

7. RACIONÁLNE FUNKCIE A RACIONÁLNE ZOBRAZENIA

45. Nech

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

je regulárna matica. Ukážte, že racionálne zobrazenie

$$f : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1, \quad x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$$

je dominantné. Je f biracionálnou ekvivalenciou?

46. Nech X je ireducibilná varieta a nech $f : X \rightarrow Y$ je racionálne zobrazenie. Na prednáške sme uviedli (v dôkaze Vety 3.12), že f je dominantné práve vtedy, keď pullback $f^* : k[Y] \hookrightarrow k(X)$ je vnorenie.

- (a) Doplnite detaily dôkazu: treba rozpísať dôkaz implikácie “ak f^* je vnorenie, potom f je dominantné zobrazenie”.
- (b) Využívajúc (a) ukážte: Ak X je ireducibilná varieta a $f : X \rightarrow Y$ je dominantné zobrazenie, potom Y je tiež ireducibilná varieta.

47. Nech $X = V(y^2 - xz, z^2 - y^3) \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$. Rozložte X na ireducibilné komponenty. O každej komponente ukážte, že je racionálna (t.j. biracionálna s $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ pre nejaké n).

48. Kubická krivka $C = V(y^2 - x^3 - x^2) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ má v $(0, 0)$ tzv. singulárny bod. Krivku načrtnite (jej reálne body). Nájdite biracionálnu ekvivalenciu tejto krivky s afinnou priamkou. (Pomôcka: môžete postupovať podobne ako pri stereografickej projekcii kružnice. Tentokrát veďte priamky cez singulárny bod a body krivky zobrazujte napr. na priamku $x = 1$.)

49. Nech C je kubická krivka ako v predchádzajúcom príklade, $C = V(y^2 - x^3 - x^2) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$. Ukážte, že funkcia y/x nie je regulárna, t.j. $y/x \notin \mathbb{C}[C]$. V ktorých bodoch krivky C je táto funkcia regulárna?

50. Nájdite biracionálnu ekvivalenciu variet

$$\begin{aligned} X &= V(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2, \\ Y &= V(y^3 - x^4) \subset \mathbb{A}^2. \end{aligned}$$