4. Axiómy zhodnosti

Nedefinované pojmy:

- zhodnosť úsečiek: $AB \cong CD$ – úsečky AB a CD sú zhodné,
- zhodnosť uhlov: $\angle ABC \cong \angle DEF$ – uhly $\angle ABC$ a $\angle DEF$ sú zhodné.

Axiómy:

Z1: Pre ľubovoľné dva rôzne body A, B a polpriamku vychádzajúcu z bodu A' existuje na tejto polpriamke práve jeden bod B' taký, že $A'B' \cong AB$.

Z2: Ak $AB \cong A'B'$ a $AB \cong A''B''$, potom $A'B' \cong A''B''$. Navyše, každá úsečka je zhodná sama so sebou: $AB \cong AB$.

Z3: Ak $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ a $BC \cong B'C'$, potom $AC \cong A'C'$.

Z4: Pre daný uhol $\angle ABC$, danú polpriamku $\overrightarrow{B'A'}$ a danú polrovinu ohraničenú priamkou $\overleftrightarrow{A'B'}$ existuje práve jedna polpriamka $\overrightarrow{B'C'}$ v danej polrovine tak, že $\angle A'B'C' \cong \angle ABC$.

Z5: Ak $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ a $\angle ABC \cong \angle A''B''C''$, potom $\angle A'B'C' \cong \angle A''B''C''$. Navyše, každý uhol je zhodný sám so sebou: $\angle ABC \cong \angle ABC$.

Z6: (prekvapenie! nie, nie je to analógia Z3 pre uhly!) Ak pre trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ platí, že $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ a $\angle B \cong \angle B'$, potom $\angle A \cong \angle A'$ a $\angle C \cong \angle C'$.

4.1. Axiómy.

Dôsledok. *Zhodnosť úsečiek (uhlov) je reláciou ekvivalencie na množine úsečiek (uhlov).*

Dôkaz. Cvičenie. □

U Hilberta sú Z1 a Z4 axiómami existencie. U Euklida to boli konštrukcie, že vieme preniesť dĺžku úsečky (I.2, presnejšie I.3) resp. veľkosť uhla (tiež niekde v prvej knihe). Axiómy Z2, Z3 a Z5 sú tzv. všeobecné pojmy (axiómy) u Euklida. Miesto axióm Z1, Z4 má Euklides (zrejme) tretí postulát: o konštruovateľnosti kružnice. My si kružnicu v našej axiomatike môžeme už zadefinovať.

4.2. Geometria trojuholníkov. Rýchly dôsledok axiómy Z6 je veta sus o zhodnosti trojuholníkov.

Definícia 4.1. Hovoríme, že trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ sú *zhodné*, označujeme $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, ak $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $AC \cong A'C'$, $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ a $\angle C \cong \angle C'$.

Veta 4.2 (**sus**). *(Základy I.4) Ak pre trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ platí, že $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ a $\angle B \cong \angle B'$, potom sú tieto trojuholníky zhodné.*

Poznámka 4.3. Niekedy sa priamo sus zvykne uvádzať namiesto axiómy Z6.

Dôkaz. Zo Z6 máme, že $\angle A \cong \angle A'$ a $\angle C \cong \angle C'$. Treba ešte ukázať, že $AC \cong A'C'$.

- Sporom, nech $AC \ncong A'C'$.

(1) Nech $C'' \in \overrightarrow{A'C'}$ je taký bod, že $AC \cong A'C''$, teda $C'' \neq C'$.

- Uvažujme teraz trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C''$. V nich $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C''$ a $\angle BAC \cong \angle B'A'C''$.
- Potom podľa Z6 $\angle ABC \cong \angle A'B'C''$, spor so Z4 (snáď by sme už vedeli vypracovať do detailov, že $\overrightarrow{B'C'}$ a $\overrightarrow{B'C''}$ sú dve rôzne polpriamky na tej istej strane $\overleftrightarrow{A'B'}$).
- Preto podľa Z5 je $\angle A'B'C' \cong \angle A'B'C''$,
- a tak zo Z6 $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'C''}$.
- Potom $C'' = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{B'C'} = C'$ je spor s (1).

