6. Axiómy spojitosti

Príklad 6.1. Euklides I.1: Pre danú úsečku existuje rovnostranný trojuholník taký, že táto úsečka je jednou z jeho strán. Problém: nikde nie je zaručené, že konštruované kružnice sa pretnú! Napríklad v $\mathbb{Q}^2$ rovnostranný trojuholník neexistuje.

Definícia 6.2.

- Nech je daný bod S a úsečka AB. *Kružnica* so stredom S je množina bodov X takých, že $SX \cong AB$.
- *Polomer* kružnice je úsečka spájajúca stred s niektorým bodom kružnice.
- *Tetiva* je akákoľvek úsečka spájajúca dva rôzne body na kružnici.
- *Priemer* je tetiva kružnice obsahujúca jej stred.
- Nech X je bod na kružnici so stredom S. Bod Y je *vonkajším* bodom kružnice, ak $SY > SX$, a je *vnútorným* bodom kružnice, ak $SY < SX$.

Princíp spojitosti kružnice 1. Ak kružnica k_1 má bod ležiaci vnútri kružnice k_2 aj bod ležiaci zvonka kružnice k_2, potom sa kružnice k_1 a k_2 pretínajú v dvoch bodoch.

Prvý princíp zaručuje existenciu rovnostranného trojuholníka.

Princíp spojitosti kružnice 2. Ak priamka obsahuje vnútorný bod kružnice, potom táto priamka pretína kružnicu v dvoch bodoch.

Druhý princíp využíval Euklides pri konštrukcii kolmice k danej priamke z daného bodu mimo nej (Euklides I.12). Je to konštrukcia, ktorú pravdepodovne poznáte zo základnej alebo strednej školy.

Princíp spojitosti kružnice 3. Ak jeden z koncových bodov úsečky je vnútoným a druhý vonkajším bodom kružnice, potom táto úsečka kružnicu pretína.

Princípy spojitosti sú nezávislé na doposiaľ uvedených axiómach (viď Príklad 6.1), mohli by sme ich preto pridať ako axiómy. Namiesto nich však Hilbert postuloval toto:

Axiómy:

S1: **(Archimedova axióma)** Nech $A_0 * A_1 * B$. Pre $i \geq 2$ nech A_i je také, že $A_0 * A_{i-1} * A_i$ a $A_{i-1}A_i \cong A_0A_1$. Potom pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ platí, že $B = A_n$ alebo $A_{n-1} * B * A_n$.

S2: **(Axióma úplnosti)** K bodom a priamkam v rovine už nie je možné pridať ďalšie tak, aby výsledná geometria stále spĺňala všetky doteraz uvedené axiómy.

Axióma úplnosti je akousi "metaaxiómou", je to tvrdenie o vlastnosti axiomatického systému.

6.1. K Archimedovej axióme. Archimedovu axiómu môžme nazvať skôr "axiómou merateľnosti" než spojitosti. Umožňuje zaviesť pojem dĺžky úsečky: každú úsečku vieme (aspoň približne) primerať k jednotkovej úsečke (A_0A_1 v axióme).

Archimedova axióma mimo geometrie (možno poznáte z analýzy):

$$\forall u, v > 0\ \exists n \in \mathbb{N} :\ nv > u.$$

Platnosť Archimedovej axiómy nie je taká samozrejmá ako sa nám môže na prvý pohľad zdať, napr. v Kleinovom alebo Poincarého modeli hyperbolickej geometrie treba jej platnosť naozaj overiť.

6.2. W. R. Dedekind, 1871:

> **(Dedekindova axióma)** Nech všetky body na priamke pozostávajú z dvoch neprázdnych disjunktných množín tak, že žiaden bod z jednej množiny neleží medzi dvoma bodmi z druhej množiny. Potom existuje na tejto priamke práve jeden bod B taký, že jedna z daných množín je polpriamka so začiatkom v bode B a druhá množina je jej doplnkom.

Dvojica množín v Dedekindovej axióme je známa ako *Dedekindov rez*. Dedekindove rezy sa v matematike tradične používajú na *konštrukciu* reálnych čísel z racionálnych.

