

KAPITOLA 3

Afinné variety

1. Podielové okruhy (opakovanie)

DEFINÍCIA 1.1. Nech R_1, R_2 sú komutatívne okruhy s jednotkou. Zobrazenie $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$ sa nazýva *homomorfizmus okruhov*, ak pre všetky $u, v \in R_1$ platí

- $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$,
- $\varphi(u \cdot v) = \varphi(u) \cdot \varphi(v)$,
- $\varphi(1_{R_1}) = 1_{R_2}$.

Nech R je okruh a $I \subset R$ je ideál. Potom R/I je tiež okruh, v ktorom sú dobre definované operácie $+$ a $\cdot$.

DEFINÍCIA 1.2. Nech I je ideál v okruhu R . Okruh R/I nazývame *podielový* alebo *faktorový okruh*. Homomorfizmus $\varphi: R \rightarrow R/I, u \mapsto [u] = u + I$ sa nazýva *projekcia* R na R/I .

PRÍKLAD 1.3. Nech $R = \mathbb{Z}$ a nech $n \in \mathbb{Z}$. Potom $\mathbb{Z}/(n) = \mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ je podielový okruh, kde operácie $+$ a $\cdot$ sa vykonávajú modulo n .

2. Regulárne funkcie na afinných varietách, regulárne zobrazenia variet

Odtiaľto k bude algebraicky uzavreté pole, a teda platí Hilbertova Nullstellensatz.

2.1. Regulárne funkcie.

DEFINÍCIA 2.1. Nech $X \subset \mathbb{A}^n(k)$ je afinná algebraická varieta. Funkcia $f: X \rightarrow k$ sa nazýva *regulárna funkcia* na X , ak existuje polynóm $F \in k[x_1, \dots, x_n]$ taký, že $f(a) = F(a)$ pre všetky $a \in X$.

DEFINÍCIA 2.2. Množinu všetkých regulárnych funkcií na variete $X \subset \mathbb{A}^n$ nazývame *súradnicovým okruhom variety* X a označujeme $k[X]$.

PRÍKLAD 2.3. Polynóm F v definícii regulárnej funkcie nie je určený jednoznačne. Napríklad na kružnici $X = V(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$ polynómy $F_1 = 1$ a $F_2 = x^2 + y^2$ popisujú tú istú regulárnu funkciu.

Pozorovanie z príkladu môžeme zovšeobecniť. Nech $F \in k[x_1, \dots, x_n]$ popisuje nejakú regulárnu funkciu na variete X a nech $G \in k[x_1, \dots, x_n]$ je taký polynóm, že $G(a) = 0$ pre všetky $a \in X$, čiže $G \in I(X)$. Potom $F + G$ popisuje na X tú istú regulárnu funkciu ako F .

Algebraicky tak máme zobrazenie, ktoré $k[x_1, \dots, x_n]$ zobrazuje na regulárne funkcie na X , $\pi: k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k[X]$, kde π je reštrikcia polynómu na X . Toto zobrazenie je zjavne homomorfizmom okruhov. Jeho jadrom sú presne funkcie, ktorých hodnota všade na X je 0, t.j. je to ideál $I(X)$, ideál variety X . Ak $X = V(I)$, tak z Hilbertovej Nullstellensatz $I(X) = \sqrt{I}$.

Z predchádzajúcej diskusie tak máme

$$k[X] \cong k[x_1, \dots, x_n]/I(X).$$

Často sa práve takto súradnicový okruh variety definuje. Aj my budeme odteraz namiesto izomorfizmu písať v tomto vyjadrení rovnosť.

PRÍKLAD 2.4. Na jednotkovej kružnici $X = V(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2(k)$ je funkcia

$$f : X \rightarrow k, \quad (x, y) \mapsto x^2$$

totožná s funkciou

$$g : X \rightarrow k, \quad (x, y) \mapsto 1 - y^2.$$

Inak povedané, polynómy x^2 a $1 - y^2$ sú dva rôzne reprezentanty ten istej regulárnej funkcie v $k[X] = k[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$.

PRÍKLAD 2.5. Ak $X = \mathbb{A}^n(k)$, potom $k[X] = k[x_1, \dots, x_n]$, lebo $I(\mathbb{A}^n) = 0$.