□

Axióma Z6 dáva do súvisu zhodnosť úsečiek a uhlov. Euklides sa snažil sus ukázať (tvrdenie I.4 v Základoch) bez axiómy Z6. No dôkaz je problematický, používa tzv. princíp superpozície, ale nikde nie je zaručené, že posúvaním a otáčaním sa dĺžky a veľkosti uhlov nezmenia!

Axióma Z6 je naozaj nezávislá od ostatných axióm:

Príklad 4.4. Rovina $\mathbb{R}^2$ s taxikárskou metrikou pre meranie úsečiek (= Manhattanská metrika, L_1 metrika) a štandardným meraním uhlov.

Uvažujme dva trojuholníky:

- $\triangle ABC$, kde $A = (0, 2)$, $B = (0, 0)$ a $C = (2, 0)$,
- $\triangle A'B'C'$, kde $A' = (2, 0)$, $B' = (1, 1)$ a $C' = (0, 0)$.

Platí, že $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ a $\angle B \cong \angle B'$. Avšak trojuholníky nie sú zhodné, lebo $AC \ncong A'C'$.

Dôsledok (**Pappus**). *(Základy I.5) Ak v $\triangle ABC$ platí, že $AB \cong AC$, potom $\angle B \cong \angle C$.*

Dôkaz. (Pappus) Z6 aplikovaná na trojuholniky $\triangle BAC$ a $\triangle CAB$. □

Tvrdenie 4.5 (**usu**). *Ak pre trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ platí, že $AB \cong A'B'$, $\angle A \cong \angle A'$ a $\angle B \cong \angle B'$, potom sú tieto trojuholníky zhodné.*

Dôkaz. Postupuje sa podobne ako pri dokazovaní (sus). Ukážeme, že $AC \cong A'C'$.

- Nech $C'' \in \overrightarrow{A'C'}$ je bod, pre ktorý $A'C'' \cong AC$.
- Potom podľa (sus) sú trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C''$ zhodné.
- Čiže $\angle A'B'C'' \cong \angle ABC$.
- Spolu s $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ tak máme, že $\angle A'B'C' \cong \angle A'B'C''$.
- Podobne ako v dôkaze vety sus dostaneme, že $C' = C''$.

□

Dôsledok. *Ak v $\triangle ABC$ platí, že $\angle B \cong \angle C$, potom $AB \cong AC$.*

Dôkaz. (usu) aplikovaná na trojuholniky $\triangle BAC$ a $\triangle CAB$. □

4.3. Aritmetika úsečiek.

TVRDENIE 4.6 (**odčitovanie úsečiek**). *Nech $A*B*C$, $A'*B'*C'$. Ak $AB \cong A'B'$ a $AC \cong A'C'$, potom $BC \cong B'C'$.*

Ide o Euklidovu axiómu „ak od rovných odčítame rovné, sú aj celky rovné". Euklides tieto axiómy (všeobecné pojmy) formuloval príliš vágne na to, aby sa dalo ukazovať, že sú závislé.

Dôkaz.

- Sporom, predpokladajme, že $BC \ncong B'C'$.
- Existuje bod $X \in \overrightarrow{B'C'}$ taký, že $B'X \cong BC$ (Z1); z predpokladu zrejme $X \neq C'$.
- Keďže $AB \cong A'B'$, dostávame $AC \cong A'X$ (Z3).
- Z $AC \cong A'C'$ potom máme $A'C' = A'X$ (Z2).
- Odtiaľ $X = C'$ (Z1), spor.

□

Vedeli by sme porovnať úsečky, ktoré majú spoločný jeden z koncových bodov a ležia na tej istej polpriamke so začiatkom v spoločnom bode. Chceme teraz usporiadanie rozšíriť tak, aby sme vedeli porovnať ľubovoľné dve úsečky. Nasledovné tvrdenie nám umožní porovnávať ľubovoľné úsečky. Pri porovnávaní úsečiek ich budeme prenášať na spoločnú polpriamku a potrebujeme mať istotu, že výsledok nebude závisieť od toho, na ktorú polpriamku úsečky prenesieme.

TVRDENIE 4.7 (**porovnávanie úsečiek**). *Nech $AC \cong A'C'$. Potom pre každý bod B taký, že $A*B*C$ existuje práve jeden bod B' taký, že $A'*B'*C'$ a $AB \cong A'B'$.*

Dôkaz.