Pozor na rozdiel medzi Dedekindovou axiómou a separačnou vlastnosťou na priamke (U*)! Ide tam o opačné implikácie!

U reálnych čísel sa postuluje (možno poznáte z analýzy, tzv. *Dedekindov princíp*, ktorý sa zvykne formulovať ako existencia supréma):

„Ak je neprázdna množina zhora ohraničená, potom má minimálne horné ohraničenie."

(t.j. každá zhora ohraničená množina má suprémum.) Ľahko sa dá nahliadnuť, že tento postulát je ekvivalentný Dedekindovej axióme: jedna množina v reze bude množina všetkých horných ohraničení a druhá jej doplnok.

Existuje viacero ekvivalentných charakteristík spojitosti reálnych čísel, napr. v analýze sa používa aj tzv. Cantorov výrok o neprázdnosti prieniku postupnosti do seba zapadajúcich intervalov.

6.3. Závislosti medzi axiómami.

Príklad 6.3. Dedekindova axióma neplatí napr. v $\mathbb{Q}^2$. Archimedova axióma však v $\mathbb{Q}^2$ platí.

Veta 6.4. *Archimedova axióma je dôsledkom Dedekindovej axiómy.*

Dôkaz. (náčrt) Nech neplatí Archimedova axióma. Majme teda na priamke p body A, B ($A \neq B$) také, že keď nanášame úsečku AB postupne za sebou, existujú body (určite aspoň jeden), ktorý touto úsečkou „neprekročíme".

Nech $\mathcal{M}_1$ je množina všetkých „prekročiteľných" bodov (zrejme $\mathcal{M}_1 \neq \emptyset$) a nech $\mathcal{M}_2$ jej množina všetkých „neprekročiteľných" bodov (z predpokladu $\mathcal{M}_2 \neq \emptyset$). Overíme najprv, že množiny bodov $\mathcal{M}_1$ a $\mathcal{M}_2$ tvoria Dedekindov rez (presnejšie, že platí predpoklad o usporiadaní bodov v týchto dvoch množinách). Potom by mal existovať bod C, ktorý tieto dve množiny oddeľuje. Ľahko potom ale overíme (musíme uvažovať dva prípady: že $C \in \mathcal{M}_1$ a že $C \in \mathcal{M}_2$), že niektoré body množiny $\mathcal{M}_2$ sú v skutočnosti „prekročiteľné", spor. □

Dá sa ukázať, že aj axióma úplnosti (S2) je dôsledkom Dedekindovej axiómy. Obe axiómy spojitosti S1 a S2 by sme teda mohli nahradiť jedinou, Dedekindovou.

Príklad 6.5. Princípy spojitosti kružnice sú slabšie ako Dedekindova axióma: ak by sme ako axiómy spojitosti zobrali princípy spojitosti kružnice, modelom všetkých axióm by bola aj rovina $\overline{\mathbb{Q}}^2$. Avšak priamka v tejto rovine Dedekindovu axiómu nespĺňa. Taktiež nespĺňa ani Hilbertovu S2 axiómu.

VETA 6.6. *Princípy spojitosti kružnice sú dôsledkom Dedekindovej axiómy.*

Princípy spojitosti kružnice 2 a 3 sa dajú z Dedekindovej axiómy odvodiť pomerne ľahko: na priamke sa zostroja dve množiny, o ktorých sa následne ukáže, že ide o Dedekindov rez, a o bode, ktorý tieto množiny oddeľuje, sa ukáže, že musí ležať na kružnici.

Dôkaz Princípu spojitosti kružnice 1 z Dedekindovej axiómy je možné nájsť v preklade Euklidových základov od T. L. Heatha. (Komentáre v tomto preklade sú dôkladné nielen ohľadne matematického obsahu ale aj historických súvislostí.)

Niektorí autori uvádzajú namiesto pôvodných axióm spojitosti práve princípy spojitosti kružnice. Tieto princípy sú totiž postačujúce pre všetky euklidovské konštrukcie.

7. Euklidovská rovina

DEFINÍCIA 7.1. *Euklidovská rovina* je model všetkých uvedených axióm.

