7. Úlohy na 21. a 22.11.

Axiómy zhodnosti

62. Dokážte tvrdenie o odčitovaní uhlov:
Nech $\overrightarrow{BD}$ leží medzi $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$ a nech $\overrightarrow{B'D'}$ leží medzi $\overrightarrow{B'A'}$ a $\overrightarrow{B'C'}$. Ak $\angle ABD \cong \angle A'B'D'$ a $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, potom $\angle DBC \cong \angle D'B'C'$.

63. Dokážte tvrdenie o porovnávaní uhlov:
Nech $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$. Potom pre každú $\overrightarrow{BD}$ medzi $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$ existuje práve jedna $\overrightarrow{B'D'}$ medzi $\overrightarrow{B'A'}$ a $\overrightarrow{B'C'}$, že $\angle ABD \cong \angle A'B'D'$.

64. Dokážte tvrdenie o usporiadaní uhlov:
Relácia $<$ pre dvojice uhlov má nasledovné vlastnosti:

(i) trichotómia: pre ľubovoľné dva uhly $\angle ABC, \angle DEF$ platí práve jedna z podmienok: $\angle ABC < \angle DEF$, $\angle DEF < \angle ABC$, $\angle ABC \cong \angle DEF$,
(ii) tranzitívnosť: ak $\angle ABC < \angle DEF$ a $\angle DEF < \angle GHI$, potom $\angle ABC < \angle GHI$.

Teda $<$ je usporiadanie.

Nasleduje (zadania 65 až 69) dokazovanie štandardných tvrdení geometrie základnej a strednej školy. V každom z nich samozrejme môžte podľa potreby využívať aj predchádzajúce (ideálne už dokázané) tvrdenia.

65. Dokážte vetu uus o zhodnosti trojuholníkov:
Ak pre trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ platí, že $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ a $AC \cong A'C'$, potom sú tieto trojuholníky zhodné. (Nápoveda: postupuje sa podobne ako pri dôkazoch sus a usu. V tomto prípade v $\triangle ABC$ uvažujte na polpriamke $\overrightarrow{AB}$ bod B'', pre ktorý $AB'' \cong A'B'$.)

66. Dokončite dôkaz existencie jediného stredu úsečky. (*Stred úsečky* AB je bod S na priamke $\overleftrightarrow{AB}$, pre ktorý $AS \cong BS$. Na prednáške sme ukázali, že S leží medzi A a B.) (Nápoveda: pre jednoznačnosť uvažujte usporiadanie $A * S_1 * S_2$ a $S_1 * S_2 * B$ na priamke $\overleftrightarrow{AB}$, vyargumentujte, že nejde o ujmu na všeobecnosti. Pre existenciu nech $C \notin \overleftrightarrow{AB}$, nech D je taký bod v polrovine opačnej k $\overrightarrow{ABC}$, že $\angle ABD \cong \angle BAC$ a $BD \cong AC$. Uvažujte priesečník CD s $\overleftrightarrow{AB}$ a skúmajte trojuholníky, ktoré Vám týmto vzniknú.)

67. Polpriamka $\overrightarrow{BD}$ medzi polpriamkami $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$ uhla $\angle ABC$ je *osou uhla* $\angle ABC$, ak $\angle ABD \cong \angle DBC$.

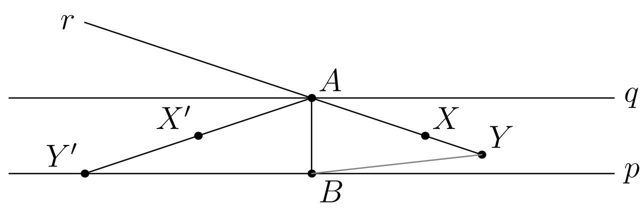
Ukážte, že každý uhol má práve jednu os. (Treba ukázať jednoznačnosť aj existenciu. Pri dôkaze jednoznačnosti sa môžte inšpirovať v dôkaze štvrtého Euklidovho postulátu.)

68. Ukážte, že v trojuholníku je protiľahlý uhol k väčšej strane väčší ako protiľahlý uhol k menšej strane. Inak: ak v $\triangle ABC$ platí $AB > AC$, potom $\angle C > \angle B$. (Nápoveda: na strane AB nájdite bod D tak, že $AD \cong AC$ a skúmajte okrem $\triangle ABC$ aj $\triangle ADC$.)

69. Dokážte trojuholníkovú nerovnosť. Presnejšie, ak v $\triangle ABC$ na polpriamke opačnej k $\overrightarrow{CA}$ zostrojíme bod D tak, že $CD \cong BC$, potom $AD > AB$.

70. Nájdite slabé miesto v Legendrovom „dôkaze” tvrdenia, že každým bodom neležiacim na danej priamke prechádza jediná rovnobežka s danou priamkou (ide o „dôkaz” z prednášky na začiatku semestra):

(1) Daná je priamka p a bod A na nej neležiaci.
(2) Veďme bodom A kolmicu na priamku p, pretne ju v bode B.
(3) Nech q je priamka prechádzajúca bodom A a kolmá na priamku $\overleftrightarrow{AB}$.
(4) Potom $q \parallel p$.
(5) Nech r je iná priamka prechádzajúca bodom A, $r \neq q$. Ukážeme, že priamka r pretína priamku p.
(6) Nech $\overrightarrow{AX}$ je polpriamka na r ležiaca na tej istej strane od q ako bod B.
(7) Nech X' je bod na opačnej strane $\overleftrightarrow{AB}$ ako X taký, že $\angle BAX' \cong \angle BAX$.
(8) Potom B leží vo vnútri uhla XAX'.
(9) Keďže p prechádza bodom B, pretína aspoň jedno z ramien tohto uhla.
(10) Ak p pretína $\overrightarrow{AX}$, tak p pretína r, a teda $r \nparallel p$, hotovo.
(11) Nech teda p nepretína $\overrightarrow{AX}$ a pretína $\overrightarrow{AX'}$ v bode Y'.
(12) Nech Y je bod na $\overrightarrow{AX}$ taký, že $AY \cong AY'$.
(13) Potom $\triangle BAY \cong \triangle BAY'$ (sus),
(14) teda uhol ABY je pravý,
(15) čiže je Y je priesečník priamok r a p.



71. Zostrojte $\triangle ABC$, ak sú dané: veľkosť uhla $\angle A$, veľkosť uhla $\angle B$ a dĺžka strany AC. Úlohu riešte s využitím podobnosti trojuholníkov.

72. Zostrojte $\triangle ABC$, ak sú dané: veľkosť uhla $\angle A$, veľkosť uhla $\angle B$ a dĺžka strany AC. Úlohu riešte s využitím obvodového a stredového uhla nad tetivou kružnice.