5. Úlohy na 24. a 25.10

Axiómy usporiadania

38. Pre ľubovoľné dva rôzne body A, B platí: $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}$. Dokážte.

39. Na prednáške sme pomocou Paschovej axiómy čiastočne dokázali separačnú vlastnosť v rovine (U4S), ktorá znela nasledovne:

Pre priamku p a body A, B, C neležiace na tejto priamke platí:

(i) Ak A a B ležia na tej istej strane od priamky p a B a C ležia na tej istej strane od priamky p, potom aj A a C ležia na tej istej strane od priamky p.
(ii) Ak A a B ležia na opačných stranách od priamky p a B a C ležia na opačných stranách od priamky p, potom A a C ležia na tej istej strane od priamky p.
(iii) Ak A a B ležia na opačných stranách od priamky p a B a C ležia na tej istej strane od priamky p, potom A a C ležia na opačných stranách od priamky p.

Doplňte dôkaz tejto vety, čiže:

(a) overte, že tvrdenie (iii) je dôsledkom tvrdení (i) a (ii);
(b) presvedčte sa, že veta platí, ak $A = B$ alebo $A = C$ alebo $B = C$;
(c) vychádzajúc z faktu, že veta je dokázaná pre prípad, keď A, B a C sú nekolineárne, ukážte, že tvrdenie (ii) platí aj keď A, B a C sú rôzne kolineárne body.

40. Nech $A * B * C$ a $A * C * D$, potom $A * B * D$. (Nápoveda: na prednáške sme už ukázali, že za daných predpokladov platí $B*C*D$. Pre dôkaz $A*B*D$ uvažujte priamku $\overleftrightarrow{XB}$.)

Apollóniove úlohy

Predmetom Apollóniovej úlohy je konštrukcia kružnice, ktorá sa dotýka daných troch kružníc. Úloha sa môže modifikovať tak, že jedna alebo viac zo zadaných kružníc je nahradená priamkou (čiže akoby kružnicou s nekonečným polomerom), pričom hľadaná kružnica sa má tejto priamky dotýkať, alebo je nahradená bodom (čiže akoby kružnicou s nulovým polomerom), a hľadaná kružnica má týmto bodom prechádzať.

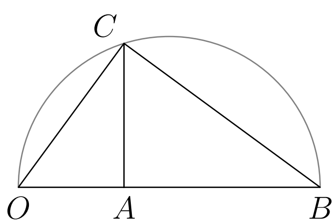
41. Vyriešte Apollóniovu úlohu bod-bod-bod, t.j. skonštruujte kružnicu, ktorá prechádza troma danými navzájom rôznymi bodmi.

42. Vyriešte Apollóniovu úlohu priamka-priamka-priamka, t.j. skonštruujte kružnicu, ktorá sa dotýka troch daných navzájom rôznych priamok.

43. (Geometrická konštrukcia odmocniny.) Nech C je bod na Tálesovej kružnici nad priemerom OB a nech A je päta kolmice z bodu C na priemer OB. Ukážte, že

$$|OA|.|OB| = |OC|^2.$$

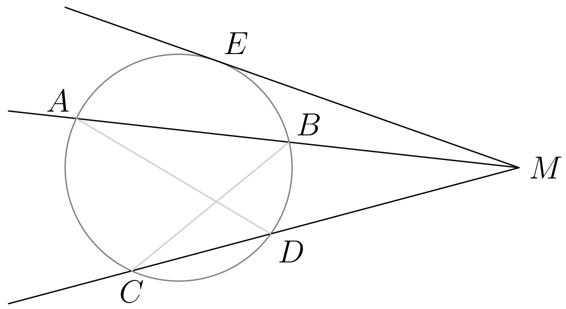
(Nápoveda: využite podobnosť trojuholníkov.)



44. (Mocnosť bodu ku kružnici.) Nech k je kružnica, M je bod zvonka kružnice, nech p je sečnica kružnice k prechádzajúca cez M s priesečníkmi A a B, nech q je sečnica kružnice k prechádzajúca cez M s priesečníkmi C a D, a nech r je dotyčnica ku kružnici k prechádzajúca cez M s bodom dotyku E. Ukážte, že

$$|AM|.|BM| = |CM|.|DM| = |EM|^2.$$

(Nápoveda: pre dôkaz prvej rovnosti využijete podobnosť trojuholníkov, pre dôkaz druhej rovnosti využijete Tálesovu a Pytagorovu vetu v trojuholníku nad priemerom kružnice k.)



45. Vyriešte Apollóniovu úlohu bod-bod-priamka, t.j. skonštruujte kružnicu, ktorá prechádza danými dvoma rôznymi bodmi a dotýka sa danej priamky. (Nápoveda: využite úlohy 43 a 44.)

Dôkazy v časti o Apollóniových úlohách robte s využitím stredoškolskej geometrie (teda nechoďte až na úroveň Hilbertových axióm).

Riešenie vo všetkých Apollóniových úlohách má obsahovať náčrt s rozborom vo všeobecnom prípade, postup konštrukcie aj diskusiu (čiže podmienky riešiteľnosti vzhľadom na vstupné dáta, prípadne i počet riešení, nezabudnite prediskutovať aj riešenia v špeciálnych prípadoch).