KAPITOLA 3

Automorfizmy euklidovskej roviny

1. Zhodnosti v euklidovskej rovine

Superpozícia u Euklida (sus): ak úsečku po rovine len presunieme, jej dĺžka sa nezmení.

Geometria môže byť vybudovaná aj inak než euklidovskými axiómami, napríklad ju môžme vybudovať na princípe superpozície.

Definícia 1.1. Neprázdna množina G spolu s binárnou operáciou $\circ$ (t.j. zobrazením $G \times G \to G$) sa nazýva *grupa*, ak

- pre všetky $a, b, c \in G$ platí $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ *asociatívnosť*,
- existuje $e \in G$ také, že pre všetky $a \in G$ platí $a \circ e = e \circ a = a$ (e je *neutrálny prvok* operácie $\circ$),
- pre každé $a \in G$ existuje $b \in G$ také, že $a \circ b = b \circ a = e$ (b je *inverzný* k a vzhľadom na operáciu $\circ$.)

Nás budú zaujímať grupy zobrazení s operáciou skladania zobrazení: pre zobrazenia

$$f\colon A \to B \quad \text{a} \quad g\colon B \to C$$

je zloženie f a g zobrazenie

$$g \circ f\colon A \to C \quad \text{také, že} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Tvrdenie 1.2. *Skladanie zobrazení je asociatívne.*

Dôkaz. Nech $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ a $h\colon C \to D$. Treba ukázať, že $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, teda že pre všetky $a \in A$ platí $((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ (g \circ f))(a)$. Ide o jednoduché rozpisovanie skladania zobrazení. □

Definícia 1.3. *Transformácia euklidovskej roviny* je akékoľvek zobrazenie $\mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$.

Definícia 1.4. Transformácia f euklidovskej roviny sa nazýva *zhodnosťou (izometriou, zhodnostným zobrazením)* práve vtedy, keď dĺžka úsečky je invariantom f, t.j. keď pre všetky body A, B platí, že $AB \cong f(A)f(B)$.

Odteraz budeme často používať konvenciu, že pre danú zhodnosť f bude A' obraz bodu A v zhodnosti f, teda $A' = f(A)$, pokiaľ bude z kontextu jasné, o ktorú zhodnosť ide.

Tvrdenie 1.5. *Zhodnosť euklidovskej roviny je bijektívna transformácia $\mathbb{E}^2$, ktorá zachováva relácie*

- *incidencie: kolineárne body sa zobrazia na kolineárne body, teda ide o tzv.* kolineáciu*;*

- *usporiadania: ak $A * B * C$, potom $\varphi(A) * \varphi(B) * \varphi(C)$,*

Dôkaz. Injektívnosť: ak f je izometria, potom je f injektívne zobrazenie, lebo ak $A \neq B$, potom AB je úsečka a platí, že $AB \cong A'B'$, čiže $A' \neq B'$.

Incidencia a usporiadanie: nech A, B, C sú rôzne kolineárne body a nech napr. $A * B * C$. Potom $|AB| + |BC| \cong |AC|$. Keďže f je zhodnosť, dostávame tak, že $|A'B'| + |B'C'| \cong |A'C'|$, teda A', B', C' sú kolineárne (inak by sme mali spor s trojuholníkovou nerovnosťou) a navyše $A' * B' * C'$.

Surjektívnosť: Nech X, Y sú rôzne body, potom f zobrazí priamku $\overleftrightarrow{XY}$ bijektívne na priamku $\overleftrightarrow{X'Y'}$: keďže f zachováva incidenciu, tak $f(\overleftrightarrow{XY}) \subset \overleftrightarrow{X'Y'}$. Nech teraz pre $U \in \overleftrightarrow{X'Y'}$ platí napríklad $X' * Y' * U$. Podľa axiómy Z1 existuje na polpriamke $\overrightarrow{XY}$ jediný bod Z taký, že $XZ \cong X'U$. Ľahko sa presvedčíme, že Z je vzorom U v zobrazení f.

Nech A, B, C sú teraz rôzne nekolineárne body, teda A', B', C' sú tiež rôzne (vyplýva z injektívnosti f) nekolineárne body (inak by sme mali zase spor s trojuholníkovou nerovnosťou, podobne ako pri dokazovaní zachovávania usporiadania). Nech X je ľubovoľný bod, ukážeme, že má v zobrazení f vzor.