PRÍKLAD 2.6. Ak X je jeden bod, potom $k[X] = k$.

PRÍKLAD 2.7. Nech $X = V(xy - 1) \subset \mathbb{A}^2$. Potom

$$k[X] = k[x, y]/(xy - 1) \cong k[x, x^{-1}],$$

a teda pozostáva z racionálnych funkcií tvaru $G(x)/x^n$, kde $G(x)$ je polynóm v x .

PRÍKLAD 2.8. Nech $X = V(y^2 - x^3)$. Potom každú funkciu f z $k[X]$ môžeme jednoznačne napísať v tvare $f = F_0(x) + yF_1(x)$, kde $F_0, F_1 \in k[x]$. Vyplýva to z faktu, že polynóm $G_0(x) + yG_1(x)$ reprezentuje nulu v $k[X]$ práve vtedy, keď G_0 a G_1 sú nulové polynómy v $k[x]$.

TVRDENIE 2.9. Nech $X \subset \mathbb{A}^n$ je algebraická varieta. Potom jej súradnicový okruh $k[X] = k[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ je noetherovský.

Dôkaz. Nech $J \subset k[X]$ je ideál. Potom $\pi^{-1}(J)$ je ideál v $k[x_1, \dots, x_n]$, kde π je kanonická projekcia $k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k[X]$. Keďže $k[x_1, \dots, x_n]$ je noetherovský, máme $\pi^{-1}(J) = (F_1, \dots, F_r)$ pre nejaké $F_1, \dots, F_r \in k[x_1, \dots, x_n]$. Odtiaľ ľahko ukážeme, že $J = (f_1, \dots, f_r)$, kde $f_i = \pi(F_i)$: ak $f \in J$, potom $f = \pi(F)$ pre nejaké $F \in \pi^{-1}(J)$, teda $F = G_1F_1 + \dots + G_rF_r$ pre nejaké $G_1, \dots, G_r \in k[x_1, \dots, x_n]$, a preto $f = g_1f_1 + \dots + f_rg_r$, kde $g_i = \pi(F_i)$. $\square$

POZNÁMKA 2.10. Vďaka súradnicovému okruhu variety a faktu, že je noetherovský, si môžeme na ľubovoľnej algebraickej variete definovať Zariskiho topológiu. Uzavreté množiny v nej budú spoločné korene danej sady regulárnych funkcií na X . Inak povedané, každému ideálu $J \subset k[X]$ priradíme uzavretú množinu pozostávajúcu z takých bodov a na X , pre ktoré platí, že $f(a) = 0$ pre všetky $f \in J$. Je len uvedomovacím cvičením si všimnúť, že je to presne tá istá topológia, ktorú sme získali reštrikciou Zariskiho topológie v $\mathbb{A}^n$ na varietu X (indukovaná topológia).

2.2. Regulárne zobrazenia afinných variet.

DEFINÍCIA 2.11. Nech $X \subset \mathbb{A}^n$ je afinná algebraická varieta. Zobrazenie $f : X \rightarrow \mathbb{A}^m$ je *regulárne* (*morfizmus*), ak existuje m regulárnych funkcií $f_1, \dots, f_m$ na X tak, že $f(a) = (f_1(a), \dots, f_m(a))$ pre všetky $a \in X$.

Zjednodušene povedané, zobrazenie $X \rightarrow \mathbb{A}^m$ je regulárne, ak je na úrovni súradníc popísané polynomicke. Presne ako pri regulárnych funkciách, ani tu nemáme bijekciu medzi morfizmami $X \rightarrow \mathbb{A}^m$ a m -ticami polynómov s n premennými: dve rôzne m -tice polynómov môžu popisovať ten istý morfizmus.

PRÍKLAD 2.12. Afinné zobrazenie $\mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ je regulárnym zobrazením.

PRÍKLAD 2.13. Funkcia na X je zobrazenie $X \rightarrow \mathbb{A}^1$.

PRÍKLAD 2.14. Premietanie na prvú súradnicu $(a, b) \mapsto (a)$ je regulárnym zobrazením (= morfizmom), ktoré zobrazí hyperbolu $X = V(xy - 1)$ na afinnú priamku, t.j. ide o zobrazenie $X \rightarrow \mathbb{A}^1$. Jeho obrazom je priamka bez bodu (0) .

