2. Úlohy na 4.10

Uhly nad tetivou kružnice

13. Pomocou cvičenia 12 ukážte: Ak je $\triangle ABC$ pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C, potom všetky jeho vrcholy ležia na kružnici, ktorej priemerom je strana AB.

14. Dokážte opačnú implikáciu k cvičeniu 13, ktorá je známa ako Tálesova veta:
Ak AB je priemerom kružnice k a C je ľubovoľný bod na kružnici k rôzny od bodov A a B, potom je $\angle ACB$ pravý uhol. (Tip: uvažujte rovnoramenné trojuholníky $\triangle ASC$ a $\triangle BSC$, kde S je stred AB.)

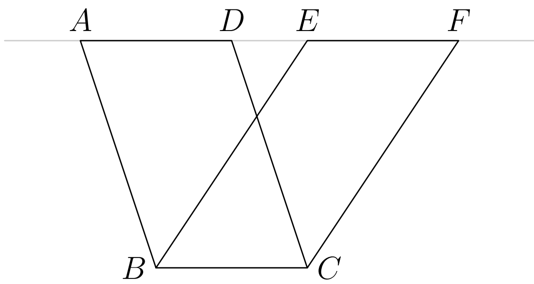
15. Ukážte, že nad tetivou je stredový uhol dvojnásobok obvodového. Presnejšie: Nech k je kružnica so stredom S a nech AB je tetiva kružnice k rôzna od priemeru. Nech bod C ($C \neq A, C \neq B$) sa nachádza na kružnici k na tej istej strane od priamky $\overleftrightarrow{AB}$ ako stred S kružnice k. Potom veľkosť $\angle ASB$ (stredový uhol) je dvojnásobkom veľkosti $\angle ACB$ (obvodový uhol). (Tip: uvažujte rovnoramenné trojuholníky $\triangle ASC$ a $\triangle BSC$, kde S je stred kružnice k. Musíte zvlášť vyšetriť tri prípady:

- stred S leží vnútri trojuholníka ABC,
- stred S leží na úsečke AC alebo BC,
- stred S leží zvonka trojuholníka ABC).

16. Ukážte, že ak AB a CD sú zhodné tetivy tej istej kružnice, potom vrcholový uhol nad AB je zhodný s vrcholovým uhlom nad CD. (Tip: ukážte zhodnosť stredových uhlov.)

Pytagorova veta

17. Nech v rovnobežníkoch $ABCD$ a $EBCF$ ležia strany AD a EF na spoločnej priamke. Ukážte (geometricky!), že rovnobežníky $ABCD$ a $EBCF$ majú rovnaký obsah (ukážete zhodnosť trojuholníkov $\triangle EAB$ a $\triangle FDC$ a použijete vhodné Euklidove axiómy. Viď tiež Euklides I.35). Dôsledkom je tvrdenie o obsahoch trojuholníkov nad spoločnou stranou, sformulujte ho.



18. Naštudujte si Euklidov dôkaz Pytagorovej vety (Euklides I.47). Buďte pripravení vysvetliť ho pred tabuľou.

Konštrukcia pravidelného päťuholníka

19. Do danej kružnice vpíšte trojuholník podobný danému rovnoramennému trojuholníku. (Dva trojuholníky sú podobné, ak sa zhodujú v zodpovedajúcich uhloch.)

20. Overte, že nasledovným postupom skonštruujeme zlatý rez danej úsečky (Eulides II.11):

Daná je úsečka AB (obrázok dole vľavo).

(1) Bodom A vedieme kolmicu p k priamke $\overleftrightarrow{AB}$.
(2) Na priamke p zostrojíme bod E tak, že $|AE| = \frac{1}{2}|AB|$.
(3) Na polpriamke $\overrightarrow{EA}$ zostrojíme bod F tak, že $EF \cong EB$.
(4) Na úsečke AB zostrojíme bod H tak, že $AH \cong AF$.
(5) H je bod deliaci úsečku AB v zlatom pomere.

Je viacero postupov, ako zdôvodniť správnosť konštrukcie. Jednoduchý algebraický (ale „neeuklidovský") dôkaz: výpočtami s dĺžkami úsečiek overte, že

$$|AH| : |HB| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Euklidov (čisto geometrický) dôkaz: na obrázku dole vpravo sú $AHGF$ a $ABDC$ štvorce. Potrebujete ukázať, že obsah obdĺžnika $KDBH$ je zhodný s obsahom štvorca $AHGF$. K tomu budete musieť ukázať, že obsah obdĺžnika $CKGF$ spolu s obsahom štvorca nad AE je rovný obsahu štvorca nad EF, a tiež využijete Pytagorovu vetu.