

9. BUCHBERGEROV ALGORITMUS

55. Použite Buchbergerov algoritmus na nájdenie Gröbnerovej bázy ideálu $(z - x^5, y - x^3) \subset k[x, y, z]$. Použite

- (a) lexikografické usporiadanie $(x > y > z)$,
- (b) graduované reverzné lexikografické usporiadanie.

Uveďte aj všetky výpočty a redukcie S-polynómov.

56. Buchbergerov algoritmus je zovšeobecnením špeciálnejších algoritmov, ktoré už poznáte. Skúste ich identifikovať:

- (a) Nech $I = (f, g) \subset k[x]$ je ideál v okruhu polynómov o jednej premennej. Čo viete povedať o Buchbergerovom algoritme v tomto prípade? (Vyskúšajte si na príklade: pre $I = (x^3 - 1, x^5 - 1) \subset \mathbb{R}[x]$ overte (Buchbergerovým algoritmom), či $x^3 + x^2 - 2$ patrí do I .)
- (b) Nech $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ je ideál generovaný lineárnymi polynómami (čiže popisujúci lineárnu varietu). Čo viete povedať o Buchbergerovom algoritme?

57. Nech

$$g_1 = y^3 + 3y^2z^3, \quad g_2 = xyz + 3xz^4, \quad g_3 = 4x^2z - 7y^2$$

sú polynómy v $k[x, y, z]$ a nech $I = (g_1, g_2, g_3)$ je ideál. Uvažujme lexikografické usporiadanie monómov s $x > y > z$. Je možné nájsť $g \in I$ také, že

$$\text{LT}(g) \notin (\text{LT}(g_1), \text{LT}(g_2), \text{LT}(g_3))?$$

Ak áno, nájdite taký polynóm. Ak nie, dokážte.

10. ELIMINÁCIA POMOCOU GRÖBNEROVÝCH BÁZ

58. Vyriešte pomocou Gröbnerových báz:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 4, \\ x^2 + 2y^2 &= 5, \\ xz &= 1. \end{aligned}$$

Pomôžte si nejakým systémom počítačovej algebry. Napríklad na prednáške sme si zbežne predviedli Sage (<https://sagecell.sagemath.org/>), odporúčam tiež Singular (<https://www.singular.uni-kl.de:8003/>).

59. Majme ideál

$$I = (x^2 + y^2 + z^2 + 2, 3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 5) \subset k[x, y, z].$$

Nech

$$I_1 = I \cap k[y, z].$$

je prvý eliminačný ideál.

- (i) Vypočítate I_1 .
- (ii) Overte, že ak $k = \mathbb{C}$, tak $V(I_1) = \pi_1(V(I))$, kde π_1 je projekcia $(a, b, c) \mapsto (b, c)$.
- (iii) Overte, že ak $k = \mathbb{R}$, tak $V(I) = \emptyset$, hoci množina $V(I_1)$ je nekonečná.