DEFINÍCIA 2.15. Nech $X \subset \mathbb{A}^n$ a $Y \subset \mathbb{A}^m$ sú afinné algebraické variety, a nech $f : X \rightarrow \mathbb{A}^m$ je morfizmus (regulárne zobrazenie). Ak $f(X) \subset Y$ (t.j. ak pre všetky $a \in X$ je $f(a) \in Y$), tak f je *regulárnym zobrazením (morfizmom)* variety X do variety Y , $f : X \rightarrow Y$.

PRÍKLAD 2.16. Uvažujme zobrazenie $f : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^2$ dané predpisom $(a) \mapsto (a^2, a^3)$. Obrazom tohto zobrazenia je krivka $V(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2$. Ide teda aj o zobrazenie $\mathbb{A}^1 \rightarrow V(y^2 - x^3)$.

DEFINÍCIA 2.17. Regulárne zobrazenie $f : X \rightarrow Y$ je *izomorfizmus*, ak existuje regulárne zobrazenie $g : Y \rightarrow X$ také, že $g \circ f = \text{id}_X$ a $f \circ g = \text{id}_Y$. Vtedy hovoríme, že X a Y sú *izomorfné*.

PRÍKLAD 2.18. Parabola $X = V(y - x^2)$ a afinná priamka sú izomorfné: $f : \mathbb{A}^1 \rightarrow X$, $(a) \mapsto (a, a^2)$, inverzným zobrazením je $g : X \rightarrow \mathbb{A}^1$, $(a, b) \mapsto (a)$.

PRÍKLAD 2.19. Všeobecnejšie, graf ľubovoľnej polynomickej funkcie je izomorfný s afinnou pramkou.

PRÍKLAD 2.20. Zobrazenie $f : \mathbb{A}^1 \rightarrow X$, kde $X = V(y^2 - x^3)$ dané predpisom $(a) \mapsto (a^2, a^3)$ je síce regulárne, aj bijekcia, ale nie je to izomorfizmus. Aby sme sa o tom presvedčili, pokúsime sa nájsť inverzné zobrazenie $g : X \rightarrow \mathbb{A}^1$. Podľa príkladu 2.8 toto zobrazenie môžeme hľadať v tvare $g(x, y) = g_0(x) + yg_1(x)$, kde $f_0, f_1 \in k[x]$. Keďže f a g majú byť navzájom inverzné, musí platiť, že $g(f(a)) = a$ pre všetky $a \in \mathbb{A}^1$. Ale

$$g(f(a)) = g(a^2, a^3) = g_0(a^2) + a^3 g_1(a^2).$$

Prvý sčítanec na pravej strane obsahuje len členy párneho stupňa, druhý sčítanec obsahuje členy nepárneho stupňa počnúc stupňom 3. Teda $g \circ f \neq \text{id}$, inverzný morfizmus neexistuje.

2.3. Pullback regulárnej funkcie na variete. Každý afinnej algebraickej variete sme priradili jej súradnicový okruh, t.j. okruh všetkých regulárnych funkcií na variete. Teraz budeme skúmať, aký je vzťah medzi súradnicovými okruhmi, pokiaľ máme morfizmus (či dokonca izomorfizmus) medzi varietami.

Ak $f : X \rightarrow Y$ je morfizmus variet, potom vieme nájsť zobrazenie aj medzi ich súradnicovými okruhmi. Konkrétne, ak $u \in k[Y]$, t.j. $u : Y \rightarrow k$, potom zložením týchto dostávame fukciu $u \circ f : X \rightarrow k$.

TVRDENIE 2.21. Nech $X \subset \mathbb{A}^n, Y \subset \mathbb{A}^m$ sú afinné algebraické variety.

- Nech $f : X \rightarrow Y$ je morfizmus variet. Potom f indukuje homomorfizmus ich súradnicových okruhov: $f^* : k[Y] \rightarrow k[X]$, $f^*(u) := u \circ f$.
- Pre každý homomorfizmus φ súradnicových okruhov dvoch algebraických variet $k[Y] \rightarrow k[X]$ fixujúci pole k existuje morfizmus variet $f : X \rightarrow Y$ taký, že $\varphi = f^*$.

