3. Axiómy usporiadania

PRÍKLAD 3.1. Chceli by sme ukázať, že uhly pri základni AB rovnoramenného trojuholníka ABC sú zhodné.

- Zostrojíme os $\angle ACB$.
- Nech D je jej priesečník so základňou AB.
- Ukážeme, že $\triangle ADC$ a $\triangle BDC$ sú zhodné.

Odkiaľ vieme, že os $\angle ACB$ naozaj pretne priamku $\overleftrightarrow{AB}$? A ak ju aj pretne, odkiaľ vieme, že sa tak stane medzi bodmi A a B?

Teóriu o relácii usporiadania bodov vypracoval Moritz Pasch, od neho ju David Hilbert prebral do svojich Grundlagen.

Nedefinované pojmy:

- usporiadanie bodov: "bod B leží medzi bodmi A a C", zápis $A * B * C$.

Axiómy:

U1: Ak B leží medzi A a C, potom A, B, C sú tri rôzne kolineárne body a platí tiež, že B leží medzi C a A.

U2: Pre ľubovoľné navzájom rôzne body A a C existujú body B a D tak, že $A * B * C$ a $A * C * D$.

U3: Pre ľubovoľné tri navzájom rôzne kolineárne body práve jeden z nich leží medzi zvyšnými dvoma.

U4P: (O chvíľu, treba ešte dodefinovať úsečku, aby sa nám axióma ľahšie formulovala.)

DEFINÍCIA 3.2. Nech $A \neq B$. *Úsečka AB* sú body X také, že $A * X * B$, spolu s bodmi A a B. Body A, B sú *koncové body úsečky.*

Axióma:

U4P: **(Paschova axióma, 1882)** Nech priamka p neprechádza žiadnym z nekolineárnych bodov A, B, C. Ak p pretína úsečku AB, potom pretína buď úsečku AC alebo úsečku BC.

Pasch si všimol (Vorlesungen über neuere Geometrie, 1882), že tvrdenie U4P Euklides používa bez dôkazu.

DEFINÍCIA 3.3. Nech $A \neq B$. *Polpriamka $\overrightarrow{AB}$* pozostáva z bodov úsečky AB a bodov X takých, že $A * B * X$.

TVRDENIE 3.4. *Pre ľubovoľné dva rôzne body A, B platí:*

(a) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$,
(b) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}$.

Dôkaz. (a)

- Z definície polpriamky máme $AB \subset \overrightarrow{AB}$, to isté pre druhú polpriamku.
- Preto $AB \subset \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$.
- Pre opačnú inklúciu nech teraz $C \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$.
- Ak $C = A$ alebo $C = B$, dokazovaná inklúzia platí.
- Nech teda $C \neq A$, $C \neq B$. Z definície polpriamky $\overrightarrow{AB}$ tak musí platiť $A * C * B$ alebo $A * B * C$.
- Podobne keďže aj $C \in \overrightarrow{BA}$, tak musí platiť $B * C * A$ alebo $B * A * C$.
- Z axiómy U3 potom máme, že $C \in AB$.

(b) Cvičenie. □

DEFINÍCIA 3.5. Body A, B ležia *na tej istej strane* od danej priamky, ak $A = B$ alebo ak $A \neq B$ a úsečka AB túto priamku nepretína. (Tento pojem je potrebný k pôvodnej verzii Euklidovej axiómy o rovnobežkách.) Body A, B ležia *na opačných stranách* od danej priamky, ak úsečka AB túto priamku pretína, t.j. ak na tejto priamke existuje bod X tak, že $A * X * B$.

VETA 3.6 (**separačná vlastnosť v rovine, U4S**). *Ľubovoľná priamka p delí rovinu okrem bodov priamky p na dve triedy tak, že body ležia v tej istej triede práve vtedy, keď ležia na tej istej strane od priamky p. (t.j. neexistuje bod $X \in p$ taký, že $A * X * B$, kde A a B sú dané body.)*

Pre pohodlnejšiu prácu si separačnú vlastnosť na priamke "rozmeníme na drobné". Iná formulácia toho istého tvrdenia:

VETA 3.7 (**separačná vlastnosť v rovine, U4S**). *Pre priamku p a body A, B, C neležiace na tejto priamke platí:*