Ak X leží na niektorej z priamok $\overleftrightarrow{A'B'}$, $\overleftrightarrow{A'C'}$ alebo $\overleftrightarrow{B'C'}$, potom podľa práve ukázaného má v zobrazení f vzor. Nech teda X neleží na žiadnej z týchto priamok. Nech Y je bod medzi A' a B'. Ak priamka $\overleftrightarrow{XY}$ prechádza bodom C', tak Y a C' majú vzor, a teda všetky body priamky $\overleftrightarrow{XY}$ majú vzor, špeciálne aj bod X. Ak priamka $\overleftrightarrow{XY}$ neprechádza bodom C', potom podľa Pachovej axiómy pretína niektorú zo zvyšných strán trojuholníka $\triangle A'B'C'$ vo vnútornom bode, označme ho Z. Teda znovu priamka $\overleftrightarrow{XY}$ má dva body, ktoré majú vzor (bod Y a bod Z), preto aj X má vzor. $\square$

TVRDENIE 1.6. *Všetky zhodnosti $\mathbb{E}^2$ spolu s binárnou operáciou skladania zobrazení tvoria grupu.*

Dôkaz. Ak f a g sú zhodnosti, potom pre $A \neq B$ máme

$$(g \circ f)(A)(g \circ f)(B) = g(f(A))g(f(B)) \cong f(A)f(B) \cong AB,$$

teda $g \circ f$ je zhodnosť, čiže $\circ$ je naozaj dobre definovaná binárna operácia na množine všetkých zhodností.

Asociatívnosť operácie $\circ$ sme už ukázali.

Neutrálnym prvkom vzhľadom na $\circ$ je identita (zrejme identita je zhodnosť).

Ak f je zhodnosť, potom je f bijekcia, a preto existuje inverzné zobrazenie f^{-1} také, že $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i_{\mathbb{E}^2}$ (identita Euklidovskej roviny). Zrejme f^{-1} je tiež bijekcia a navyše platí

$$f^{-1}(A')f^{-1}(B') = f^{-1}(f(A))f^{-1}(f(B)) = AB \cong A'B',$$

teda f^{-1} je zhodnosť. $\square$

PRÍKLAD 1.7. Grupa automorfizmov nie je komutatívna! Napr. otočenie okolo $(0, 0)$ o π a posunutie v smere $(1, 0)$.

LEMA 1.8. *Nech f je zhodnosť. Potom $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.*

Dôkaz. Keďže $A'B' \cong AB$ a to isté platí pre ostatné strany $\triangle ABC$, tak sú trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ zhodné a dostávame tak požadované tvrdenie. $\square$

DÔSLEDOK. *Každá zhodnosť zachováva všetky relácie v euklidovskej geometrii: reláciu incidencie, reláciu usporiadania a relácie zhodnosti úsečiek a uhlov.*

Dôkaz. Relácie incidencie a usporiadania sú zachované podľa Tvrdenia 1.5. Pre úsečky podľa definície zhodnosti platí: $A'B' \cong AB$. Preto ak $AB \cong CD$, potom

$$A'B' \cong AB \cong CD \cong C'D',$$

teda aj pre obrazy platí $A'B' \cong C'D'$.

Podobne z Lemy 1.8 ukážeme, že ak $\angle ABC \cong \angle DEF$, tak $\angle A'B'C' \cong \angle D'E'F'$. $\square$

2. Klasifikácia zhodností euklidovskej roviny

DEFINÍCIA 2.1. Nech A, B sú rôzne body. Priamka prechádzajúca stredom AB a kolmá na $\overleftrightarrow{AB}$ sa nazýva *os úsečky* AB.

Podľa Tvrdenia 4.28 a Vety 4.25 predchádzajúcej kapitoly má každá úsečka práve jednu os.

LEMA 2.2. *Os úsečky AB je množina takých bodov X, že $AX \cong BX$.*

Dôkaz. Označme S stred úsečky AB a o os úsečky AB.

Nech $X \in o$. Ak $X \in \overleftrightarrow{AB}$, potom $X = S$ a preto $AX \cong BX$. Ak $X \notin \overleftrightarrow{AB}$, potom sú trojuholníky $\triangle ASX$ a $\triangle BSX$ zhodné (veta sus). Preto $AX \cong BX$.