DEFINÍCIA 2.22. Homomorfizmus súradnicových okruhov f^* z tvrdenia prislúchajúci morfizmu $f : X \rightarrow Y$ nazývame *pullbackom* morfizmu f .

Dôkaz. Ak $u \in k[Y]$, t.j. u je funkcia $Y \rightarrow k$ daná polynomickey, potom $f^*(u) = u \circ f$ je funkcia $X \rightarrow k$ a zrejme je tiež daná polynomickey, keďže je zložením dvoch polynomických zobrazení. Rozpísané do detailov, ak $f : X \rightarrow Y$ je dané

$$f = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

kde $f_i \in k[X]$ a $u \in k[Y]$, $u = u(y_1, \dots, y_m)$, tak

$$f^*(u) = u(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Zobrazenie $f^* : k[Y] \rightarrow k[X]$ je homomorfizmom okruhov (len mechanické rozpisovanie).

Naopak, nech $\varphi : k[Y] \rightarrow k[X]$ je homomorfizmus okruhov. Nájdeme $f : X \rightarrow Y$ morfizmus taký, že $\varphi = f^*$.

Nech $y_1, \dots, y_m$ sú funkcie jednotlivých súradníc v $\mathbb{A}^m$ (projekcie na príslušnú súradnicu) chápané ako prvky okruhu $k[Y]$. Označme $f_1 = \varphi(y_1), \dots, f_m = \varphi(y_m)$; zrejme $f_1, \dots, f_m \in k[X]$. Pre zobrazenie $f = (f_1, \dots, f_m) : X \rightarrow \mathbb{A}^m$ potom platí, že $f^* = \varphi$, keďže obidva homomorfizmy sú zhodné na generátoroch okruhu $k[Y]$:

$$f^*(y_i) = y_i \circ f = f_i = \varphi(y_i).$$

Ostáva ukázať ešte, že $f(X) \subset Y$.

Nech $G \in I(Y)$, t.j. ak G chápeme ako prvok v $k[Y]$, tak $G = 0$. Preto $\varphi(G) = 0$ v $k[X]$. Nech teraz $a \in X$. Tento bod sa v zobrazení f zobrazí na $f(a) = (f_1(a), \dots, f_m(a))$. Potom platí, že $G(f(a)) = (G \circ f)(a) = (\varphi(G))(a) = 0$. $\square$

DÔSLEDOK. Zobrazenie $f : X \rightarrow Y$ je izomorfizmus afinných variet práve vtedy, keď $f^* : k[Y] \rightarrow k[X]$ je izomorfizmus okruhov. Variety X, Y sú izomorfné práve vtedy, keď ich súradnicové okruhy sú izomorfné.

PRÍKLAD 2.23. Nie je možné nájsť izomorfizmus $X = V(y^2 - x^3)$ a afinnej priamky $\mathbb{A}^1$. Z príkladu 2.8 totiž vyplýva, že $k[X]$ a $k[\mathbb{A}^1] = k[x]$ nie sú izomorfné.

Máme teda “pekné” zobrazenie $X \mapsto k[X]$ afinných algebraických variet do okruhov (vnorenie jednej kategórie do druhej): namiesto afinných variet môžeme pracovať s okruhmi, namiesto morfizmov variet s homomorfizmami okruhov, kde izomorfizmus variet zodpovedá izomorfizmu okruhov.

DEFINÍCIA 2.24. Izomorfizmus $f : X \rightarrow X$ sa nazýva *automorfizmom* X .

Automorfizmus variety X zodpovedá automorfizmu jeho súradnicového okruhu. Špeciálne môžeme skúmať napríklad všetky automorfizmy afinnej priamky:

PRÍKLAD 2.25. Nech $\mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$ je automorfizmus. Na strane súradnicových okruhov mu zodpovedá automorfizmus okruhu $k[\mathbb{A}^1] = k[x]$, označme ho $\alpha : k[x] \rightarrow k[x]$. Obrazom x v tomto automorfizme je polynóm $\alpha(x)$. Potom $\alpha(x)$ musí generovať celý okruh $k[x]$, špeciálne x sa musí dať vyjadriť pomocou $\alpha(x)$: $x = p(\alpha(x)) = (p \circ \alpha)(x)$, kde p je polynóm o jednej premennej. Špeciálne musí teda platiť, že $\deg(p \circ \alpha) = \deg x = 1$, kde $p \circ \alpha$ je polynóm, ktorý získame zložením polynómov p a α , a teda $\deg(p \circ \alpha) = \deg p \cdot \deg \alpha$. Odtiaľ máme, že $\deg \alpha = 1$, a preto všetky automorfizmy $\mathbb{A}^1$ sú tvaru $x \mapsto ax + b$, kde $a, b \in k$, $a \neq 0$, ide teda o množinu bijektívnych afinných zobrazení $\mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$.

