

KAPITOLA 2

Zariskiho topológia

1. Zariskiho topológia na $\mathbb{A}^n$

DEFINÍCIA 1.1. Nech X je množina a τ je systém podmnožín X , pre ktorý platí:

- (i) $X \in \tau, \emptyset \in \tau$,
- (ii) ak $U_1, U_2 \in \tau$, potom $U_1 \cap U_2 \in \tau$,
- (iii) ak $U_i \in \tau, i \in \mathcal{I}$, potom $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i \in \tau$.

Potom τ je *topológia na X* a (X, τ) je topologický priestor. Množiny $U \in \tau$ nazývame *otvorenými množinami*. Naopak množina $V \subset X$ je *uzavretá*, ak $X \setminus V$ je otvorená.

POZNÁMKA 1.2. Ako býva zvykom, budeme v označení upúšťať od zdôrazňovania, že topologický priestor je dvojica (X, τ) . Keď je z kontextu zrejmé, akú topológiu na množine X uvažujeme, budeme príslušný topologický priestor označovať jednoducho X .

Budeme definovať špeciálnu topológiu v afinnom priestore $\mathbb{A}^n(k)$, nazývanú *Zariskiho topológia*. V nej uzavreté množiny budú presne všetky algebraické variety v $\mathbb{A}^n(k)$, a otvorené množiny teda doplnky k algebraickým varietám. Treba však overiť, že takto definovaný systém množín naozaj tvorí topológiu. Potrebujeme ukázať

- (1) $\emptyset$ je otvorená množina,
- (2) $\mathbb{A}^n$ je otvorená množina,
- (3) ak U_1, U_2 sú otvorené, tak aj $U_1 \cap U_2$ je otvorená,
- (4) ak $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ sú otvorené, tak aj $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$ je otvorená.

Preverme teda tieto axiomy:

(1) $\mathbb{A}^n$ je algebraická varieta ($\mathbb{A}^n = V(0)$), čiže podľa našej definície je to uzavretá množina, preto prázdna množina patrí medzi otvorené množiny.

(2) $\emptyset$ je algebraická varieta ($\emptyset = V(1)$), preto podobne aj $\mathbb{A}^n$ patrí medzi otvorené množiny.

(3) Nech U_1, U_2 sú otvorené množiny, chceme ukázať, že potom aj $U_1 \cap U_2$ je otvorená. Že U_1, U_2 sú otvorené, znamená, že $U_1 = \mathbb{A}^n \setminus X_1$, kde X_1 je algebraická varieta, podobne $U_2 = \mathbb{A}^n \setminus X_2$, kde X_2 je algebraická varieta. Prienik

$$U_1 \cap U_2 = (\mathbb{A}^n \setminus X_1) \cap (\mathbb{A}^n \setminus X_2) = \mathbb{A}^n \setminus (X_1 \cup X_2).$$

Z tvrdenia 1.13 v kapitole o varietách a ideáloch (viď aj dôsledok tohto tvrdenia) vieme, že $X_1 \cup X_2$ je algebraická varieta, a teda $U_1 \cap U_2$ je otvorená množina.

(4) Nech $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ sú otvorené množiny, čiže pre všetky $i \in \mathcal{I}$ platí $U_i = \mathbb{A}^n \setminus X_i$, kde X_i sú algebraické variety. Pre zjednotenie máme

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} (\mathbb{A}^n \setminus X_i) = \mathbb{A}^n \setminus \left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} X_i \right).$$

Bod $a \in \mathbb{A}^n$ zrejme patrí prieniku $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} X_i$ práve vtedy, keď $f(a) = 0$ pre všetky $f \in \bigcup_{i \in \mathcal{I}} I_i$, teda $(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} I_i)$ je ideál popisujúci algebraickú varietu $X = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} X_i$, a teda

$$\mathbb{A}^n \setminus \left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} X_i \right) = \mathbb{A}^n \setminus V\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} I_i\right)$$

je naozaj otvorená množina.

Popíšeme si teraz túto topológiu na afinnej priamke a v afinnej rovine.

1.1. Zariskiho topológia na $\mathbb{A}^1(k)$. Algebraická varieta v $\mathbb{A}^1(k)$ je množina spoločných riešení niekoľkých polynomických rovníc: $X = V(f_1, \dots, f_r)$, $f_i \in k[x]$. Keďže však je $k[x]$ okruhom hlavných ideálov, určite existuje $f \in k[x]$ tak, že $(f_1, \dots, f_r) = (f)$, a teda $X = V(f)$. Máme len dva zásadne rôzne prípady:

- (a) Nech f je nulový polynóm, vtedy máme, že $X = V(0) = \mathbb{A}^1$.
- (b) Nech f nie je nulový polynóm, vtedy $V(f)$ je konečná (možno i prázdna) podmnožina $\mathbb{A}^1$.

Vidíme, že všetky neprázdne otvorené množiny v Zariskiho topológii na $\mathbb{A}^1$ sú doplnky konečných množín.

1.2. Zariskiho topológia na $\mathbb{A}^2(k)$. Popísať otvorené množiny v afinnej rovine je v porovnaní s priamkou omnoho komplikovanejšie. Musíme najprv trochu študovať polynómy v $k[x, y]$. V $k[x, y]$ hlavný ideál zodpovedá rovinnej algebraickej krivke. Okruh $k[x, y]$ však už nie je okruhom hlavných ideálov, preto musíme preskúmať dôkladnejšie prípad, keď je ideál generovaný viacerými polynómami.