Nech $AX \cong BX$. Ak $X \in \overleftrightarrow{AB}$, potom $X = S$ a preto $X \in o$. Ak $X \notin \overleftrightarrow{AB}$, potom sú trojuholníky $\triangle ASX$ a $\triangle BSX$ zhodné (veta sss). Preto $\angle ASX \cong \angle BSX$ a keďže ide o susedné uhly, sú oba pravé, čiže $X \in o$. $\square$

DEFINÍCIA 2.3. Nech f je transformácia $\mathbb{E}^2$. Bod B sa nazýva *pevným (invariantným, samodružným)* bodom transformácie f, ak $f(B) = B$.

DEFINÍCIA 2.4. Nech o je priamka v $\mathbb{E}^2$. *Súmernosť podľa priamky o (osová súmernosť)* je transformácia $\mathscr{S}_o$ euklidovskej roviny definovaná nasledovne:

Nech $A \in \mathbb{E}^2$.

- Ak $A \in o$, potom $\mathscr{S}_o(A) = A$,
- Ak $A \notin o$, nech
  - k_A je priamka prechádzajúca cez A a kolmá na o
  - a $A^\perp = o \cap k_A$.

  Potom $\mathscr{S}_o(A)$ je taký bod na k_A, ktorý leží v opačnej polrovine od o ako A a $\mathscr{S}_o(A)A^\perp \cong AA^\perp$.

POZNÁMKA 2.5. Ekvivalentne by sme mohli obraz bodu A v súmernosti $\mathscr{S}_o$ podľa o popísať aj tak, že $\mathscr{S}_o(A)$ je taký bod, že o je os úsečky $A\mathscr{S}_o(A)$. Pri takejto definícii treba ale ešte ukázať jej korektnosť, a síce, že taký bod $\mathscr{S}_o(A)$ existuje a je jediný.

TVRDENIE 2.6. *Osová súmernosť je zhodnosť.*

Dôkaz. Potrebujeme ukázať, že pre všetky dvojice A, B platí $AB \cong A'B'$.

Nech o je os súmernosti.

Ak $A, B \in o$, tvrdenie je zrejmé.

Ak $A \in o$ a $B \notin o$, potom $A = A'$ je bod na osi úsečky BB' a tvrdenie vyplýva z Lemy 2.2.

Ak $A, B \notin o$, potom nech $X \in o$ je taký, že neleží na $\overleftrightarrow{AA'}$ ani na BB'. Platí, že $AX \cong A'X$ aj $BX \cong B'X$. Zo zhodnosti trojuholníkov $\triangle BS_BX$ a $\triangle B'S_BX$ (S_b je stred BB') a podobne pre A, A' a aritmetiky uhlov potom vidíme, že $\triangle ABX \cong \triangle A'B'X$ (sus), a preto $AB \cong A'B'$. $\square$

POZNÁMKA 2.7. Pre osovú súmernosť $\mathscr{S}$ zrejme platí, že $\mathscr{S} \circ \mathscr{S} = i_{\mathbb{E}^2}$. Takéto zobrazenie sa nazýva *involúcia.*

TVRDENIE 2.8. *Ak má izometria f dva rôzne samodružné body A, B, potom všetky body priamky $\overleftrightarrow{AB}$ sú samodružné.*

Dôkaz. Nech C je ďalší bod na $\overleftrightarrow{AB}$. Nech najprv $A * B * C$. Keďže f zachováva usporiadanie, tak $A * B * C'$. Zároveň musí platiť, že $BC' = B'C' \cong BC$, a teda z axiómy Z1 máme $C' = C$.

Ostatné prípady polohy bodu C vzhľadom na A, B sa ukážu tak isto. $\square$

TVRDENIE 2.9. *Ak má izometria tri nekolineárne samodružné body, potom je to identita.*

Dôkaz. Nech A, B, C sú pevné nekolineárne body. Potom sú podľa Tvrdenia 2.8 všetky body na priamkach $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AC}$ pevné. Nech X je bod neležiaci ani na jednej z týchto priamok. Potom presne takým istým postupom ako pri dôkaze surjektívnosti izometrie overíme, že X je pevným bodom (výraz „má vzor" stačí nahradiť výrazom „je pevným bodom"). $\square$

DÔSLEDOK. *Ak f a g sú izometrie, pre ktoré platí, že $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$ a $f(C) = g(C)$ pre nejaké nekolineárne body A, B, C, potom $f = g$.*

Dôkaz. Zobrazenie $f \circ g^{-1}$ má tri pevné nekolineárne body, preto je to identita. $\square$

TVRDENIE 2.10. *Ak má izometria dva rôzne samodružné body A, B a nie je to identita, potom je to súmernosť podľa priamky $\overleftrightarrow{AB}$.*

