4. Úlohy na 18.10

Modely incidenčnej geometrie

29. Ukážte, že axiómy incidencie sú navzájom nezávislé, čiže pre každú dvojicu axióm nájdite reprezentáciu, ktorá tieto dve axiómy spĺňa, a pritom nespĺňa tretiu axiómu.

30. Vieme už, že existuje len jeden trojbodový model incidenčnej geometrie, až na izomorfizmus. Platí to isté pre štvorbodové modely? Ak áno, ukážte. Ak nie, nájdite dva štvorbodové modely, ktoré nie sú izomorfné.

31. Zistite, či duálna geometria k štvorbodovej geometrii z prednášky (kompletný graf so štyrmi vrcholmi) je modelom incidenčnej geometrie.

32. Za akých podmienok je duálna geometria k incidenčnému modelu tiež modelom incidenčnej geometrie? Svoje tvrdenie dokážte.

33. Uvažujme takúto interpretáciu pojmov "bod", "priamka" a "incidencia":

- "bod" je priamka v trojrozmernom priestore,
- "priamka" je rovina v trojrozmernom priestore,
- "bod leží na priamke", keď zodpovedajúca priamka leží v zodpovedajúcej rovine.

Je to model incidenčnej geometrie?

34. Uvažujme interpretáciu pojmov "bod", "priamka" a "incidencia" ako v predchádzajúcom prípade, ale pracovať budeme len s priamkami a rovinami prechádzajúcimi daným pevne zvoleným bodom.

- Je to model incidenčnej geometrie?
- Porovnajte ho so sférou so stotožnenými dvojicami protiľahlých bodov.

Relácia ekvivalencie

Binárna relácia R na množine M je podmnožina kartézskeho súčinu $M \times M$ (t.j. $R \subset M \times M$). Ak $(a, b) \in R$, píšeme často tiež $a\,R\,b$.

Binárna relácia $\sim$ sa nazýva *ekvivalenciou* (tiež *reláciou ekvivalencie*), ak je

- reflexívna: $a \sim a$ pre všetky $a \in M$,
- symetrická: ak $a \sim b$, potom $b \sim a$ pre všetky $a, b \in M$,
- a tranzitívna: ak $a \sim b$ a $b \sim c$, potom $a \sim c$ pre všetky $a, b, c \in M$.

Ak je na množine M definovaná relácia ekvivalencie $\sim$, potom pre ľubovoľné $a \in M$ budeme označovať

$$[a] = \{b \in M \mid a \sim b\}$$

a nazývať túto množinu *triedou ekvivalencie.*

35. Nech je na množine M definovaná relácia ekvivalencie $\sim$.

(a) Ukážte, že ak $a \sim b$, potom $[a] = [b]$.
(b) Ukážte, že ak $a \not\sim b$, potom $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Čiže triedy ekvivalencie sú rozkladom množiny M na disjunktné podmnožiny.

36. Na prednáške sme videli, že ak v modeli platí Euklidov postulát o rovnobežnosti, je v ňom rozšírená rovnobežnosť (rovnobežnosť zahŕňajúca aj totožnosť) reláciou ekvivalencie. Uvažujme tak isto definovanú reláciu v päťbodovej geometrii z prednášky (kompletný graf s piatimi vrcholmi). Je v tomto modeli rozšírená rovnobežnosť reláciou ekvivalencie? Svoje tvrdenie zdôvodnite. Ak ide o ekvivalenciu, čo sú triedy ekvivalencie?

37. Na množine $\mathbb{Z}$ celých čísel uvažujme nasledovnú reláciu:

$$a \sim b \quad \text{práve vtedy, keď} \quad 3|(b-a).$$

Je takto definovaná relácia ekvivalenciou? Svoje tvrdenie zdôvodnite. Ak ide o ekvivalenciu, čo sú triedy ekvivalencie?