PRÍKLAD 2.26. Afinná rovina $\mathbb{A}^2$ má zaujímavejšiu grupu automorfizmov ako afinná priamka. Sú to jednak afinné zobrazenia, potom zobrazenia tvaru $(x, y) \mapsto (x, y + f(x))$, $f \in k[x]$, a nakoniec všetky ich kombinácie (bez dôkazu).

3. Racionálne funkcie na variete, racionálne zobrazenia

3.1. Racionálne funkcie na variete. Rozlišovanie variet podľa izomorfizmu je príliš jemné. Chceme väčšiu triedu zobrazení než morfizmy, chceme pripustiť aj racionálne zobrazenia.

Bohužiaľ ale nie je možné tvoriť zlomky z regulárnych funkcií na ľubovoľnej variete:

PRÍKLAD 3.1. $X = V(x^2 - y^2) \subset \mathbb{A}^2$. Uvažujme na tejto variete regulárne funkcie $f = x + y$ a $g = x - y$. Obe funkcie sú nenulové, avšak ich súčin je v $k[X]$ nulový, ide o tzv. *delitele nuly*. Teda tieto funkcie sa nesmú vyskytnúť v menovateli, lebo by sme potom do menovateľa dostali aj nulu.

Problém v príklade bol spôsobený faktom, že varieta X bola reducibilná. Ak by sme však pripustili len ireducibilné variety, potom problém s deliteľmi nuly nenastane (viď Tvrdenie 2.12 predchádzajúcej kapitoly).

DEFINÍCIA 3.2. Nech R je obor integrity. *Podielovým poľom* oboru R nazývame množinu

$$\{(u, v) \mid u, v \in R, v \neq 0\} / \sim,$$

kde $(u_1, v_1) \sim (u_2, v_2)$ práve vtedy, keď $u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0$. Násobenie a sčítanie v podielovom poli definujeme:

$$\begin{aligned} (u_1, v_1) \cdot (u_2, v_2) &= (u_1 u_2, v_1 v_2) \\ (u_1, v_1) + (u_2, v_2) &= (u_1 v_2 + u_2 v_1, v_1 v_2) \end{aligned}$$

Dvojicu (u, v) tiež zapisujeme u/v .

Zrejme obor integrity R je podmnožinou svojho podielového poľa:

$$R = \{(a, 1) \mid a \in R\}.$$

DEFINÍCIA 3.3. Nech X je ireducibilná varieta. Potom podielové pole súradnicového okruhu $k[X]$ nazývame *poľom racionálnych funkcií* variety X , označujeme ho $k(X)$.

Z definície súradnicového okruhu a podielového poľa máme, že F_1/G_1 a F_2/G_2 reprezentujú tú istú racionálnu funkciu, ak $F_1 G_2 - F_2 G_1 \in I(X)$.

Racionálna funkcia na variete nie je všade definovaným zobrazením. Nemusí však byť úplne zjavné, kde je daná racionálna funkcia definovaná a kde nie.

PRÍKLAD 3.4. Nech $X = V(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2(k)$. Zistíme, v ktorých bodoch kružnice je definovaná funkcia $(x + 1)/y$. Určite je definovaná v bodoch, kde $y \neq 0$, teda všade okrem $(1, 0)$ a $(-1, 0)$. Ďalej platí

$$\frac{x+1}{y} = \frac{y(x+1)}{y^2} = \frac{y(x+1)}{1-x^2} = \frac{y(x+1)}{(1-x)(1+x)} = \frac{y}{1-x},$$

a teda funkcia je definovaná aj v bode $(-1, 0)$. (Môžte sa tiež priamo z definície podielového poľa súradnicového okruhu presvedčiť, že $(x + 1)/y$ a $y/(1 - x)$ definujú tú istú funkciu na X .)