Dôkaz. Podľa Tvrdenia 2.8 sú všetky body na priamke $\overleftrightarrow{AB}$ pevné. Nech $C \notin \overleftrightarrow{AB}$, potom $C' \neq C$, inak by bola zhodnosť izometriou. Nech k je kolmica na $\overleftrightarrow{AB}$ prechádzajúca bodom C. Potom každý bod na k sa zobrazí zas na bod na k (Lema 1.8). Preto C sa zobrazí na bod súmerný podľa $\overleftrightarrow{AB}$ (axióma Z1). $\square$

VETA 2.11. *Trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ sú zhodné práve vtedy, keď existuje zhodnosť f taká, že $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ a $C' = f(C)$. Navyše takáto zhodnosť je jediná.*

Dôkaz. Nech f je zhodnosť a A', B', C' sú obrazy bodov A, B, C. Potom sú trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ podľa vety sss zhodné.

Nech teraz $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Nech $\mathscr{S}_1$ je osová súmernosť, ktorá bod A zobrazí na bod A'. Označme $A_1 = \mathscr{S}_1(A) = A'$, $B_1 = \mathscr{S}_1(B)$, $C_1 = \mathscr{S}_1(C)$. Následne, nech $\mathscr{S}_2$ je osová súmernosť, ktorá bod B_1 zobrazí na bod $B_2 = B'$. Podľa Lemy 2.2 potom $A' \in o_2$ (o_2 je os súmernosti $\mathscr{S}_2$), lebo $A'B' \cong A'B_1$ (viď Lema 2.2). Nakoniec, nech $\mathscr{S}_3$ je osová súmernosť, ktorá bod C_2 zobrazí na bod $C_3 = C'$. Znovu podobne ako v predchádzajúcom prípade platí, že $A', B' \in o_3$. Našli sme tak zhodnosť, konkrétne $f = \mathscr{S}_3 \circ \mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_1$, ktorá $\triangle ABC$ zobrazí na $\triangle A'B'C'$.

Jednoznačnosť vyplýva z dôsledku Tvrdenia 2.9. □

Dokázané tvrdenie je vlastne to, čo u Euklida vystupuje ako princíp superpozície.

DÔSLEDOK. *Osové súmernosti generujú grupu všetkých zhodností. Každá zhodnosť je súčinom nanajvýš troch osových súmerností.*

2.1. Súčin dvoch osových súmerností: otočenia. Nech o_1, o_2 sú priamky, budeme skúmať zobrazenie $\mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_1$ ($\mathscr{S}_i$ je súmernosť podľa o_i).

DEFINÍCIA 2.12. Nech S je ľubovoľný pevne zvolený bod. *Stredová súmernosť* so stredom S je nasledovné zobrazenie:

- $S' = S$,
- ak $A \neq S$, potom A' je taký bod v rovine, že S je stredom AA'.

Pre úplnosť a korektnosť definície je potrebné ešte overiť, že stredová súmernosť s daným stredom S existuje a navyše že ide o izometriu. Toto je dôsledkom nasledovného tvrdenia.

TVRDENIE 2.13. *Nech $o_1 \perp o_2$. Potom $f = \mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_1$ je stredová súmernosť so stredom $S = o_1 \cap o_2$.*

Dôkaz. Ak $A \in o_1$ alebo $A \in o_2$, je zrejme S stredom AA', kde $A' = f(A)$.

Nech A neleží ani na jednej z osí. Nech B je kolmý priemet A na o_1, nech $A_1 = \mathscr{S}_1(A)$, $A' = \mathscr{S}_2(A_1) = f(A)$ a $B' = f(B)$. Potom $\triangle ABS \cong \triangle A'B'S$ (sss), navyše S je stred BB', teda uhly $\angle ASB$ a $\angle A'SB'$ sú vrcholové (axióma Z4), a preto S je stred AA'. □

POZNÁMKA 2.14. Stredová súmernosť je, podobne ako osová, involúciou.

DEFINÍCIA 2.15. Zhodnosť f sa nazýva *otočením (rotáciou)*, ak má jediný samodružný bod. Tento samodružný bod sa nazýva tiež *stredom otočenia*.

Analógia: osová súmernosť sa zvykne tiež definovať ako zhodnosť, ktorej množinou samodružných bodov je priamka. Takáto definícia nie je konštrukčná, geometricky dáva slabý vhľad, ale podľa Tvrdenia 2.10 naozaj takto definujeme osovú súmernosť ako ju poznáte zo ZŠ/SŠ. Výhodná je v tom, že je podstatne jednoduchšia ako Definícia 2.4.

