KAPITOLA 1

Axiomatická výstavba geometrie

1. Pred Euklidom

Mnoho storočí pred naším letopočtom: návody na výpočet, bez vysvetlenia, overené skúsenosťou, že fungujú. Niektoré správne, niektoré nie.

Egypťania: pokročilí v geometrii, správne vedeli vypočítať objem zrezaného ihlana so štvorcovou podstavou (veď pyramídy, zrátať si materiál). Babylon, India, Čína...

Grécko: filozofia: dialektika = umenie správnej argumentácie. Možno (?) vlyv na matematiku:

cca 600 pr.n.l: Táles: priniesol matematiku z Egypta do Grécka. "Argumentujme poriadne aj v matematike." Pracuje s abstraktnými objektami (úsečky, priamky). Pripisujú sa mu dôkazy viacerých tvrdení (uhly pri základni rovnoramenného trojuholníka sú zhodné, vrcholové uhly sú zhodné, Tálesova veta, ...)

Tvrdenia a dôkazy sú typické pre starogrécku matematiku... prvá revolúcia v matematike.

cca 550 - 500 pr.n.l: Pytagoras a pytagorejci - prvá teória čísel (kladné racionálne), plus niečo ako numerológia. Matematika sa začína pestovať ako umenie, nielen kvôli praktickým výpočtom.

cca 400 pr.n.l.: Platón a jeho Akadémia (filozofická škola). Geometria má významné postavenie, jej znalosť sa vyžaduje od všetkých v Akadémii, lebo:

- svet myšlienok je dôležitejší než materiálny svet poznávaný zmyslami,
- geometria trénuje myseľ,
- vďaka vytrénovanej mysli môžme korigovať, v čom nás zmysly klamú.

V Platónovej Akadémii boli aj matematici (najvýznamnejší Eudoxus? - z astronómie urobil matematiku), ktorí začali matematiku axiomatizovať.

cca 300 pr.n.l.: Euklides: Základy.

2. Geometria podľa Euklida

"Pane, niet kráľovskej cesty ku geometrii"

Euklides
(Odpoveď na žiadosť Ptolamaia I. vysvetliť mu svoje *Základy* rýchlo a ľahko.)

Euklidove Základy v 13 zväzkoch obsahujú súhrn vtedajšieho poznania o rovinnej geometrii, priestorovej geometrii a teórii čísel. Na geometrii je vystavaná celá matematika (geometrická algebra). Žiadne aplikácie, napriek tomu, že existovali (mechanika, optika, astronómia...), len čistá matematika. Originál sa nezachoval, poznáme ich z arabských prekladov (15.stor. – prvý preklad z arabčiny), odvtedy vychádzali stále dookola, štandard pre výučbu geometrie.

Príklad 2.1. Konštrukcia pravidelného šesťuholníka. Vyargumentovať správnosť konštrukcie:

- päť strán rovných polomeru, treba ukázať že aj šiesta,
- lebo plný uhol je dvakrát priamy,
- lebo súčet uhlov trojuholníka je priamy uhol,
- lebo súhlasné uhly sú zhodné
- lebo ...? kam až ísť?

Axiomatická metóda: pojmy a tvrdenia.

Pojmy: objekty/vlastnosti v geometrii sa definujú pomocou jednoduchších. Príklad: pre definíciu pravého uhla potrebujeme: priamka, polpriamka, susedné uhly, zhodnosť uhlov.

Najdôležitejšia definícia syntetickej rovinnej geometrie (bude platiť pre celý semester):

Definícia 2.2. Dve priamky sa nazývajú *rovnobežnými (rovnobežkami)*, ak nemajú spoločný bod.

Tvrdenia: ukážeme, že dokazované tvrdenie vyplýva z iného tvrdenia, ktoré už považujeme za pravdivé.

Potrebujeme teda:

- *základné objekty*, ktoré nedefinujeme, ale napriek tomu o nich panuje konsenzus, že čo to je,
- *axiómy, postuláty*, ktorých pravdivosť sa nespochybňuje,
- *pravidlá logiky*, t.j. dohodu, čo znamená odvodiť z jedného tvrdenia iné tvrdenie.

Prvé štyri definície Základov:

- *Bod* je to, čo nemá žiadne časti.
- *Priamka (čiara?)* je dĺžka bez šírky.
- Konce čiar sú body.
- Priamka je v každom svojom bode rovnaká.

V dnešnom chápaní matematiky tieto charakterizácie priamky a bodu nedávajú zmysel. Asi to nie je snaha o definíciu, lebo už sa vedelo, že nejaké pojmy musia byť nedefinované. Už v časoch Euklida totiž tieto “definície” nevyhovovali vtedajším štandardom. Ide len o snahu v náznakoch popísať, čo si má čitateľ pod daným pojmom predstaviť. V skutočnosti sa predpokladá, že každý čitateľ/poslucháč vie, čo si má pod týmito pojmami predstaviť. Sám Euklides sa na tieto “definície” neskôr vôbec neodkazuje.

