C tak, aby obvod trojuholníka ABC bol minimálny.

95. Dané sú dve rovnobežné priamky a, b a priamka c s nimi rôznobežná. Zostrojte všetky štvorce $ABCD$, ktorých vrcholy sú $A \in a$, $B, D \in b$ a $C \in c$.

96. Na základni AB ľubovoľného rovnoramenného trojuholníka ABC nájdite bod L, pre ktorý je súčet jeho vzdialeností od priamok $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BC}$ minimálny. (Nápoveda: uvažujte súmernosť podľa stredu AB.)

97. Nájdite množinu bodov M, ktorých

(a) súčet
(b) rozdiel

vzdialeností od dvoch daných rôznobežných priamok p, q je rovný danej konštante a.

98. Dané sú tri rôzne priamky o_1, o_2, o_3 prechádzajúce bodom O a na jednej z nich je daný bod $A \neq O$. Zostrojte trojuholník ABC, pre ktorý sú dané priamky osami vnútorných uhlov. (Nápoveda: uvažujte súmernosti podľa osí uhlov.)

99. Dané sú tri priamky s_1, s_2, s_3 prechádzajúce bodom S a na jednej z nich je daný bod A_1. Zostrojte trojuholník ABC, pre ktorý je A_1 stredom strany BC a priamky s_i sú osami jeho strán. (Nápoveda: uvažujte súmernosti podľa osí strán.)