6. Úlohy na 7. a 8.11.

Axiómy usporiadania

46. (Paschova veta) Nech $A * B * C$ a $B * C * D$. Potom $A * B * D$ a $A * C * D$. Dokážte.

47. Ak $A * B * C$, potom $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. Dokážte.

Množina bodov $\mathcal{M}$ sa nazýva *konvexnou*, ak pre každú dvojicu bodov $A, B \in \mathcal{M}$ platí, že celá úsečka AB leží v množine $\mathcal{M}$.

48. Ukážte, že úsečka je konvexná množina.

49. Na prednáške sme videli, že separačná vlastnosť na priamke je dôsledkom vety:
„Nech $A * B * C$ a $A * C * D$. Potom $B * C * D$ aj $A * B * D$."
Ukážte, že aj naopak táto veta je dôsledkom separačnej vlastnosti na priamke, teda ide (za predpokladu I1,I2,I3, U1,U2,U3, bez použitia U4!) o ekvivalentné tvrdenia.

50. Ukážte, že separačná vlastnosť v rovine (U4S) je ekvivalentná Paschovej axióme. (Na prednáške sme si ukázali, že z U4P vyplýva U4S. Treba ešte ukázať, že za predpokladov I1-3, U1-3 z U4S vyplýva U4P.)

51. Na množine $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ s aritmetikou modulo 5 nech

$$a * b * c \text{ práve vtedy, keď } b = \frac{a + c}{2}.$$

Overte, že napriek tomu, že ide o konečnú množinu, takto definovaná relácia usporiadania spĺňa axiómy U1,U2,U3.

52. Vynechajme z bodov algebraického modelu $\mathbb{R}^2$ body na y-osi, a z priamok vynecháme y-os. Ktoré z axióm usporiadania táto geometria spĺňa?

53. Nech D leží vnútri $\angle ABC$. Ukážte, že všetky body polpriamky $\overrightarrow{BD}$ okrem bodu B sú vnútornými bodmi $\angle ABC$.

54. Ukážte, že vnútro uhla je konvexná množina.

55. (náročný a nepovinný) Ukážte, že vnútro trojuholníka neobsahuje priamku. Inak sformulované: ak D je vnútorný bod $\triangle ABC$, tak každá priamka prechádzajúca bodom D musí pretínať hranicu $\triangle ABC$.