Základné tvrdenia (postuláty) rovinnej geometrie:

E1: Od ktoréhokoľvek bodu ku ktorémukoľvek bodu možno viesť priamku.

E2: A priamku možno neohraničene na obe strany predĺžiť.
E3: A z akéhokoľvek bodu a akýmkoľvek polomerom možno narysovať kružnicu.
E4: A každé dva pravé uhly sú navzájom zhodné.
E5: A keď priamka pretínajúca dve priamky tvorí s nimi na jednej strane vnútorné uhly menšie než dva pravé, pretnú sa tieto priamky neohraničene predĺžené na tej strane, kde súčet uhlov je menší než dva pravé.

Explicitne sa postuluje len existencia konštruovaných objektov, v skutočnosti Euklides mlčky predpokladá aj jednoznačnosť a využíva ju v dôkazoch. Preto neskoršie komentáre zahŕňajú aj jednoznačnosť.

Za postulátmi nasledujú všeobecné pojmy – axiómy:

(1) Ak sa dve rovnajú tretiemu, rovnajú sa aj navzájom.
(2) A ak sa rovným pridá rovné, sú aj celky rovné.
(3) A ak sa od rovných odnímu rovné, sú aj celky rovné.
(4) A útvary, ktoré sa (pohybom?) stotožňujú, sú navzájom rovné.
(5) A celok je väčší ako časť.

(byť rovný... mať rovnakú mieru? dĺžku, veľkosť, obsah...) Niekedy sa uvádza viac axióm (k nerovným pričítať rovné, dvojnásobky a polovice rovných sú rovné).

Druhý postulát hovorí, že každú úsečku možno ľubovoľne predĺžiť, podľa potreby. Postulát hovorí o potenciálnom nekonečne. Grécka matematika neuznáva aktuálne nekonečno! Trvalo veľmi dlho, kým sa matematici zmierili s pojmom nekonečna.

Tretí postulát by sme dnes už vynechali a na charakterizáciu kružnice (t.j. množiny bodov spĺňajúcej nejakú vlastnosť) by sme sa už odkázali do teórie množín.

Prvé tri postuláty sú viac-menej pokynmi ku konštrukcii:

- Narysovať priamku prechádzajúcu dvoma danými bodmi.
- Ľubovoľne predĺžiť úsečku.
- Narysovať kružnicu s daným stredom a polomerom.

Pri formulovaní ďalších postulátov by sa patrilo dodefinovať nové pojmy:

- K štvrtému postulátu "byť zhodný", polpriamku, opačné polpriamky, susedné uhly, pravý uhol.
- K piatemu postulátu "ležať na jednej strane"... čo je to "ležať na jednej strane"?

Moderná verzia piateho postulátu:

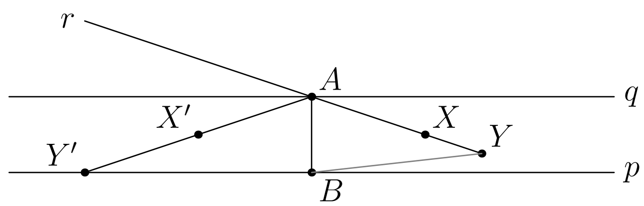
E5: Pre danú priamku a daný bod neležiaci na tejto priamke existuje práve jedna priamka prechádzajúca týmto bodom, ktorá je rovnobežná so zadanou priamkou.

Prvé štyri postuláty popisujú skúsenosť z rysovania. Piaty sa svojou komplikovanosťou od nich výrazne líši. (Treba priamky predlžovať, aby sme si overili, že axióma je naozaj pravdivá - dokedy ich predlžovať?) Sám Euklides sa jej vo svojich dôkazoch vyhýbal, pokiaľ to len šlo. Kvôli svojej komplikovanosti (nie je až taká jednoduchá a zrejmá ako ostatné) sa matematici nejakú dobu (asi 2000 rokov) snažili piaty postulát dokázať z predchádzajúcich alebo ju aspoň nahradiť niečím jednoduchším, zjavnejším. Neúspešne.

Príklad 2.3. Adrien-Marie Legendre (1752-1833) – jeden z najlepších matematikov svojho času. Publikoval asi 20 pokusov o dôkaz piateho Euklidovho postulátu. Toto je jeden z nich:

Daná je priamka p a bod A na nej neležiaci. Veďme bodom A kolmicu na priamku p, pretne ju v bode B. Nech q je priamka prechádzajúca bodom A a kolmá na priamku $\overleftrightarrow{AB}$. Potom $q \parallel p$. Nech r je iná priamka prechádzajúca bodom A, $r \neq q$. Ukážeme, že priamka r pretína priamku p.

