KAPITOLA 2

Hilbertova axiomatika geometrie

Po objavení neeuklidovských geometrií vzniká potreba hlbšie preskúmať Euklidove axiómy a dôsledne doplniť medzery.

1899: David Hilbert: Grundlagen der Geometrie (Základy geometrie)

Bod, priamka atď. sú objekty, ktoré zvlášť nedefinujeme, sú popísané axiómami, vlastnosťami, ktoré majú spĺňať.

Požiadavky na axiomatický systém (vlastnosti axiomatického systému):

- bezrozpornosť = konzistentnosť – úplne bezpodmienečne!
- nezávislosť (žiadna axióma nie je dokázateľná pomocou ostatných)
- úplnosť (každé pravdivé tvrdenie je dokázateľné; inak: buď je dokázateľné dané tvrdenie alebo jeho negácia)
- kategorickosť (všetky modely sú navzájom izomorfné)
- iné: jednoduchosť (estetická záležitosť), názornosť (tiež estetická záležitosť) ...

Axiomatický systém je *konzistentný*, ak nie je možné z axióm ukázať spor (čiže tvrdenie aj jeho negáciu)

Nekonzistentný (= sporný) axiomatický systém (t.j. je možné z axióm dospieť k sporu): dá sa dokázať ľubovoľné tvrdenie (sporom, lebo čokoľvek predpokládáme, vieme dospieť k sporu, čiže sme ukázali opak predpokladu). Taký axiomatický systém je bezcenný.

Postupy (len niektoré) pri dokazovaní (pravidlá logiky, čo to znamená z daných tvrdení dokázať ďalšie):

- modus ponens, viď matematická indukcia
- zákon vylúčenia tretieho
- dôkaz sporom: “reducto ad absurdum” – má svoje opodstatnenie v zákone vylúčenia tretieho
- rozbor prípadov (case distinction)
- ...

1. Axiómy incidencie

Nedefinované pojmy:

- bod,
- priamka,
- incidencia:
  - “bod B a priamka p sú incidentné”
  - “bod B leží na priamke p”
  - “priamka p prechádza bodom B”
  - “$B \in p$”.

Axiómy:

I1: Každými dvoma rôznymi bodmi prechádza práve jedna priamka.
I2: Na každej priamke ležia aspoň dva rôzne body.
I3: Existujú také tri body, že žiadna priamka neprechádza všetkými troma.

Poznámka 1.1. I1 je u Hilberta rozdelená na dve axiómy: existencia a jednoznačnosť. I2 a I3 sú u Hilberta spojené do jednej axiómy, rozšírené ešte o analogické tvrdenie v 3D priestore.

Definícia 1.2. Body $B_1, B_2, B_3, \dots$ sú *kolineárne*, ak existuje priamka so všetkými týmito bodmi incidentná.

I3: Existujú tri nekolineárne body.

Koľko spoločných bodov môžu mať dve rôzne priamky?

Tvrdenie 1.3. *Ak p, q sú dve rôzne priamky, potom p a q majú najviac jeden spoločný bod.*

Dôkaz.

- Nech $A \in p$ aj $A \in q$ a tiež $B \in p$ aj $B \in q$.
- Nech $\overleftrightarrow{AB}$ je priamka určená bodmi A a B (axióma I1, existencia).
- Potom $\overleftrightarrow{AB} = p$, lebo $A, B \in p$ (axióma I1, jednoznačnosť).
- Podobne zistíme, že $\overleftrightarrow{AB} = q$,
- a teda priamky p a q sú totožné.

□

Máme tzv. *incidenčnú geometriu*.

2. Modely incidenčnej geometrie

Interpretácia pojmov “bod”, “priamka”, “incidencia”: priradíme im nejaký konkrétny význam. Ak sú axiómy v tejto interpretácii (geometrii) pravdivé, potom je to *model* daného axiomatického systému. Všetko, čo vieme dokázať vychádzajúc z axióm, je potom pravdivé aj v modeli, nemusíme to overovať.

Ak máme tvrdenie (zatiaľ bez dôkazu) a rozhodujeme sa o jeho pravdivosti, tak predtým ako sa pustíme do dokazovania, je rozumné si jeho platnosť najprv overiť na modeli.

Ak chceme ukázať konzistentnosť axiomatického systému, mali by sme overiť, že spor sa z axióm odvodiť nedá. V praxi sa bezrozpornosť overuje pomocou modelov. Ak nájdeme model, axiomatický systém je konzistentný (bezrozporný): máme "svet", ktorý zodpovedá axiómam, a nie všetko sa v ňom dá ukázať.

2.1. Trojbodová geometria. A, B, C sú body a $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}$ sú priamky. Incidencia: zjavná. Ide o model incidenčnej geometrie (overíme axiómy). Teda incidenčná geometria je bezrozporná (konzistentná).

Euklidov postulát o rovnobežkách neplatí. T.j. tvrdenie "daným bodom prechádza práve jedna rovnobežka k danej priamke" sa určite nedá dokázať.

