Úloha č. 25

Na cvičení sme mali veľmi pekné riešenie úlohy 25, ktoré namiesto trigonometrie využívalo klasickú Euklidovu geometriu. Keďže na cvičení sme ho nestihli dôkladne vysvetliť celé, tu je vypracované do detailov.

Zadanie. Overte, že nasledovnou konštrukciou zostrojíme pravidelný päťuholník vpísaný do kružnice.

Daná je kružnica k so stredom S.

(1) AB je priemer kružnice k.
(2) C je taký bod na kružnici k, že $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{SC}$.
(3) D je stred úsečky AS.
(4) E je taký bod na úsečke BS, že $DE \cong DC$.
(5) Strana pravidelného päťuholníka vpísaného do k je zhodná s úsečkou EC.

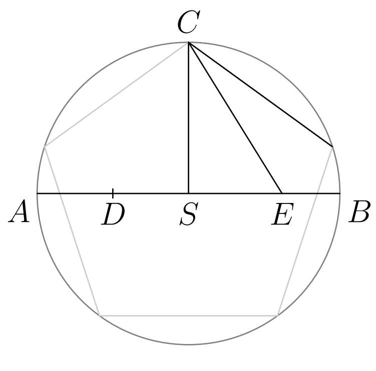
Riešenie. (Hana Holická)

Dôkaz správnosti konštrukcie pozostáva z dvoch krokov:

(1) Vypočítame dĺžku úsečky EC, ktorá je zostrojená navrhovanou konštrukciou.
(2) Vypočítame dĺžku strany pravidelného päťuholníka vpísaného do danej kružnice.

Konštrukcia je správna, ak sú obe dĺžky rovnaké.

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že daná kružnica má polomer 1, lebo ak by bol polomer iný, stačí ním len prenásobiť všetky počítané dĺžky.



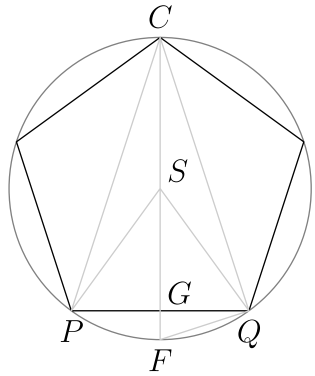
Výpočet dĺžky EC z konštrukcie.

- D je stred polomeru AS, preto $|DS| = 1/2$.
- Z Pytagorovej vety ($\triangle DSC$) máme $|DC| = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
- Keďže $|DE| = |DC|$, tak

$$|SE| = |DE| - |SD| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

- Z Pytagorovej vety ($\triangle CSE$) máme

$$|CE|^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$



Výpočet dĺžky strany pravidelného päťuholníka. Označme si

- S je stred kružnice opísanej pravidelnému päťuholníku,
- PQ je jedna zo strán pravidelného päťuholníka,
- G je stred PQ,
- C je protiľahlý vrchol v päťuholníku,
- F je druhý priesečník $\overleftrightarrow{CS}$ a kružnice.

Výpočet:

- $|\angle PSQ| = 2|\angle PCQ|$, lebo $\angle PSQ$ je stredový a $\angle PCQ$ je obvodový uhol nad PQ,
- preto $\triangle FQS$ je rovnoramenný trojuholník podobný s $\triangle PQC$.
- V oboch trojuholníkoch tak platí, že dĺžka ramena a základne sú v zlatom pomere (cvičenie 21), $|QC| : |PQ| = |QS| : |FQ| = \varphi$, kde
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$
- QS je polomer kružnice, teda $|FQ| = 1/\varphi$.
- Z Tálesovej vety je $\triangle FQC$ pravouhlý,
- preto z Pytagorovej vety $|FQ|^2 + |QC|^2 = 2^2$, a tak
$$|QC|^2 = 4 - |FQ|^2 = 4 - \frac{1}{\varphi^2}.$$
- Máme tak
$$|PQ|^2 = \frac{1}{\varphi^2}|QC|^2 = \frac{1}{\varphi^2}(4 - \frac{1}{\varphi^2}) = \frac{4\varphi^2 - 1}{\varphi^4} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$

Čiže dĺžka strany PQ pravidelného päťuholníka sa rovná dĺžke úsečky CE z uvedenej konštrukcie.