5. Axióma rovnobežnosti

VETA 5.1. *(Euklides I.27) Nech p a p' sú dve priamky a nech t je priamka, ktorá ich obe pretína v bodoch B a B'. Nech $A * B * C$ ležia na p a $A' * B' * C'$ na p' tak, že A a A' ležia na tej istej strane od transverzály t. Ak $\angle ABB' \cong \angle C'B'B$ (tzv.* striedavé uhly*), potom p a p' sú rovnobežné.*

Dôkaz. Vyplýva z Vety 4.21. □

DÔSLEDOK. *Nech bod B neleží na priamke p. Potom existuje priamka q taká, že $q \ni B$ a $q \parallel p$.*

Dôkaz. Spojíme B s ľubovoľným bodom na priamke p, máme tak novú priamku t. Následne skonštruujeme priamku q tak, aby striedavé uhly pri priamkach p a q s transverzálnou t boli rovnaké (Z4). Rovnobežnosť p a q vyplýva z vety.

(Populárny je aj postup v dôkaze cez cez spúšťanie kolmice, viď napr. Legendre) □

Existenciu rovnobežky sme ukázali z ostatných axióm, teda postulovať stačí jednoznačnosť.

R: **(Playfairova axióma)** Pre každú priamku p a pre každý bod B neležiaci na tejto priamke existuje práve (najviac) jedna priamka q prechádzajúca bodom B rovnobežná s priamkou p (ozn. $p \parallel q$).

PRÍKLAD 5.2. Modely Hilbertovej roviny (teda modely axióm incidencie, usporiadania a zhodnosti) nespĺňajúce axiómu rovnobežnosti:

- Beltramiho-Kleinov model (bodmi sú body otvoreného disku, t.j. vnútorné body kruhu, priamkami sú tetivy, zhodnosť úsečiek aj uhlov je vhodne zadefinovaná),
- Poincarého model (bodmi sú body otvoreného disku, priamkami sú kružnicové oblúky v disku kolmé na jeho hranicu, zhodnosť úsečiek aj uhlov je vhodne zadefinovaná),
- pseudosféra, t.j. regulárna plocha s konštantnou zápornou Gaussovou krivosťou.

Existencia týchto modelov dokazuje, že axióma rovnobežnosti je nezávislá od predchádzajúcich axióm, čiže jej platnosť sa nedá ukázať.

Euklidov piaty postulát znel:

E5: A keď priamka pretínajúca dve priamky tvorí s nimi na jednej strane vnútorné uhly menšie než dva pravé, pretnú sa tieto priamky neohraničene predĺžené na tej strane, kde súčet uhlov je menší než dva pravé.

TVRDENIE 5.3. *$R \Leftrightarrow E5$ (za predpokladu platnosti ostatných axióm).*

Dôkaz. R $\Rightarrow$ E5:

- Majme $\overleftrightarrow{AB}$ a nech $\overrightarrow{AX}$ a $\overrightarrow{BY}$ sú polpriamky na tej istej strane od $\overleftrightarrow{AB}$ také, že $\angle XAB + \angle ABY < \pi$ (predpoklad).
- Nech $\angle ABZ$ je susedný k $\angle ABY$, teda $\angle ABZ + \angle ABY = \pi$.

- Potom $\angle XAB < \pi - \angle ABY = \angle ABZ$.
- Existuje jediná polpriamka $\overrightarrow{AW}$ na tej istej strane od $\overleftrightarrow{AB}$ ako $\overrightarrow{AX}$ taká, že $\angle BAW \cong \angle ABZ$.
- Potom $\overleftrightarrow{AW} \parallel \overleftrightarrow{BY}$ (Veta 5.1).
- Keďže $\overleftrightarrow{AX} \neq \overleftrightarrow{AW}$, tak $\overleftrightarrow{AX}$ pretína $\overleftrightarrow{BY}$ (R), označme priesečník C. Potrebujeme ešte ukázať, že C leží na tej strane od $\overleftrightarrow{AB}$ ako body X a Y.
- Ak by C ležal na polpriamke opačnej k $\overrightarrow{AX}$, potom by v $\triangle ABC$ bol vonkajší uhol pri A menší ako vnútorný uhol pri B, čo je spor,
- preto $C = \overrightarrow{AX} \cap \overrightarrow{BY}$.

E5 $\Rightarrow$ R (porovnajte s Legendrovým „dôkazom" Euklidovho postulátu):

- Nech bod Q neleží na priamke p.
- Veďme bodom Q kolmicu t na p, priesečník nech je P,
- a potom tiež bodom Q kolmicu q na t.
- Potom $p \parallel q$, inak by sme mali trojuholník s dvoma pravými uhlami, čo je v spore s vetou o vonkajšom uhle trojuholníka.
- Nech n je ľubovoľná iná priamka cez Q
- a nech X je bod na priamke n ležiaci na tej istej strane od q ako P.
- Nech $Y \in p$ je na tej istej strane od $\overleftrightarrow{PQ}$ ako X.
- Potom $\angle PQX < \pi/2$ a teda $\angle QPY + \angle PQX < \pi$,
- preto sa priamky p a q pretnú (E5).

□

VETA 5.4. *Súčet vnútorných uhlov trojuholníka je rovný dvom pravým uhlom.*

Dôkaz. Cvičenie. □

POZNÁMKA 5.5. Toto tvrdenie je ekvivalentné axióme rovnobežnosti.