

1. POJEM ALGEBRAICKEJ VARIETY

1. Načrtnite nasledujúce rovinné krivky (algebraické variety v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$):

- $V(x^3 - y^2)$,
- $V(x^3 + x^2 - y^2)$,
- $V(x^4 - x^2 + y^2)$,
- $V((x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2)$,

Pomôckou môže byť napríklad hľadanie prienikov krivky s rôznymi priamkami prechádzajúcimi bodom $(0, 0)$. Skúste pracovať bez pomoci systému počítačovej algebry (matlab, maple,...).

2. Popíšte algebraickú varietu $V(xy, xz, yz) \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

3. Ukážte, že jednotková kružnica v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ spolu so svojím stredom tvorí algebraickú varietu, t.j. nájdite polynomicke rovnicu, prípadne sústavu polynomických rovníc, ktorých riešením je presne daná množina.

4. Dokážte, že množina

$$\{(a, b) \mid a + b \in \mathbb{Z}\}$$

nie je algebraickou varietou v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.

5. V $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ majme množiny

$$M_1 = \{(1, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \dots, (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\}$$

$$M_2 = \{(1, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \dots, (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), \dots\}$$

O každej zistite, či je algebraickou varietou. Ak áno, popíšte ju polynomicke rovnicami. Ak nie, dokážte.

6. Rozhodnite, či bod $(1, 1, 1)$ spolu s bodom $(-1, -1, -1)$ a s bodmi $\{(0, t, 0) \mid t \in \mathbb{C}\}$ (t.j. y -os) tvoria spolu algebraickú varietu v $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$. Ak áno, popíšte ju polynomicke rovnicami. Ak nie, dokážte.

7. V priestore $\mathbb{A}^3$ majme takéto tri kružnice: všetky majú stred v počiatku súradnicovej sústavy a polomer 1, prvá leží celá v xy -rovine, druhá v yz -rovine a tretia v xz -rovine. Rozhodnite, či body týchto troch kružníc tvoria algebraickú varietu. Ak áno, popíšte ju polynomicke rovnicami. Ak nie, dokážte.

8. Uvažujme množinu A všetkých 3×3 matíc nad $\mathbb{R}$, t.j.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Túto množinu môžeme prirodzene stotožniť s afinným priestorom $\mathbb{A}^9(\mathbb{R})$, kde súradnice sú $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$.

- (a) Ukážte, že množina singulárnych matíc tvorí v tomto priestore algebraickú varietu.
- (b) Ukážte, že množina matíc v A , ktorých hodnosť je najviac 1, tvorí v tomto priestore algebraickú varietu.

9. Zistite, či v $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ plocha

$$V(3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 10xyz - 3)$$

obsahuje priamku, ktorá je prienikom rovín

$$V(x - y - 2z + 2) \quad \text{a} \quad V(2x - 2y + z + 1).$$

10. Nech $M \subset \mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ pozostáva z tých bodov komplexnej afinnej priamky, ktorých súradnica je reálna. Je množina M algebraickou varietou v $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$? Svoju odpoveď zdôvodnite.