Nech $\overrightarrow{AX}$ je polpriamka na r ležiaca na tej istej strane od q ako bod B. Nech X' je bod na opačnej strane $\overleftrightarrow{AB}$ ako X taký, že $\angle BAX' \cong \angle BAX$. Potom B leží vo vnútri uhla XAX'. Keďže p prechádza bodom B, pretína aspoň jedno z ramien tohto uhla. Ak p pretína $\overrightarrow{AX}$, tak p pretína n, a teda $n \nparallel p$, hotovo. Nech teda p nepretína $\overrightarrow{AX}$ a pretína $\overrightarrow{AX'}$ v bode Y'. Nech Y je bod na $\overrightarrow{AX}$ taký, že $AY \cong AY'$. Potom $\triangle BAY \cong \triangle BAY'$ (sus), teda uhol ABY je pravý, čiže je Y je priesečník priamok r a p.



Obr. 1. Legendrov pokus o dôkaz piateho postulátu

Formulácia geometrie v Euklidových Základoch: konštrukcie pomocou pravítka a kružidla.

Pravítko: bez merania, bez rysky: vieme pomocou pravítka narysovať priamku, ak poznáme dva body na nej.

Kružidlo: tzv. kolabujúce, vieme narysovať kruh, ak poznáme stred a jeden bod na obvode.

Dokazované tvrdenia v Základoch mali často tiež formu konštrukcie, napr.

- I.1 Skonštruovať rovnostranný trojuholník s danou stranou.
- I.2 Z daného bodu narysovať úsečku zhodnú s danou úsečkou.
- I.4 sus.
- I.9 Bisekcia uhla.
- I.10 Bisekcia úsečky.
- I.22 Skonštruovať trojuholník so stranami daných dĺžok, pokiaľ súčet dvoch je vždy väčší ako tretia. (V konštrukcii sa Euklides nikde na trojuholníkovú nerovnosť neodkazuje.)
- I.46 Skonštruovať štvorec s danou stranou.

Iné boli popismi vlastností a vzťahov:

- I.5 Uhly pri základni rovnoramenného trojuholníka sú zhodné.
- I.17 Súčet ľubovoľných dvoch uhlov v trojuholníku je menší než dva pravé uhly.
- I.32 Súčet uhlov v trojuholníku je rovný dvom pravým uhlom.

I.47 Pytagorova veta.
III.5 Ak sa dve kružnice pretínajú, potom nemajú spoločný stred.
III.21 Vrcholové uhly zostrojené nad spoločnou tetivou sú zhodné.
III.22 Súčet protiľahlých uhlov štvoruholíka vpísaného do kružnice je rovný dvom pravým uhlom.

Slávne problémy antickej geometrie (konštrukcie pomocou kružidla a pravítka):

- trisekcia uhla,
- kvadratúra kruhu,
- duplicita kocky.

Neriešiteľnosť vo všeobecnosti bola ukázaná až po zavedení súradníc a následného prekladu problémov do jazyka algebry.

Konštrukcia pravidelného n-uholníka: pre $n = 3, 4, 5, 6$ je konštrukcia uvedená v Euklidových základoch, plus vždy keď sa počet vrcholov zdvojnásobí, lebo bisekcia uhla.

Poznámka 2.4. Pri konštrukcii pravidelného päťuholníka kľúčovú úlohu hrá konštrukcia zlatého rezu (zlatého pomeru): Úsečka AB je bodom $C \in AB$ rozdelená v zlatom pomere, keď pre dĺžky úsečiek $a = |AC|$, $b = |BC|$ platí

$$a : b = (a + b) : a.$$

Ak pomer a/b označíme φ, potom ľahko odvodíme, že

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Poznámka 2.5. Pravidelný 7-uholník sa už zostrojiť nedá.

Gauss, 1796: konštrukcia pravidelného 17-uholníka + podmienky konštruovateľnosti pravidelného n-uholníka, dôkaz ale nepublikoval.

3. Po Euklidovi

Arabi: algebra.

Geometria a algebra existovali izolovane. Súradnice už existovali. Descartes, Fermat: prepojenie geometrie s algebrou pomocou súradníc (analytická geometria).

1637: Descartes:*Discourse on Method*: filozofická rozprava o hľadaní a rozpoznávaní poznania. Vízia: pomocou algebry zriešiť všetky problémy klasickej gréckej geometrie. “Analytická geometria”, lebo “analytická metóda”. Dnes by sme to skôr nazvali “súradnicová geometria”.

Dôkazy v analytickej geometrii sú v porovnaní s tými v syntetickej pomerne mechanické výpočty.

19.stor: veľká debata v projektívnej geometrii, či je správny syntetický prístup alebo algebraický (t.j. analytická geometria). Poncelet (revízia projektívnej geometrie, prišiel s konceptom nevlastného bodu ako priesečníka rovnobežiek, zaviedol kružnicové body): vášnivý zástanca syntetického prístupu, po jeho smrti sa našli jeho súkromné poznámky, podľa ktorých pri niektorých svojich objavoch použil algebru.