(i) *Ak A a B ležia na tej istej strane od priamky p a B a C ležia na tej istej strane od priamky p, potom aj A a C ležia na tej istej strane od priamky p.*
(ii) *Ak A a B ležia na opačných stranách od priamky p a B a C ležia na opačných stranách od priamky p, potom A a C ležia na tej istej strane od priamky p.*
(iii) *Ak A a B ležia na opačných stranách od priamky p a B a C ležia na tej istej strane od priamky p, potom aj A a C ležia na opačných stranách od priamky p.*

Dôkaz ekvivalencie Viet 3.6 a 3.7. Tvrdenie (iii) Vety 3.6 je dôsledkom jej tvrdení (i) a (ii). Stačí teda pracovať s časťami (i) a (ii).

Z Definície 3.5 vyplýva, že pre danú priamku je „ležať na tej istej strane" relácia na množine všetkých bodov okrem bodov tejto priamky, pričom táto relácia je reflexívna a symetrická.

Veta 3.6: „ležať na tej istej strane" je relácia ekvivalencie, ktorá rozkladná body roviny okrem bodov na danej priamke na dve triedy.

Veta 3.7: „ležať na tej istej strane" je relácia, ktorá je symetrická, reflexívna a tranzitívna a rozkladá rovinu (okrem p) na maximálne dve triedy.

Pre dôkaz ekvivalencie potrebujeme preto ukázať len to, že dve triedy existujú:

- nech $O \in p$ (I2)
- a nech $A \notin p$ (dôsledok I3).

- Potom $[A]$ je jedna trieda ekvivalencie.
- Nech B je bod, že $A * O * B$ (U2).
- Potom A a B neležia na tej istej strane od p, čiže nie sú ekvivalentné,
- a teda $[B]$ je druhá trieda ekvivalencie.

$\square$

Dôkaz Vety 3.7. Ľahko sa presvedčíme, že ak niektoré z bodov A, B, C splývajú, separačná vlastnosť na priamke platí. Predpokladajme teda, že body A, B a C sú navzájom rôzne. Najprv uvažujme prípad, že tieto body sú aj nekolineárne.

(i) Nech A, B ležia na tej istej strane od p a tiež nech B, C ležia na tej istej strane od p. Ak by A a C ležali na opačných stranách od p, potom by podľa U4P musela priamka p preťať aj úsečku AB alebo úsečku BC, čo je spor s predpokladom. Preto A a C ležia na tej istej strane od p.

(ii) Nech A a B ležia na opačných stranách od priamky p a nech aj B a C ležia na opačných stranách od priamky p. Podľa U4P potom priamka p nepretína úsečku AC, a teda A a C ležia na tej istej strane od p.

Nech teraz sú A, B, C rôzne kolineárne body. Nech napríklad A a B ležia na tej istej strane od priamky p a aj B, C ležia na tej istej strane od p. Nech bod $D \notin p$ leží na tej istej strane ako A a nie je kolineárny s bodmi A, B, C. (Existuje: nech $X \in p$ je taký, že $X \notin \overleftrightarrow{AB}$ (I2), a nech D je taký, že $A * D * X$ (U2).) Potom B je na tej istej strane ako D ((i) pre nekolineárne body A, B, D), C je na tej istej strane ako D ((i) pre nekolineárne body B, C, D) a C je na tej istej strane ako A ((i) pre nekolineárne body A, C, D).

Posledný prípad podobne (cvičenie). $\square$

Definícia 3.8. *Polrovina* s *hranicou* p je priamka p spolu s jednou z tried určených touto priamkou podľa separačnej vlastnosti v rovine. Podrobnejšie, pre priamku $p = \overleftrightarrow{AB}$ a bod C neležiaci na tejto priamke je polrovina $\overrightarrow{pC} = \overrightarrow{ABC}$ množina bodov X takých, že C a X ležia na tej istej strane od priamky p (*vnútorné body polroviny*) spolu s bodmi priamky p (*hranica polroviny*).

Teraz chceme ukázať priamkovú analógiu separačnej vlastnosti v rovine, a síce, že bod na priamke túto delí na dve polpriamky.