- Z axiómy Z1 vieme, že na $\overrightarrow{A'C'}$ existuje práve jeden bod B' taký, že $A'B' \cong AB$. Potrebujeme ukázať, že B' leží medzi A' a C' (toto je nové oproti axióme Z1).
- Ak $B' = C'$, potom $AB \cong A'B' \cong A'C' \cong AC$, kde B a C sú dva rôzne body na tej istej polpriamke, spor s axiómou Z1.
- Ostáva vylúčiť možnosť $A'*C'*B'$. Ak by nastala, tak na polpriamke opačnej k $\overrightarrow{CA}$ zostrojme bod X taký, že $CX \cong C'B'$.
- Podľa Z3 potom $AX \cong A'B'$.
- Máme teda dva rôzne body B a X na spoločnej polpriamke, že $AB \cong AX$, spor s axiómou Z1.
- $A'*B'*C'$.

□

DEFINÍCIA 4.8. Hovoríme, že $AB < CD$ (prípadne, že $CD > AB$), ak medzi C a D existuje bod E taký, že $AB \cong CE$.

TVRDENIE 4.9 (**usporiadanie úsečiek**). *Relácia $<$ pre dvojice úsečiek má nasledovné vlastnosti:*

(i) *Pre ľubovoľné dve úsečky AB, CD platí práve jedna z podmienok: $AB < CD$, $CD < AB$, $AB \cong CD$ (*trichotómia*).*

(ii) *Ak* $AB < CD$ *a* $CD < EF$, *potom* $AB < EF$ *(*tranzitívnosť*).*

Teda $<$ *je* usporiadanie.

Dôkaz. (i)

- Nech X je bod na polpriamke $\overrightarrow{CD}$ taký, že $CX \cong AB$.
- Máme možnosti: $X = D$, $C{*}X{*}D$ alebo $C{*}D{*}X$, ktoré sú v poradí ekvivalentné s $AB \cong CD$, $AB < CD$ a $CD < AB$.

(ii)

- Nech X je bod medzi C, D taký, že $AB \cong CX$.
- Nech Y je bod medzi E, F taký, že $CD \cong EY$.
- Nech nakoniec Z je bod na polpriamke $\overrightarrow{EF}$ taký, že $EZ \cong CX$.
- Podľa predchádzajúceho tvrdenia máme $E * Z * Y$, a preto $E * Z * F$ (Veta 3.9).
- Keďže tiež $EZ \cong AB$, tak $AB < EF$.

□

Záver: úsečky vieme porovnávať aj usporiadať bez toho, aby sme ich merali. Tiež máme na úsečkách jednoduchú aritmetiku: vieme ich sčítavať, odčítavať.

4.4. Geometria a aritmetika uhlov.

Definícia 4.10. Dva uhly, ktoré majú spoločný vrchol, spoločné jedno rameno a druhé ramená tvoria spolu priamku, sa nazývajú *susedné.*

Veta 4.11. *Ak sú dva uhly zhodné, potom aj ich susedné uhly sú zhodné.*

Dôkaz.

- Nech $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, nech $\angle CBD$ resp. $\angle C'B'D'$ je susedný k $\angle ABC$ resp. $\angle A'B'C'$.
- Nech body A, A', C, C' na ramenách týchto uhlov a D, D' na ramenách ich susedných uhlov sú zvolené tak, že $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ a $BD \cong B'D'$.
- Potrebujeme ukázať, že $\angle CBD \cong \angle C'B'D'$.
- Trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ sú zhodné (sus),
- a teda $AC \cong A'C'$, $\angle A \cong \angle A'$.
- Platí tiež $AD \cong A'D'$ (axióma Z3),
- preto trojuholníky $\triangle ADC$ a $\triangle A'D'C'$ sú zhodné (sus).
- Odtiaľ $CD \cong C'D'$ a $\angle D \cong \angle D'$.
- $\triangle BDC \cong \triangle B'D'C'$,
- a preto $\angle CBD \cong \angle C'B'D'$.

□

Definícia 4.12. Nech polpriamky $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$ neležia na jednej priamke. Hovoríme, že polpriamka $\overrightarrow{BD}$ leží medzi polpriamkami $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$, ak D je vnútorný bod uhla $\angle ABC$.