TVRDENIE 2.16. *Zhodnosť f je otočením práve vtedy, keď $f = \mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_1$, kde $\mathscr{S}_i$ je osová súmernosť podľa o_i a o_1, o_2 sú rôznobežné.*

Dôkaz. Nech f je otočenie, t.j. f má jediný pevný bod S. Nech $A \neq S$, teda $A \neq A' = f(A)$. Nech o_1 je os AA'. Bod $S \in o_1$, lebo $AS \cong A'S$, teda S je pevný vzhľadom na $\mathscr{S}_1$ (súmernosť podľa osi o_1). Ďalej $\mathscr{S}_1(A) = f(A)$. Vidíme teda, že v zobrazení $f \circ \mathscr{S}_1$ sú body S a A pevné. Toto zobrazenie určite nie je identita, inak by f malo viac ako jeden pevný bod, preto je to podľa Tvrdenia 2.10 osová súmernosť. Jej os o_2 určite obsahuje bod S (je samodružný), teda $f \circ \mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2$, čiže $f = \mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_1$.

Nech teraz $f = \mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_1$, kde osi o_1 a o_2 sú rôznobežné. Zrejme $S = o_1 \cap o_2$ je samodružný bod zhodnosti f. Ak by aj nejaký iný bod A bol samodružný, potom by platilo, že $\mathscr{S}_2(A) = \mathscr{S}_1(A)$, teda $o_1 = o_2$, čo je v spore s predpokladom. Čiže S je jediný samodružný bod, a teda f je otočenie. □

Poznámka 2.17. Nech o_1, o_2 sú rôznobežné a $f = \mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_1$ je otočenie okolo $S = o_1 \cap o_2$. Potom uhol $\angle ACA'$, o ktorý sa bod A ($A \neq S$) otočí, zodpovedá dvojnásobku uhla, ktorý zvierajú osi o_1 a o_2.

Dôsledok. *Nech f je rotácia okolo S a nech p je priamka prechádzajúca cez S. Potom existuje práve jedna priamka q taká, že $f = \mathscr{S}_q \circ \mathscr{S}_p$, a práve jedna priamka r taká, že $f = \mathscr{S}_p \circ \mathscr{S}_r$.*

Tvrdenie 2.18. *Pre pevne zvolený bod S tvoria rotácie okolo S spolu s identitou komutatívnu grupu.*

Dôkaz. Identita je neutrálnym prvkom.

Nech o_1, o_2 sú rôznobežné a $f = \mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_1$. Potom $g = \mathscr{S}_1 \circ \mathscr{S}_2$ je opačné zobrazenie k f. (Ľahko sa overí vďaka tomu, že osová súmernosť je involúcia.)

Nech f, g sú otočenia, potom aj $g \circ f$ je otočenie (vyplýva z dôsledku Tvrdenia 2.16). □

2.2. Súčin dvoch osových súmerností: posunutia. Posunutia sú s drobnými odchýlkami veľmi podobné otočeniam, preto sa im tu budeme venovať len stručne.

Prvá odchýlka nastáva v možnosti definovania posunutí. Pre otočenia, ako im poznáte zo základnej či strednej školy, platí, že majú jediný samodružný bod, a táto vlastnosť ich plne charakterizovala, preto sme ju pre jej jednoduchú formuláciu použili ako definíciu otočenia. Posunutie nemá žiaden samodružný bod, ale nie je to jediný typ izometrie s touto vlastnosťou, preto posunutia musíme definovať inak.

Definícia 2.19. Zhodnosť f je *posunutie*, ak pre všetky A, B, $A \neq B$ platí, že stred úsečky AB' splýva so stredom úsečky BA'.

Pri takejto definícii patrí medzi posunutia aj identita.

Tvrdenie 2.20. *Zhodnosť f je posunutím práve vtedy, keď $f = \mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_1$, kde $\mathscr{S}_i$ je osová súmernosť podľa o_i a o_1, o_2 sú rovnobežné (totožné v prípade identity).*

Poznámka 2.21. Nech o_1, o_2 sú rovnobežné a $f = \mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_1$ je posunutie. Potom $\overleftrightarrow{AA'} \perp o_i$ a vzdialenosť A a A' zodpovedá dvojnásobku vzdialenosti osí o_1 a o_2.