Veta 3.9. *Nech $A * B * C$ a $A * C * D$. Potom $B * C * D$ aj $A * B * D$.*

Dôkaz. Pomocou separačnej vlastnosti v rovine: podobne ako v dôkaze U4S (Veta 3.7) treba vyliezť do roviny, von z priamky, aby sme dokázali tvrdenie o bodoch na priamke!

Ak $A * B * C$ a $A * C * D$, potom $B \neq D$, inak by sme sa dostali do sporu s U3. Preto A, B, C, D sú určite štyri rôzne kolineárne body (U1).

- Nech X je bod neležiaci na tejto priamke (I3).
- Úsečka AD pretína priamku $\overleftrightarrow{XC}$,
- teda body A a D ležia v opačných polrovinách od $\overleftrightarrow{XC}$.
- Body A a B musia byť na tej istej strane od $\overleftrightarrow{XC}$. (Sporom: ak by boli na opačných, potom úsečka AB by pretínala úsečku EC, priesečník je nutne bod C, teda $A * C * B$, spor s predpokladom.)

- Odtiaľ B, D sú na opačných stranách od $\overleftrightarrow{XC}$, čiže $B * C * D$.

Podobne (aj s využitím práve ukázaného $B * C * D$) sa ukáže, že $A * B * D$ (cvičenie). □

DÔSLEDOK. *Na každej priamke leží nekonečne veľa bodov.*

Dôkaz.

- Nech A, B ležia na danej priamke, $A \neq B$ (I1).
- Nech X_1 je bod, že $A * X_1 * B$ (U2). Zrejme $X_1 \neq A, X_1 \neq B$ (U1).
- Nech X_2 je bod, že $X_1 * X_2 * B$ (U2). Zrejme $X_2 \neq X_1, X_2 \neq B$ (U1). Podľa Vety 3.9 potom $A * X_2 * B$, teda $X_2 \neq A$.

Rovnakým spôsobom pokračujeme ďalej v konštruovaní ďalších bodov a dokazovaní, že novo skonštruovaný bod je rôzny od všetkých doterajších:

- (indukčný predpoklad) Nech pre doteraz skoštruované body $X_1, X_2, \dots, X_n$ platí $X_i * X_j * B$ $(i < j)$ a $A * X_i * B$.
- Nech X_{n+1} je bod, že $X_n * X_{n+1} * B$ (U2). Potom z indukčného predpokladu pomocou Vety 3.9 dostávame tiež, že $X_i * X_{n+1} * B$ a $A * X_{n+1} * B$, teda X_{n+1} je rôzny od všetkých doposiaľ skonštruovaných bodov.

□

PRÍKLAD 3.10. Dôsledkom separačnej vlastnosti na priamke je tvrdenie, že priamka obsahuje nekonečne veľa bodov. Z axióm U1, U2 a U3 nekonečnosť ešte nevyplýva! Uvažujme napríklad množinu $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ s aritmetikou modulo 5. Ak definujeme

$$a * b * c \text{ práve vtedy, keď } b = \frac{a+c}{2},$$

tak axiómy U1,U2,U3 sú splnené. Poučenie: treba si dať veľký pozor na vyhlásenia, ktoré sa nám zdajú samozrejmé, lebo v skutočnosti nemusia byť ani pravdivé!

O nasledovnom tvrdení Pasch ukázal, že sa nedá odvodiť z Euklidových postulátov:

VETA 3.11 (**Paschova**). *Nech $A * B * C$ a $B * C * D$. Potom $A * B * D$ a $A * C * D$.*

Dôkaz. Ukazuje sa podobne ako Veta 3.9. Cvičenie. □

TVRDENIE 3.12 (**separačná vlastnosť na priamke, U***). *Nech $A * B * C$ sú body na priamke p. Potom každý bod $X \in p$, $X \neq B$ buď $X \in \overrightarrow{BA}$ alebo $X \in \overrightarrow{BC}$.*

Inak sformulované: ak $A * B * C$ sú body na priamke p, potom $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC} = B$ a $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC} = p$.

Dôkaz.

- Pre polohu bodu X vzhľadom na A, B máme možnosti: $X = A$, $X * A * B$, $A * X * B$ a $A * B * X$.
- Prvé tri možnosti znamenajú, že $X \in \overrightarrow{BA}$ – hotovo.

(1) Nech $X \notin \overrightarrow{BA}$, teda platí $A * B * X$.

