Geometrická algebra, komplexné čísla

(Euklides V, VI) Uvažujme $\mathbb{E}^2$ (definovanú synteticky, pomocou axióm). Bez toho, že by sme úsečkám priraďovali dĺžku, vieme

- porovnať, či sú dve úsečky zhodné (menšia/väčšia),
- nájsť polovicu úsečky,
- prenásobiť úsečku racionálnym číslom (cvičenie, keď ste hľadali tretinu úsečky)

Tiež máme už vybudovaný kalkulus pre sčítanie a odčítanie úsečiek (viď Axiómy zhodnosti, Aritmetika úsečiek).

Konštrukcia kladných reálnych čísel. Zhodnosť je relácia ekvivalencie, máme tak rozklad na triedy ekvivalencie:

- každej triede zodpovedá práve jedno kladné reálne číslo (ktoré môžme interpretovať ako dĺžku úsečiek v príslušnej triede)
- a každému kladnému reálnemu číslu zodpovedá práve jedna trieda ekvivalencie úsečiek.

Triedu ekvivalencie úsečky AB budeme označovať $[AB]$, teda

$$[AB] = \{XY \mid XY \cong AB\},$$

Týmto dostávame bijekciu medzi triedami ekvivalencie úsečiek a kladnými reálnymi číslami. Kladné reálne čísla vieme sčítavať a toto sčítavanie súhlasí so sčítavaním úsečiek. Kladné reálne čísla vieme aj násobiť.

Pre násobenie úsečiek (Euklides VI.12) potrebujeme najprv pevne zvoliť, ktorá úsečka (presnejšie jej trieda ekvivalencie) bude reprezentovať jednotku. Potom nech v $\triangle ABC$ strana AB zodpovedá jednotke. Nech $B' \in \overrightarrow{AB}$ a $C' \in \overrightarrow{AC}$ tak, že $\triangle ABC$ a $\triangle AB'C'$ sú podobné, t.j. $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B'C'}$. Potom definitoricky

$$[B'C'] = [BC] \cdot [AB'].$$

Vieme tak geometricky modelovať kladné reálne čísla s reláciou usporiadania aj s operáciami sčítania a násobenia.

Konštrukcia reálnych čísel. V nasledujúcom budeme potrebovať pojem *orientovanej úsečky*, čo je úsečka spolu so zvoleným poradím koncových bodov, z ktorých jeden budeme nazývať *začiatočným bodom* a druhý *koncovým bodom* orientovanej úsečky. Pri popisovaní orientovanej úsečky jej koncovými bodmi budeme používať konvenciu, že prvý bod je začiatočný a druhý koncový, t.j. v orientovanej úsečke AB je bod A začiatočný a bod B koncový.

Ak chceme modelovať všetky reálne čísla (nielen kladné):

(1) obmedzíme sa na orientované úsečky ležiace na jednej priamke,
(2) pripustíme aj tzv. nulové úsečky, čiže úsečky, kde začiatočný aj koncový bod sú totožné.

Dve nenulové orientované úsečky AB a CD na spoločnej priamke *majú rovnakú orientáciu*, ak $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{CD}$ alebo $\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{AB}$.

Dá sa overiť, že pre nenulové úsečky je relácia „mať rovnakú orientáciu" reláciou ekvivalencie, a že existujú presne dve triedy ekvivalencie. Presnejšie

- existujú dve nenulové orientované úsečky AB a CD majúce navzájom rôznu orientáciu,
- každá nenulová orientovaná úsečka XY má buď rovnakú orientáciu ako AB alebo rovnakú orientáciu ako DC.

Orientované úsečky AB a CD na spoločnej priamke budú ekvivalenté, ak

- obe sú nulové,
- alebo obe sú nenulové a majú rovnakú dĺžku aj orientáciu.

Potom triedy ekvivalencie zodpovedajú reálnym číslam.