Tvrdenie 2.22. *Posunutia tvoria komutatívnu grupu.*

2.3. Súčin troch osových súmerností. Ak o_1, o_2, o_3 sú navzájom rovnobežné alebo ak všetky prechádzajú spoločným bodom, potom ide o osovú súmernosť: stačí posunúť resp. otočiť osi o_2 a o_3 tak, aby o_1 a o_2 splynuli.

Inak existujú osi $\tilde{o}_1, \tilde{o}_2$ a $\tilde{o}_3$ také, že

$$\mathscr{S}_{o_3} \circ \mathscr{S}_{o_2} \circ \mathscr{S}_{o_1} = \mathscr{S}_{\tilde{o}_3} \circ \mathscr{S}_{\tilde{o}_2} \circ \mathscr{S}_{\tilde{o}_1},$$

a $\tilde{o}_2 \parallel \tilde{o}_3$ a $\tilde{o}_1 \perp \tilde{o}_2$. Takáto zhodnosť sa nazýva *posunutá súmernosť*. Je to osová súmernosť nasledovaná posunutím pozdĺž osi súmernosti.

Postup pri hľadaní $\tilde{o}_1, \tilde{o}_2$ a $\tilde{o}_3$:

(1) otočíme osi o_2, o_3 tak, aby $o_2 \perp o_1$,
(2) otočíme osi o_1, o_2 tak, aby $o_3 \parallel o_2$.

3. Kleinov erlangenský program

Geometria skúmaná pomocou Hilbertových axióm sa zaoberá najmä euklidovskou rovinou. Napríklad projektívne roviny prestávajú byť modelom hneď po zavedení axióm usporiadania. Ide však o veľmi dôležitý model incidenčnej geometrie, a to nielen v renesancii (lineárna perspektíva) ale aj v modernej matematike.

Pod rovinnú geometriu spadá napríklad aj štúdium teselácií euklidovskej roviny. Tie sa už ale pomocou Hilbertových axióm veľmi dobre popísať nedajú.

Geometria však môže byť študovaná aj inak než Euklidovými alebo Hilbertovými axiómami. Mohli by sme najprv zadefinovať zobrazenia a potom budovať planimetriu. Dá sa to, je to dokonca modernejší prístup:

Felix Klein, 1872, Kleinov erlangenský program: predstavuje presne tento opačný postup. Geometria je určená množinou (body) a grupou automorfizmov tejto množiny. Študovať geometriu znamená skúmať invarianty grupy automorfizmov (vlastností, ktoré ostávajú pri transformáciách zachované). Ide o veľmi vplyvnú myšlienku nielen v matematike (teória invariantov), ale napr. aj vo fyzike.

- euklidovská geometria = štúdium invariantov grupy zhodností
- teselácie roviny = štúdium invariantov kryštalografických grúp
- afinná geometria = štúdium invariantov afinnej grupy
- projektívna rovina = štúdium invariantov projektívnej grupy
- ...

Naše súčasné vnímanie geometrie je veľmi ovplyvnené Kleinovou prácou. Napríklad dnes zhodnosť trojuholníkov nedefinujeme ako Euklides porovnávaním strán a uhlov, ale práve superpozíciou:

Definícia 3.1. *Euklidovská rovina* $\mathbb{E}^2$ je afinná rovina $\mathbb{R}^2$ so skalárnym súčinom definovaným na jej vektorovej zložke.

Definícia 3.2. Dĺžka úsečky AB je

$$|AB| = \sqrt{(B-A)\cdot(B-A)}.$$

Definícia 3.3. Afinné zobrazenie $\mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ sa nazýva *zhodnosť (izometria)*, ak pre všetky $A, B \in \mathbb{E}^2$ platí, že $|A'B'| = |AB|$. (Afinné zobrazenie roviny do seba zrejme poznáte ako zobrazenie, v ktorom obrazom každej priamky je priamka alebo bod a ktoré zachováva deliaci pomer bodov.)

Definícia 3.4. Afinné zobrazenie $\mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ sa nazýva *podobnosť*, ak existuje $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ také, že pre všetky $A, B \in \mathbb{E}^2$ platí, že $|A'B'| = k|AB|$.

Definícia 3.5. Dva útvary (trojuholníky, štvoruholníky, ...) $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ sú *zhodné* resp. *podobné*, ak existuje zhodnosť resp. podobnosť, ktorá $\mathcal{U}_1$ zobrazí na $\mathcal{U}_2$.

Vďaka Vete 2.11 vieme, že takto definovaná zhodnosť pre trojuholníky je tá istá, ako zhodnosť trojuholníkov definoval Euklides.