DEFINÍCIA 3.5. Nech r je racionálna funkcia na variete X a nech $a \in X$. Funkcia r sa nazýva *regulárnou v bode* x , ak existujú také $f, g \in k[X]$, že $r = f/g$ a $g(a) \neq 0$.

TVRDENIE 3.6. Ak r je racionálna funkcia na X , ktorá je regulárna vo všetkých bodoch variety X , potom r je regulárna funkcia, t.j. $r \in k[X]$.

Dôkaz. Z predpokladu tvrdenia pre každý bod $a \in X$ máme $p_a, q_a \in k[X]$ také, že $r = p_a/q_a$, pričom $q_a(a) \neq 0$. Nech I je ideál generovaný všetkými menovateľmi: $I = (q_a \mid a \in X)$. Pretože $k[X]$ je noetherovský, platí, že $I = (q_1, \dots, q_s)$ pre nejaké $q_1, \dots, q_s \in k[X]$. Ďalej $q_1, \dots, q_s$ nemajú spoločný koreň v X , pretože potom by funkcia r nemala v tomto bode regulárnu reprezenáciu. Ak $X = V(F_1, \dots, F_r) \in \mathbb{A}^n$, potom v okruhu $k[x_1, \dots, x_n]$ to podľa Nullstellensatz znamená, že $1 \in (Q_1, \dots, Q_s, F_1, \dots, F_r)$, kde Q_i je polynóm v $k[x_1, \dots, x_n]$ reprezentujúci q_i . Máme tak

$$1 = G_1 Q_1 + \dots + G_s Q_s + H_1 F_1 + \dots + H_r F_r$$

pre nejaké $G_i, H_i \in k[x_1, \dots, x_n]$. Po premietnutí do okruhu $k[X]$ dostávame

$$1 = g_1 q_1 + \dots + g_s q_s$$

a následne po vynásobení tejto rovnosti funkciou r máme

$$r = g_1 p_1 + \dots + g_s p_s,$$

čiže $r \in k[X]$. □

3.2. Racionálne zobrazenia variet.

DEFINÍCIA 3.7. Nech $X \subset \mathbb{A}^n$, $Y \subset \mathbb{A}^m$ sú afinné algebraické variety. *Racionálne zobrazenie* $f : X \rightarrow Y$ je m -tica racionálnych funkcií $(f_1, \dots, f_m)$, pre ktorú platí, že ak všetky f_i sú regulárne v $a \in X$, tak $f(a) \in Y$. Vtedy hovoríme, že zobrazenie f je *regulárne v bode* a a bod $f(a) = (f_1(a), \dots, f_m(a))$ nazývame *obrazom bodu* a .

Morfizmy variet $X \rightarrow Y$ sú podľa tejto definície a podľa Tvrdenia 3.6 zrejme racionálne zobrazenia, ktoré sú regulárne vo všetkých bodoch variety X .

DEFINÍCIA 3.8. Racionálne zobrazenie $f : X \rightarrow Y$ je *dominantné*, ak množina $f(X)$ je hustá v Y .

DEFINÍCIA 3.9. Racionálne zobrazenie $f : X \rightarrow Y$ je *biracionálne* alebo tiež *bi-racionálna ekvivalencia*, ak je dominantné a existuje dominantné racionálne zobrazenie $g : Y \rightarrow X$ také, že $f \circ g = \text{id}_Y$ a $g \circ f = \text{id}_X$ všade, kde sú definované. Variety X a Y sa vtedy nazývajú *biracionálne ekvivalentné*.

PRÍKLAD 3.10. Videli sme už, že kubická krivka s hrotom 2.8 síce nie je izomorfná s afinnou priamkou, no je s ňou biracionálna. Inverzné zobrazenie k zobrazeniu $f : \mathbb{A}^1 \rightarrow X$, $(a) \mapsto (a^2, a^3)$ je racionálne zobrazenie $(x, y) \mapsto y/x$.

PRÍKLAD 3.11. Projekcia hyperboly $V(xy - 1) \subset \mathbb{A}^2$ na afinnú priamku $\mathbb{A}^1$ (viď Príklad 2.14) je biracionálny morfizmus: inverzným zobrazením je racionálne zobrazenie $(a) \mapsto (a, 1/a)$.