Počítanie v $\mathbb{R}$ geometricky:

- Sčítavanie orientovaných úsečiek: na priamku ich nanesieme jednu za druhou: začiatočný bod druhej úsečky bude rovný koncovému bodu prvej úsečky, súčtom je potom orientovaná úsečka, ktorej začiatočným bodom je začiatočný bod prvej a koncovým bodom je koncový bod druhej orientovanej úsečky.
- Násobenie: geometricky vynásobíme dĺžky (tak ako v prípade násobenia v kladných reálnych číslach, pomocou podobnosti trojuholníkov) a potom vhodne zvolíme orientáciu: ak majú činitele rovnakú orientáciu, súčin bude mať tú istú orientáciu ako jednotka (orientovaná úsečka reprezentujúca jednotku), v opačnom prípade bude mať opačnú orientáciu ako jednotka.

Konštrukcia komplexných čísel. Caspar Wessel, 1797:

Pre konštrukciu komplexných čísel budeme uvažovať orientované úsečky v $\mathbb{E}^2$ včetne nulových úsečiek. Popíšeme teraz reláciu ekvivalencie orientovaných úsečiek v $\mathbb{E}^2$.

Všetky nulové úsečky budú navzájom ekvivalentné. Dve nenulové orientované úsečky AB a CD budú ekvivalentné ($AB \sim CD$), ak

- sú zhodné ($AB \cong CD$),
- majú rovnaký smer, teda $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$,
- majú rovnakú orientáciu, čo v tomto prípade môžme popísať tak, že
  - koncové body B a D ležia na tej istej strane od priamky $\overleftrightarrow{AC}$, ak AB a CD neležia na tej istej priamke,
  - $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{CD}$ alebo $\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{AB}$, ak AB a CD ležia na tej istej priamke.

  Spoločne by sme rovnakú orientáciu mohli popísať aj tak, že stred úsečky AD splýva so stredom úsečky BC. (Táto podmienka potom sama stačí na charakterizáciu ekvivalencie.)

Pracovať budeme s triedami ekvivalencie orientovaných úsečiek.

Uhly v rovine budeme tiež uvažovať orientované: v uhle $\angle ABC$ rozlišujeme začiatočné ($\overrightarrow{BA}$) a koncové rameno ($\overrightarrow{BC}$), teda $\angle ABC \neq \angle CBA$. Budeme pripúšťať aj nulový a priamy uhol (t.j. ak $A \neq B \neq C$ a A, B, C sú kolineárne). Plný uhol (ak ste sa s ním stretli na ZŠ/SŠ) ale už bude pre nás totožný s nulovým uhlom. Podobne ako pri orientovaných úsečkách dva uhly stotožníme, ak sú zhodné a majú rovnakú orientáciu.

(V tejto chvíli sme matematicky veľmi nepresní, lebo sme nedefinovali, kedy majú dva uhly rovnakú orientáciu. Spoliehame sa na chápanie tejto relácie zo strednej školy.)

- Grafické sčítanie:
$$[AB] + [CD] = [AE], \text{ kde } CD \sim BE$$
(neformálne: priložíme začiatok orientovanej úsečky CD ku koncu orientovanej úsečky AB). Triedy ekvivalencie orientovaných úsečiek takto tvoria komutatívnu grupu.
- Grafické násobenie: nech OE je orientovaná úsečka reprezentujúca jednotku. Jej dĺžka je $|OE| = 1$. Pre ľubovoľnú úsečku UV je $|UV|$ jej dĺžka a $\angle UV$ je orientovaný uhol, ktorý zviera UV s OE (t.j. uhol EOW, kde $OW \sim UV$). Špeciálne $\angle OE$ je nulový uhol. Takto máme každú triedu nenulových orietovaných úsečiek $[UV]$ jedno-jednoznačne reprezentovanú dĺžkou $|UV|$ a uhlom $\angle UV$, ktorý popisuje smer a orientáciu.

  Keď chceme $[AB]$ vynásobiť s $[CD]$, pre výslednú úsečku XY reprezentujúcu súčin $[AB] \cdot [CD]$ potrebujeme určiť jej dĺžku a uhol (čiže smer s orientáciou).
  - Pre dĺžku XY nech platí, $|XY| : |AB| = |CD| : |OE|$, t.j. dĺžku nájdeme presne tak isto ako v prípade modelovania kladných reálnych čísel.
  - Pre smer a orientáciu XY nech platí analogicky s dĺžkou, že $\angle XY - \angle AB = \angle CD - \angle OE$, čiže $\angle XY = \angle AB + \angle CD$, kde orientované uhly budeme sčítavať tak, ako orientované úsečky: začiatočné rameno druhého uhla priložíme ku koncovému ramenu prvého uhla, potom začiatočné rameno prvého uhla bude začiatočným ramenom súčtu a koncové rameno druhého uhla bude koncovým ramenom súčtu.