- Ak $X = C$, potom $X \in \overrightarrow{BC}$ – hotovo.
- Nech teda $X \neq C$, nastáva potom práve jedna z možností $B * C * X$, $B * X * C$ alebo $X * B * C$.

- Prvé dve možnosti znamenajú, že $X \in \overrightarrow{BC}$ – hotovo.

(2) Nech teda $X * B * C$.
- Pre body A, C, X platí práve jedna z možností $A*C*X$, $A*X*C$, $X*A*C$.
- Prvá možnosť spolu s $C*B*X$ (2) implikuje $A*C*B$, spor s predpokladom.
- Druhá možnosť spolu s $X*B*C$ (2) implikuje $A*X*B$, spor s (1).
- Tretia možnosť spolu s $X*B*A$ (1) implikuje $B*A*C$, spor s predpokladom.

$\square$

Preformulovanie separačnej vlastnosti na priamke:

TVRDENIE 3.13 (**separačná vlastnosť na priamke, U***). *Každý bod B na priamke p rozdeľuje ostatné body tejto priamky na dve triedy tak, že dva body X a Y neležia v tej istej triede práve vtedy, keď $X * B * Y$.)*

Tvrdenia 3.12 a 3.13 sú za predpokladov I1-3, U1-3 ekvivalentné.

POZNÁMKA 3.14. Separačná vlastnosť na priamke je dôležitá tým, že vďaka nej vieme body na priamke lineárne usporiadať.

DEFINÍCIA 3.15. *Opačná polpriamka* k danej polpriamke $\overrightarrow{AB}$: nech $C*A*B$, potom opačnou polpriamkou k $\overrightarrow{AB}$ je $\overrightarrow{AC}$.

3.1. Modifikácia axióm usporiadania. Platí, že separačná vlastnosť v rovine (U4S) je (za predpokladu platnosti axióm I1-3, U1-3) ekvivalentná Paschovej axióme.

Vidíme, že axiómy U1, U2, U3 a U4P sú ekvivalentné axiómam U1, U2, U3 a U4S.

Platí, že separačná vlastnosť na priamke (U*) je (za predpokladu platnosti axióm I1-3, U1-3) ekvivalentná Vete 3.9.

Separačná vlastnosť na priamke je odvoditeľná zo separačnej vlastnosti v rovine, a je naozaj slabšia, čiže zo separačnej vlastnosti na priamke sa nedá odvodiť U4S. Existujú geometrie, ktoré nespĺňajú U4, ale separačnú vlastnosť na priamke spĺňajú.

Niektorí autori, ktorí namiesto U4P používajú U4S, uvádzajú ako axiómu aj separačnú vlastnosť na priamke, práve kvôli jej významnosti, aj keď ide v skutočnosti o tvrdenie, ktoré sa dá odvodiť z I1-3, U1-4. Sada axióm usporiadania vtedy vyzerá nasledovne: U1, U2, U3, U*, U4S.

Hilbert mal medzi svojimi axiómami usporiadnia pôvodne uvedenú aj nasledovnú, o ktorej sa však tiež neskôr ukázalo, že je to v skutočnosti tvrdenie:

TVRDENIE 3.16 (**Hilbertova vynechaná axióma**). *Ľubovoľné štyri rôzne kolineárne body je možné označiť A, B, C, D tak, že platí $A*B*C$, $A*B*D$, $A*C*D$ a $B*C*D$.*

Toto tvrdenie je tiež ekvivalentné separačnej vlastnosti v rovine.

V prípade, že model spĺňa axiómy I1-3, U1-4, hovoríme, že ide o *usporiadanú rovinu.*

3.2. Modely axióm incidencie a usporiadania.

PRÍKLAD 3.17. Konečné geometrie už nevyhovujú (Dôsledok Vety 3.9).

Príklad 3.18. Projektívna rovina s pôvodným (prirodzeným) usporiadaním bodov nie je model usporiadanej roviny, lebo priamky v nej sú kružnice.

Projektívna rovina však môže byť modelom axióm incidencie a usporiadania, ak vhodne predefinujeme usporiadanie na priamke. (Oswald Veblen: A system of axioms for geometry, 1904(?), Early Journal Content on JSTOR, Free to Anyone in the World)

Príklad 3.19. Model bez U4S: trojrozmerná geometria. U* je splnená.