Kompletný graf s troma vrcholmi: v podstate ten istý model.

Definícia 2.1. Dve incidenčné geometrie sú *izomorfné*, ak existuje bijekcia medzi bodmi a priamkami zachovávajúca incidenciu. Formálne: $\varphi: \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ je *izomorfizmus* incidenčných geometrií (modelov), ak φ bijektívne zobrazí body modelu $\mathcal{M}_1$ na body modelu $\mathcal{M}_2$, priamky $\mathcal{M}_1$ na priamky $\mathcal{M}_2$ a platí, že v $\mathcal{M}_1$ bod A leží na priamke p práve vtedy, keď v $\mathcal{M}_2$ leží bod $\varphi(A)$ na priamke $\varphi(p)$.

Izomorfizmus incidenčnej geometrie sa tiež nazýva *kolineáciou*. V kolineácii sa kolineárne body zobrazia na kolineárne body.

Uvedené dva trojbodové modely sú izomorfné.

Dualita: z modelu incidenčnej geometrie skonštruujeme novú geometriu tak, že bod nahradíme priamkou, priamku bodom, incidenciu zachováme (len „otočíme" smer incidencie).

Duálna geometria k trojbodovej geometrii je tiež modelom. Je izomorfný s pôvodným modelom.

Všetky trojbodové modely incidenčnej geometrie sú navzájom izomorfné. Preto ak by sme dodali ďalšiu axiómu „existujú práve tri rôzne body", axiomatický systém by sa stal kategorickým.

2.2. Štvorbodová geometria. Body: A, B, C, D, priamky: dvojice bodov. Čiže ide o kompletný graf so štyrmi vrcholmi.

Euklidov postulát o rovnobežkách platí.

T.j. Euklidov postulát sa nedá ani dokázať ani vyvrátiť len na základe axióm incidencie. Je to *nezávislé* tvrdenie.

Nezávislosť sa ukazuje podobne ako bezrozpornosť: existenciou modelov.

2.3. Päťbodová geometria. Kompletný graf s piatimi vrcholmi.

Každým bodom vieme k danej priamke viesť dve rovnobežky.

2.4. Sféra. Bodmi sú body sféry. Priamkami sú kružnice na sfére so stredom v strede sféry.

Každé dve priamky sa pretínajú v dvoch bodoch, preto nejde o model incidenčnej geometrie.

Modifikácia:

- body: dvojice $\{A, A'\}$, kde A, A' sú navzájom protiľahlé body na sfére (napr. severný a južný pól), čiže stotožnili me protiľahlé body,
- priamky: kružnice na sfére so stredom v strede sféry.

Takto dostávame model incidenčnej geometrie. A veľmi dôležitý!

2.5. Algebraické modely incidenčnej geometrie. Afinné roviny nad poľom $\mathbb{Q}^2, \mathbb{R}^2, F_p^2, \ldots$: body sú prvky, t.j. dvojice (a_1, a_2), priamky sú lineárne rovnice $ax + by + c = 0$ $((a, b) \neq (0, 0))$, bod leží na priamke, ak je riešením príslušnej lineárnej rovnice.

Analytická geometria je teda modelom incidenčnej geometrie.

2.6. Projektívna rovina. Renesancia (cca 15. stor.) – lineárna perspektíva: teória o projekcii bodov zo scény (3D) na plátno (2D). Matematické pozadie sa volá *projektívna geometria*. Rovnobežky sa v nej môžu pretať... "pretínajú sa v nekonečne"

Majme $\mathbb{R}^2$ – klasická rovina, v ktorej platí piaty Euklidov postulát. Uvažujme reláciu na priamkach (rozšírená rovnobežnosť):

$$p \sim q \quad \text{práve vtedy, keď} \quad p = q \text{ alebo } p \parallel q.$$

Potom $\sim$ je reláciou ekvivalencie: reflexívnosť a symetrickosť sú zjavné, tranzitívnosť: nech p, q, r sú navzájom rôzne (inak je to triviálne) a nech $p \parallel q$ a $q \parallel r$. Sporom, nech $p \nparallel r$, teda p a r sa pretnú v bode B. Potom máme dve rovnobežky ku q cez bod B.

Triedy ekvivalencie sú nové body, o ktoré rozšírime $\mathbb{R}^2$. Aby boli splnené axiómy, tak body v nekonečne musia ležať všetky na priamke v nekonečne: pridáme ju k už existujúcim priamkam.

Urobili sme tzv. *projektívne zúplnenie* $\mathbb{R}^2$.

Všeobecnejšie: ak máme model incidenčnej geometrie, v ktorom platí Euklidov postulát rovnobežnosti, potom ho vieme zúplniť na projektívnu rovinu.

PRÍKLAD 2.2. Najmenšia projektívna rovina (tzv. *Fanova rovina*) vznikne projektívnym zúplnením uvedenej štvorbodovej roviny.