  Pri takto definovanom násobení tvoria triedy ekvivalencie (okrem nulovej úsečky) komutatívnu grupu.
- Dá sa overiť, že takto definované operácie sčítania a násobenia spĺňajú aj distributívny zákon.

Triedy ekvivalencie orientovaných úsečiek tvoria pole!

Každá trieda ekvivalencie orientovaných úsečiek má jediného reprezentanta, ktorý má začiatok v danom pevnom bode a naopak. Každú triedu tak môžeme jednoznačne reprezentovať koncovým bodom tejto jej úsečky. Naopak, každý bod určuje orientovanú úsečku so začiatkom v danom pevnom bode a následne tak aj jej triedu ekvivalencie. Máme tak bijekciu medzi bodmi $\mathbb{E}^2$ a triedami ekvivalencie orientovaných úsečiek.

Zaveďme si karteziánsku súradnicovú sústavu tak, že začiatky úsečiek sú v $(0,0)$ a OE má koncový bod v $E = (1,0)$.

Namiesto $[OE]$ budeme písať tiež 1, keďže ide o neutrálny prvok vzhľadom na násobenie v našom poli. Potom -1 je reprezentovaná orientovanou úsečkou s koncovým bodom $(-1,0)$ (začiatok je v $(0,0)$): má jednotkovú dĺžku a jej uhol je priamy (má veľkosť π).

Orientovaná úsečka so začiatočným bodom $(0,0)$, s dĺžkou r a uhlom φ má koncový bod $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Usporiadanú dvojicu $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ poznáte zrejme ako *karteziánske súradnice* koncového bodu tejto orientovanej úsečky. Dvojica (r,φ) tvorí zas *polárne súradnice* tohto bodu.

Označme i bod, ktorý zodpovedá koncovému bodu orientovanej úsečky so začiatkom v $(0,0)$, dĺžkou 1 a uhlom $\pi/2$. Ľahko overíme, že $i^2 = i \cdot i = -1$, to isté pre $-i$.

Komplexné číslo $\mathbf{z}$ s absolútnou hodnotou r a argumentom φ tak môžme jednoznačne napísať ako

$$\mathbf{z} = r(cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Pole, ktoré sme skonštruovali, sa nazýva *poľom komplexných čísel*, ozn. $\mathbb{C}$. Geometrická reprezentácia je známa ako *Gaussova rovina.*

Dĺžka orientovanej úsečky reprezentujúcej komplexné číslo sa štandardne nazýva *absolútna hodnota* komplexného čísla, jej uhol zas *argument* komplexného čísla.

Nech $\mathbf{a} \in \mathbb{C}$ má absolútnu hodnotu 1 a argument α, čiže $\mathbf{a} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, Nech $\mathbf{b} \in \mathbb{C}$ má absolútnu hodnotu 1 a argument β, čiže $\mathbf{b} = \cos\beta + i\sin\beta$.

Potom jednak máme, že

$$\mathbf{ab} \quad = \quad \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta),$$

a z distributívnosti násobenia vzhľadom na sčítanie tiež že

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta). \end{aligned}$$

Dostávame tak mimochodom vzorce pre goniometrické funkcie súčtu uhlov.

Násobenie komplexných čísel podľa Wessela (teda operáciami na absolútnej hodnote a argumente) je veľmi šikovné, keď potrebujeme zrátať vysokú mocninu komplexného čísla:

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \ (n \in \mathbb{N})$$

(známe ako *Moivrova veta*).

S komplexnými číslami môžeme pracovať aj ako s usporiadanými dvojicami reálnych čísiel $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, kde operácie sčítavania a násobenia sú definované:

$$\begin{aligned} (a,b) + (c,d) &= (a+c, b+d), \\ (a,b) \cdot (c,d) &= (ac-bd, ad+bc). \end{aligned}$$

Odtiaľ sa potom ľahko odvodia aj predpisy pre odčítavanie, delenie, odmocňovanie.