Tvrdenie 4.13 (**sčitovanie uhlov**). *Nech v uhle $\angle ABC$ leží polpriamka $\overrightarrow{BD}$ medzi polpriamkami $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$, podobne nech v uhle $\angle A'B'C'$ leží polpriamka $\overrightarrow{B'D'}$ medzi polpriamkami $\overrightarrow{B'A'}$ a $\overrightarrow{B'C'}$. Ak $\angle ABD \cong \angle A'B'D'$ a $\angle CBD \cong \angle C'B'D'$, potom $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.*

Dôkaz.

- Z vety o priečke uhla (3.25) môžeme predpokladať, že $A * D * C$ (teda D sa dá tak zvoliť).
- Z axiómy Z1 môžeme predpokladať (môžeme A', C' a D' zvoliť tak), že $A'B' \cong AB$, $B'C' \cong BC$ a $B'D' \cong BD$.
- Potom podľa (sus) $\triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$ a $\triangle DBC \cong \triangle D'B'C'$. Preto $\angle ADB \cong \angle A'D'B'$ a $\angle CDB \cong \angle C'D'B'$.
- Keďže $\angle ADB$ a $\angle CDB$ sú susedné, sú aj uhly $\angle A'D'B'$ a $\angle C'D'B'$ susedné (axióma Z4), teda A', D', C' sú kolineárne a $A' * D' * C'$.
- Z axiómy Z3 potom $AC \cong A'C'$, čiže podľa (sus) potom $\triangle BAC \cong B'A'C'$
- a odtiaľ $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.

□

Analogicky k prípadu úsečiek sa formulujú tvrdenia o aritmetike a porovnávaní uhlov. Dôkazy všetkých nasledovných tvrdení prenechávam ako cvčenie.

Tvrdenie 4.14 (**odčitovanie uhlov**). *Nech $\overrightarrow{BD}$ leží medzi $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$ a nech $\overrightarrow{B'D'}$ leží medzi $\overrightarrow{B'A'}$ a $\overrightarrow{B'C'}$. Ak $\angle ABD \cong \angle A'B'D'$ a $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, potom $\angle DBC \cong \angle D'B'C'$*

Tvrdenie 4.15 (**porovnávanie uhlov**). *Nech $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$. Potom pre každú $\overrightarrow{BD}$ medzi $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$ existuje práve jedna $\overrightarrow{B'D'}$ medzi $\overrightarrow{B'A'}$ a $\overrightarrow{B'C'}$, že $\angle ABD \cong \angle A'B'D'$.*

Definícia 4.16. Hovoríme, že $\angle ABC < \angle DEF$ (prípadne, že $\angle DEF > \angle ABC$), ak medzi $\vec{E}D$ a $\vec{E}F$ existuje $\vec{E}X$ taký, že $\angle ABC \cong \angle DEX$.

Tvrdenie 4.17 (**usporiadanie uhlov**). *Relácia $<$ pre dvojice uhlov má nasledovné vlastnosti:*

(i) *trichotómia: pre ľubovoľné dva uhly $\angle ABC, \angle DEF$ platí práve jedna z podmienok: $\angle ABC < \angle DEF$, $\angle DEF < \angle ABC$, $\angle ABC \cong \angle DEF$,*
(ii) *tranzitívnosť: ak $\angle ABC < \angle DEF$ a $\angle DEF < \angle GHI$, potom $\angle ABC < \angle GHI$.*

Teda $<$ je usporiadanie.

4.5. Geometria trojuholníkov, pokračovanie.

Tvrdenie 4.18 (**sss**). *Ak pre trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ platí, že $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ a $AC \cong A'C'$, potom sú tieto trojuholníky zhodné.*

Dôkaz. Radi by sme ukázali, že niektorá dvojica zodpovedajúcich si uhlov je zhodná.

- V polrovine opačnej k $\overrightarrow{ABC}$ zostrojíme polpriamku $\overrightarrow{BX}$ tak, že $\angle ABX \cong \angle A'B'C'$.
- Na polpriamke $\overrightarrow{BX}$ nájdeme bod C'' taký, že $BC'' \cong B'C'$.
- Potom podľa (sus) sú trojuholníky $A'B'C'$ a ABC'' zhodné.

Z uvedenej konštrukcie vyplýva, že stačí ukázať (sss) pre trojuholníky v konfigurácii ako majú trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle ABC''$.