Príklad 3.20. Model bez U4S: *Dyadické racionálne čísla* sú čísla tvaru $a/2^n$, kde $a, n \in \mathbb{Z}$. Pozor, netvoria pole! Nech $\mathbf{D}$ sú všetky dyadické čísla, teda $\mathbb{Z} \subset \mathbf{D} \subset \mathbb{Q}$. Model: body: $\mathbf{D}^2$. Priamky uvažujeme len tie, ktoré prechádzajú cez dva dyadické body.

Axiómy usporiadania: Ak A, B sú body, potom

- $((a_1 + b_1)/2, (a_2 + b_2)/2 \in \mathbf{D}^2$ leží medzi A a B.
- $(2a_1 - b_1, 2a_2 - b_2)$ je bod z druhej strany od A než B.

Separačná vlastnosť na priamke platí. Paschova axióma neplatí: pre trojuholník s vrcholmi $(1, 0), (-1, 0), (0, 1)$ priamka $y = 2x$ žiadnym z vrcholov neprechádza a pretína len jednu stranu.

U* je splnená.

Príklad 3.21. Model usporiadanej roviny: nekonečný pás $(0, 1) \times \mathbb{R}$. Je to iný model ako $\mathbb{R}^2$ (neizomorfný): niektoré priamky majú viac rovnobežiek prechádzajúcich daným bodom.

Príklad 3.22. Model usporiadanej roviny: Moultonova rovina (Forest Ray Moulton, 1872–1952, americký astronóm). Množina bodov je $\mathbb{R}^2$, priamky sú troch druhov:

- priamky (a), kde $a \in \mathbb{R}$ sú tie isté ako priamky v $\mathbb{R}^2$ s rovnicou $x = a$, teda (p_1, p_2) leží na priamke, ak $p_1 = a$,
- priamky (k, q), kde $k, q \in \mathbb{R}$ a $k \geq 0$ sú tie isté ako priamky v $\mathbb{R}^2$ s rovnicou $y = kx + q$, teda (p_1, p_2) leží na priamke, ak $p_2 = kp_1 + q$,
- priamky (k, q), kde $k, q \in \mathbb{R}$ a $k < 0$ sú „zlomené”: bod (p_1, p_2) leží na priamke, ak
  - $p_1 < 0$ a $p_2 = kp_1 + q$ alebo
  - $p_1 \geq 0$ a $p_2 = 2kp_1 + q$.

3.3. Uhol.

Definícia 3.23. Nech A, B, C sú nekolieárne body. Potom polpriamky $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{BC}$ tvoria *uhol* pri *vrchole* B. Označujeme ho $\angle ABC$, $\angle CBA$, $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})$, $\angle(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a})$ prípadne aj $\angle B$, pokiaľ je z kontextu jasné, ktorými polpriamkami je určený. Polpriamky $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ nazývame *ramenami* uhla.

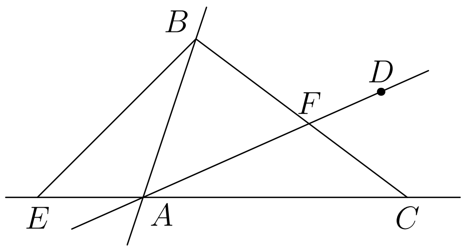
Vnútro uhla (vnútorné body uhla) $\angle ABC$ je prienik vnútorných bodov polroviny $\overrightarrow{BCA}$ (t.j. bodov ležiacich na tej istej strane od $\overleftrightarrow{BC}$ ako bod A) s vnútornými bodmi bodmi polroviny $\overrightarrow{BAC}$ (t.j. bodmi ležiacimi na tej istej strane od $\overleftrightarrow{AB}$ ako bod C).

Vonkajšok uhla (vonkajšie body uhla) $\angle ABC$ sú všetky body roviny okrem polpriamok $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ a vnútra $\angle ABC$.

Poznámka 3.24. Ak polpriamky $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}$ spolu tvoria priamku, t.j. sú navzájom opačné, nazýva sa toto na strednej škole priamy uhol. My pod pojmom *uhol* budeme vždy myslieť uhol, ktorý nie je priamy.