Voľba axióm spojitosti:

- princípy spojitosti kružnice ... viac modelov (napr. $\mathbb{R}^2, \overline{\mathbb{Q}}^2$),
- Hilbertove axiómy spojitosti prípadne Dedekindova axióma ... vďaka Archimedovej axióme vieme zaviesť súradnice, z usporiadania a úplnosti vyplýva, že súradnice budú reálne čísla ... jediný model je $\mathbb{R}^2$ (bez dôkazu). Prirodzene sa tak presúvame od syntetickej geometrie k analytickej.

DEFINÍCIA 7.2. *Euklidovská rovina* je afinná rovina $\mathbb{R}^2$ so skalárnym súčinom definovaným na jej vektorovej zložke. (Ozn. aj $\mathbb{E}^2$, pre zdôraznenie, že ide o euklidovskú rovinu.)

Keďže $\mathbb{R}^2$ je univerzálny model všetkých (Hilbertových) axióm, nejde v druhej definícii o žiadne obmedzenie.

Keď geometria spĺňa všetky Hilbertove axiómy (dôležitá je pritom Archimedova axióma), možme v nej zaviesť meranie.

DEFINÍCIA 7.3. Zobrazenie úsečiek do $\mathbb{R}$, $AB \mapsto |AB|$ sa nazýva *miera* úsečiek, ak má nasledovné vlastnosti:

- $|AB| \in \mathbb{R}^+$ pre všetky úsečky AB,
- pre všetky $x \in \mathbb{R}^+$ existuje úsečka AB taká, že $|AB| = x$,
- $|AB| = |CD|$ práve vtedy keď $AB \cong CD$,
- $|AB| < |CD|$ práve vtedy, keď $AB < CD$,
- ak $A * B * C$, potom $|AC| = |AB| + |BC|$.

Reálne číslo $|AB|$ nazývame *dĺžkou úsečky AB*.

Pri zavádzaní miery úsečiek môžeme postupovať dvoma spôsobmi:

(1) V synteticky (axiomaticky) chápanej Euklidovskej rovine (Definícia 7.1):
   (a) zhodnosť úsečiek je reláciou ekvivalencie, máme tak triedy ekvivalencie úsečiek,

(b) ukážeme, že množina tried ekvivalencie sa dá vhodne (t.j. v súlade s Definíciou 7.3) stotožniť s množinou $\mathbb{R}^+$,
(c) pre ľubovoľnú úsečku AB budeme uvažovať jej triedu ekvivalencie a kladné reálne číslo, ktorému táto trieda zodpovedá, bude dĺžka úsečky AB.

(2) V analyticky chápanej Euklidovskej rovine (Definícia 7.2) použijeme skalárny súčin:
(a) Nech skalárny súčin vetorov $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ je

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Potom pre $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2) \in \mathbb{E}^2$ bude dĺžka

$$|AB| = \sqrt{(B - A).(B - A)} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Úsečky v (analyticky chápanej) $\mathbb{E}^2$ sú (definitoricky) zhodné, keď majú rovnakú dĺžku.
(b) Overíme, že takto definovaná miera úsečiek spĺňa podmienky Definície 7.2

Podobne môžme merať aj uhly.

7.1. Bezrozpornosť Hilbertových axióm planimetrie. 20. storočie: teória množín.

Hovoríme o tzv. *relatívnej bezrozpornosti* axióm euklidovskej roviny: euklidovská geometria je bezrozporná, ak je náš jediný model v poriadku. Presnejšie, model $\mathbb{R}^2$ vychádza z teórie reálnych čísel,

- ktoré sú skonštruované pomocou Dedekindových rezov z racionálnych čísiel,
- ktoré sú skonštruované ako podielové pole prirodzených čísel,
- ktoré sú skonštruované pomocou axióm teórie množín,
- a o teórii množín všetci len dúfame, že je bezrozporná.

Ak namiesto syntetickej geometrie (vybudovanej pomocou axióm) používame analytickú (teda pracujeme s modelom $\mathbb{R}^2$), tak bod je jasne definovaný pojem. To isté priamka, incidencia, usporiadanie, zhodnosť. Nedefinovanými pojmami sú pojmy v teórii množín.

- Dnes: matematika je vybudovaná pomocou teórie množín.
- Euklides: matematika je vybudovaná pomocou geometrie.