- Keďže body C a C'' ležia na opačných stranách od priamky $\overleftrightarrow{AB}$, úsečka CC'' ju pretína v bode D.
- Prípad $D = A$: v trojuholníku $CC''B$ máme $BC \cong BC''$, odtiaľ $\angle BCC'' \cong \angle BC''C$ (Pappus), a keďže A leží medzi C a C'', sú podľa (sus) trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle ABC''$ zhodné.
- Prípad $D = B$: tak isto.
- Prípad $A * D * B$:
  - Trojuholník ACC'' je rovnoramenný, preto $\angle ACC'' \cong \angle AC''C$ (Pappus)
  - Trojuholník BCC'' je rovnoramenný, preto $\angle BCC'' \cong \angle BC''C$ (Pappus)
  - $\angle ACB \cong \angle AC''B$ (sčítavanie uhlov), teda $\triangle ABC \cong \triangle ABC''$.
- Prípady $A * B * D, D * A * B$: analogicky (uhly sa budú odčítavať).

□

Tvrdenie 4.19 (**uus**). *Ak pre trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ platí, že $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ a $AC \cong A'C'$, potom sú tieto trojuholníky zhodné.*

Dôkaz. Dokazuje sa podobne ako sus a usu. Cvičenie. □

Definícia 4.20. *Vonkajší uhol trojuholníka* je uhol susedný s (vnútorným) uhlom trojuholníka.

Veta 4.21. *Vonkajší uhol v trojuholníku je väčší ako ľubovoľný zo zvyšných dvoch vnútorných uhlov tohto trojuholníka.*

Dôkaz. V trojuholníku $\triangle ABC$ uvažujme uhol susedný k $\angle ABC$: Nech X je bod, že $A * B * X$. Potrebujeme vylúčiť možnosti

(a) $\angle CBX \cong \angle C$,
(b) $\angle CBX < \angle C$,
(c) $\angle CBX \cong \angle A$,
(d) $\angle CBX < \angle A$

Prípad (a):

- sporom nech $\angle CBX \cong \angle C$.
- Nech $D \in \overrightarrow{BX}$ tak, že $BD \cong AC$.
- Potom $\triangle ACB \cong \triangle DBC$ (sus),
- čiže $\angle BCD \cong \angle ABC$.
- Nech Y je bod, že $A * C * Y$.
- Uhol $\angle BCY$ je susedný k $\angle ACB$, preto $\angle BCY \cong \angle ABC$ (Veta 4.11 o susedných uhloch).
- Čiže $\overrightarrow{CD}$ a $\overrightarrow{CY}$ obe zvierajú s $\overrightarrow{CB}$ rovnaký uhol, pričom body D a Y ležia na tej istej strane od $\overleftrightarrow{CB}$ (sú oba na opačnej ako A), spor so Z4.

Prípad (b):

- sporom nech $\angle CBX < \angle C$.
- Potom existuje $\overrightarrow{CZ}$ medzi $\overrightarrow{CB}$ a $\overrightarrow{CA}$ tak, že $\angle BCZ \cong \angle CBX$ (aritmetika uhlov).
- Polpriamka $\overrightarrow{CZ}$ pretína úsečku AB (veta o priečke uhla) v bode E.
- Potom v $\triangle EBC$ je vonkajší uhol pri vrchole B zhodný s vnútorným uhlom pri vrchole C, čo však podľa prípadu (a) nie je možné.

Prípady (c,d) sú analogické k (a,b). □

4.6. Pravý uhol.

Definícia 4.22. Uhol, ktorý je zhodný so svojím susedným, sa nazýva *pravý*.

Veta 4.23 (**Euklidov postulát o pravých uhloch (!)**). *Všetky pravé uhly sú navzájom zhodné.*

Dôkaz.