Tak isto pojmy konvexný resp. nekonvexný uhol nebudeme používať, my sa budeme baviť o uhle spolu s jeho vnútrom resp. vonkajškom.

Veta 3.25 (**crossbar theorem, veta o priečke uhla(?)**). *Nech D je vnútorný bod uhla $\angle BAC$. Potom polpriamka $\overrightarrow{AD}$ pretína úsečku BC.*



Dôkaz. Nech E leží na polpriamke opačnej k $\overrightarrow{AC}$, t.j. $E*A*C$. Pomocou Paschovej vety aplikovanej na $\triangle ECB$ ukážeme, že priamka $\overleftrightarrow{AD}$ pretína úsečku BC.

- Priamka $\overleftrightarrow{AD}$ neprechádza bodmi E ani C (lebo $E*A*C$)
- a ani bodom B (inak by $\overleftrightarrow{AD} = \overleftrightarrow{AB}$, a teda D by nebol vnútorným bodom $\angle BAC$).
- Keďže $\overleftrightarrow{AD}$ pretína EC, z Paschovej axiómy pretína práve jednu z úsečiek BE a BC. Ukážeme, že $\overleftrightarrow{AD}$ úsečku BE nepretína.
- Poloha vzhľadom na $\overleftrightarrow{AB}$:
  - Všetky body úsečky BE okrem bodu B ležia na tej istej strane od $\overleftrightarrow{AB}$.
  - Keďže bod C leží na opačnej strane od $\overleftrightarrow{AB}$ ako E (z konštrukcie E),
  - ležia všetky body úsečky BE okrem B na opačnej strane od $\overleftrightarrow{AB}$ ako C.
  - Ďalej všetky body $\overrightarrow{AD}$ okrem bodu A ležia zas na tej istej strane od AB ako bod C.
  - Odtiaľ vidíme, že úsečka BE nepretína polpriamku $\overrightarrow{AD}$.
- Poloha vzhľadom na $\overleftrightarrow{AC}$:
  - Všetky body úsečky BE okrem bodu E ležia na tej istej strane od $\overleftrightarrow{AC}$ ako bod B.
  - Naopak, body polpriamky opačnej k $\overrightarrow{AD}$ okrem bodu A ležia na opačnej strane od $\overleftrightarrow{AC}$ ako bod B,
  - čiže BE nepretína polpriamku opačnú k $\overrightarrow{AD}$.
- Preto $\overleftrightarrow{AD}$ nepretína úsečku BE.
- Preto z Paschovej axiómy $\overleftrightarrow{AD}$ pretína úsečku BC, priesečník označme F.

Treba ešte ukázať, že priesečník F leží na polpriamke $\overrightarrow{AD}$.

- Body F a D ležia na tej istej strane od $\overleftrightarrow{AC}$ (oba sú na tej istej strane ako B),
- teda buď $F = D$ alebo pre priesečník A priamok $\overleftrightarrow{FD}$ a $\overleftrightarrow{AC}$ platí buď $A*F*D$ alebo $A*D*F$,
- v každom prípade F leží na $\overrightarrow{AD}$.

□

Poznámka 3.26. Pozor, v predcházdajúcej vete sme nedokázali, že každý bod polpriamky $\overrightarrow{AD}$ je jej priesečníkom s úsečkou, ktorej koncové body ležia na ramenách uhla! Kontrapríklad sa dá nájsť v modeli z Príkladu 3.21.

3.4. Trojuholník.

Definícia 3.27. Nech A, B, C sú nekolineárne body. Potom tieto body určujú *trojuholník* ABC, ozn. $\triangle ABC$. Jednotlivé úsečky sú *strany* $\triangle ABC$, body A, B, C sú jeho *vrcholy.* Vrcholy a strany tvoria spolu *hranicu* $\triangle ABC$. Body, ktoré sú zároveň vnútornými bodmi $\overrightarrow{ABC}$, vnútornými bodmi $\overrightarrow{BCA}$ a vnútornými bodmi $\overrightarrow{CAB}$, sa nazývajú *vnútornými bodmi* alebo *vnútrom* $\triangle ABC$, a body, ktoré neležia ani na hranici ani vnútri $\triangle ABC$, sú *vonkajšími bodmi* alebo *vonkajškom* $\triangle ABC$.