VETA 3.12. Variety X a Y sú biracionálne ekvivalentné práve vtedy, keď ich polia racionálnych funkcií sú navzájom izomorfné.

Dôkaz. Nech $f : X \rightarrow Y$ je biracionálna ekvivalencia, teda $f(X)$ je hustá v Y . Pre každú regulárnu funkciu $u \in k[Y]$ potom máme, že $u \circ f \in k(X)$ (ide o dosadzovanie racionálnych funkcií do f), toto zobrazenie budeme ako pri morfizmoch nazývať pull-backom f a označovať f^* . Zrejme f^* je homomorfizmom $k[Y] \rightarrow k(X)$. Overíme, že ide dokonca o vnorenie $k[Y]$ do $k(X)$.

Nech $f^*(u) = 0$ pre nejaké $u \in k[Y]$, t.j. $u \circ f(a) = 0$ pre všetky $a \in X$. Inými slovami to znamená, že funkcia u je nulová na $f(X)$. Ak u nie je nulová funkcia na Y ,

potom $V(u)$ je uzavretá vlastná podmnožina Y obsahujúca $f(X)$, čo je ale v rozpore s predpokladom, že f je dominantné zobrazenie.

Teda f^* je vnorenie $k[Y] \hookrightarrow k(X)$, a toto sa jednoznačne rozširuje na vnorenie $k(Y) \hookrightarrow k(X)$. Podobne ak $g : Y \rightarrow X$ je dominantné a $f \circ g, g \circ f$ sú identity na svojich definičných oboroch, máme tak, že $f^* : k(Y) \rightarrow k(X)$ je izomorfizmus polí.

Nech teraz naopak $\alpha : k(Y) \rightarrow k(X)$ je izomorfizmom polí racionálnych funkcií variet $X \subset \mathbb{A}^n$ a $Y \subset \mathbb{A}^m$. Presne ako v prípade morfizmov pomocou α zostrojíme zobrazenie $f : X \rightarrow Y$ také, že $\alpha = f^*$: zobrazenie f bude dané racionálnymi funkciami $f_i = \alpha(y_i)$, kde $y_i \in k[Y]$ je funkcia i -tej súradnice. Tak ako v prípade morfizmov, aj tu ľahko overíme, že $f^* = \alpha$ a tiež, že $f(X) \subset Y$. Z vlastnosti, že α je injektívne zobrazenie, usúdime, že f je dominantné. Rovnakým spôsobom nájdeme racionálne zobrazenie $g : Y \rightarrow X$ a následne ukážeme, že f je biracionálna ekvivalencia. $\square$

PRÍKLAD 3.13. Súradnicové okruhy hyperboly (viď Príklad 2.7) a afinnej priamky sú rôzne, teda tieto variety nie sú izomorfné. No ich podielové polia izomorfné sú, teda variety sú biracionálne ekvivalentné, ako sme už videli v Prípade 3.11.

DEFINÍCIA 3.14. Algebraická varieta, ktorá je biracionálne ekvivalentná $\mathbb{A}^n$ pre nejaké n , sa nazýva *racionálna*.

PRÍKLAD 3.15. Kružnica $X = V(x^2 + y^2 - 1)$ je racionálna krivka. Príslušné zobrazenia získame pomocou *stereografickej projekcie*: Nech $(a, b) \in X$ je pevne zvolený bod na krivke, napr. $(a, b) = (0, 1)$. Ďalej si pevne zvolíme v rovine priamku, napr. x -os. Bodom $(0, 1)$ budeme prekladať priamky. Každá taká priamka pretína kružnicu v dvoch bodoch: jedným z nich je bod $(0, 1)$, druhým je bod, ktorý biracionálnou ekvivalenciou previažeme s bodom na x -osi.

Priamka cez $(0, 1)$ a $(t, 0)$ má rovnicu $x + t(y - 1) = 0$. Jej prienik s kružnicou je bod

$$\left(\frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right),$$

čím máme dané zobrazenie $\mathbb{A}^1 \rightarrow X$. Inverzné zobrazenie $X \rightarrow \mathbb{A}^1$ nájdeme analogicky:

$$(x, y) \mapsto \frac{x}{1 - y}.$$