- Nech sú nasledovné susedné uhly zhodné: $\angle BAD \cong \angle CAD$ a $\angle B'A'D' \cong \angle C'A'D'$, teda ide o pravé uhly.
- Potom z vlastnosti trichotómie platí buď $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$ alebo $\angle BAD < \angle B'A'D'$ alebo $\angle BAD > \angle B'A'D'$. Potrebujeme vylúčiť druhú a tretiu možnosť.
- Nech $\angle BAD > \angle B'A'D'$. (Prípad $\angle BAD < \angle B'A'D'$ sa rieši analogicky.)
- Potom medzi $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AD}$ existuje polpriamka $\overrightarrow{AD''}$ tak, že $\angle BAD'' \cong \angle B'A'D'$.
- Z vety 4.11 o susedných uhloch potom tiež $\angle CAD'' \cong \angle C'A'D'$. Keďže $\angle C'A'D'$ je pravý, tak $\angle C'A'D' \cong \angle B'A'D'$, a z tranzitívnosti zhodnosti uhlov (Z5) $\angle BAD'' \cong \angle CAD''$.
- Keďže $\angle BAD \cong \angle CAD$, z tvrdenia o porovnávaní uhlov (4.15) vyplýva, že medzi $\overrightarrow{AD}$ a $\overrightarrow{AC}$ existuje polpriamka AD''' taká, že $\angle CAD''' \cong \angle BAD''$.
- Toto spolu s $\angle BAD'' \cong \angle CAD''$ dáva $\angle CAD'' \cong \angle CAD'''$, čo je spor s axiómou Z4.

□

Ešte sme neukázali, že pravý uhol vôbec existuje! To vyplynie až z tvrdenia o existencii kolmice.

Definícia 4.24. Priamky p a q sú navzájom *kolmé*, ozn. $p \perp q$, ak $p \cap q = B$ a polpriamka na p so začiatom v B zviera s polpriamkou na q so začiatkom v B pravý uhol.

Veta 4.25. *Pre danú priamku p a daný bod A existuje práve jedna priamka q prechádzajúca bodom A a kolmá na priamku p.*

Dôkaz. Existencia: Nech A neleží na priamke p.

- Nech B, C sú body na priamke p.
- Na opačnej strane od priamky p ako je bod A existuje polpriamka $\overrightarrow{BX}$ tak, že $\angle CBX \cong \angle CBA$.

- Na polpriamke $\overrightarrow{BX}$ existuje bod A' taký, že $A'B \cong AB$.
- AA' pretína p v bode D.
- Ak $D = B$, tak $AA' \perp p$ (definícia kolmosti).
- Ak $D \neq B$, tak $\triangle ABD \cong \triangle A'BD$ (sus).
- Preto $\angle ADB \cong \angle A'DB$, čiže $AA' \perp p$.

Nech A leží na priamke p.

- Existuje bod mimo priamky p.
- Podľa predchádzajúcej konštrukcie zostrojíme z neho kolmicu na p.
- Pomocou axiómy Z4 nájdeme kolmicu na p prechádzajúcu A.

Jednoznačnosť. V prípade, že A leží na priamke p jednoznačnosť vyplýva z Vety 4.23.

V prípade, že A neleží na priamke p, ak by existovali dve rôzne kolmice, mali by sme trojuholník s dvoma pravými uhlami čo by bol spor s Vetou 4.21. □

Príklad 4.26. V modeli “sféra so stotožnenými protiľahlými bodmi” vieme v niektorých prípadoch viesť z jedného bodu viac kolmíc na danú priamku (tzv. pól priamky).

4.7. Geometria na ZŠ, SŠ.

Definícia 4.27. Nech $A \neq B$. Bod $S \in \overleftrightarrow{AB}$ je stredom úsečky AB, ak $AS \cong BS$.

Tvrdenie 4.28. *Každá nenulová úsečka má práve jeden stred, a ten je jej vnútorným bodom.*

Dôkaz.

- Ak stred S existuje, tak $A * S * B$: z definície stredu nepripúšťame $S = A$ alebo $S = B$ (inak by sme nemohli hovoriť o zhodnosti úsečiek AS a BS). Ak $A * B * S$, tak na polpriamke $\overrightarrow{SA}$ máme spor so Z1.
- Jednoznačnosť: cvičenie
- Existencia: cvičenie

□

Pomocou axióm incidencie, usporiadania a zhodnosti a pomocou doteraz dokázaných tvrdení vieme ako cvičenie dokázať aj ďalšie tvrdenia, ktoré (zrejme bez dôkazu) poznáte zo základnej a strednej školy, napr.

- že existuje práve jedna os uhla,
- že v trojuholníku je oproti väčšej strane väčší uhol,
- trojuholníkovú nerovnosť.