LEMA 1.3. *Nech $f, g \in k[x, y]$, $f, g \neq 0$, nech f je ireducibilný a nech g nie je deliteľný polynómom f . Potom f a g majú len konečne veľa spoločných koreňov.*

Dôkaz. Nech f obsahuje premennú x , t.j. $f \notin k[y]$. Polynómy f a g môžeme chápať ako prvky $k(y)[x]$, teda ako polynómy jednej premennej nad poľom $k(y)$ všetkých racionálnych funkcií nad k .

Platí, že f je ireducibilný aj v $k(y)[x]$: sporom predpokladajme, že naopak $f = \tilde{f}_1 \tilde{f}_2$, kde $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in k(y)[x]$, $\deg \tilde{f}_1 \geq 1$, $\deg \tilde{f}_2 \geq 1$ (myslí sa stupeň v x). Po vynásobení rovnosti najmenším spoločným násobkom menovateľov d dostaneme rovnosť polynómov v $k[x, y]$: $df = f_1 f_2$, kde $d \in k[y]$, $1 \leq \deg_x f_1 < \deg_x f$, $1 \leq \deg_x f_2 < \deg_x f$. Keďže f je ireducibilný, musí platiť $f|f_1$ alebo $f|f_2$, čo je vzhľadom na stupne týchto polynómov pri x spor.

Ďalej rovnakým spôsobom ukážeme, že g nie je deliteľný polynómom f ani v $k(y)[x]$ (dú).

Polynómy f a g sú preto aj v $k(y)[x]$ nesúdeliteľné. Keďže $k(y)[x]$ je euklidovský okruh, z Euklidovho algoritmu dostaneme vyjadrenie $\tilde{p}f + \tilde{q}g = 1$, kde $\tilde{p}, \tilde{q} \in k(y)[x]$. Znovu po vynásobení rovnosti najmenším spoločným násobkom menovateľov máme rovnosť polynómov

$$pf + qg = d,$$

kde $p, q \in k[x, y]$ a $d \in k[y]$. Ak (a_1, a_2) je spoločný koreň f a g , potom a_2 je koreňom polynómu d . Teda máme len konečne veľa možností, akú hodnotu môže nadobúdať druhá súradnica spoločného koreňa.

Tak isto ukážeme, že existuje len konečne veľa možností pre hodnotu prvej súradnice spoločného koreňa, čím je tvrdenie lemy dokázané. $\square$

TVRDENIE 1.4. *Nech $f, g \in k[x, y]$ sú (nenulové) nesúdeliteľné polynómy. Potom $V(f, g) = V(f) \cap V(g)$ je konečná množina.*

Dôkaz. Nech $f = f_1^{e_1} \dots f_r^{e_r}$ je ireducibilný rozklad polynómu f . Zrejme

$$V(f) = V(f_1^{e_1} \dots f_r^{e_r}) = V(f_1 \dots f_r) = V(f_1) \cup \dots \cup V(f_r).$$

Teraz už len stačí aplikovať predchádzajúcu lemu na dvojice f_i, g pre $i = 1, \dots, r$. $\square$

Teraz si už môžeme popísať Zariskiho topológiu na $\mathbb{A}^2(k)$. Algebraická varieta v $\mathbb{A}^2(k)$ je množina definovaná niekoľkými polynómami: $X = V(f_1, \dots, f_r)$, $f_i \in k[x, y]$.

- (a) Ak všetky f_i sú konštanty 0, potom $X = V(0) = \mathbb{A}^2$.
- (b) Nech $f_1, \dots, f_r$ nie sú nulové polynómy. Môžeme potom predpokladať, že žiadnen z polynómov nie je nulový (po vynechaní nulového polynómu sa varieta nezmení). Predpokladajme, že tieto polynómy sú nesúdeliteľné. Potom podľa Tvrdenia 1.4 existuje len konečne veľa bodov (a_1, a_2) takých, že $f_1(a_1, a_2) = \dots = f_r(a_1, a_2) = 0$, čiže varieta X pozostáva z konečného (možno aj nulového) počtu bodov.
- (c) Nech $d \in k[x]$ je najväčší spoločný deliteľ polynómov $f_1, \dots, f_r$, stupeň $d > 0$. Potom máme polynómy $f'_1, \dots, f'_r$ také, že $f_1 = df'_1, \dots, f_r = df'_r$, pričom $\text{nsd}(f'_1, \dots, f'_r) = 1$. Skúmame ideál generovaný polynómami $f_1, \dots, f_r$:

$$(f_1, \dots, f_r) = (df'_1, \dots, df'_r) = (d)(f'_1, \dots, f'_r).$$

Preto $X = X_1 \cup X_2$, kde $X_1 = V(d)$ a $X_2 = V(f'_1, \dots, f'_r)$. Varieta X_1 je rovinná krivka a varieta X_2 pozostáva z konečného počtu bodov (viď prípad (b)).

POZNÁMKA 1.5. Tak ako vidno v prípade $\mathbb{A}^1$ a $\mathbb{A}^2$, aj v $\mathbb{A}^n$ platí, že neprázdne otvorené množiny v Zariskiho topológii sú veľmi veľké. Dokonca platí, že každé dve neprázdne otvorené množiny majú neprázdny prienik. Inými slovami, Zariskiho topológia nie je Hausdorffovská.

POZNÁMKA 1.6. Zariskiho topológia je “najhrubšia” topológia (t.j. obsahuje najmenej otvorených množín), v ktorej sú polynomicke funkcie spojité (viď Tvrdenie 1.15 v kapitole o varietách a ideáloch).

2. Rozklad variety na ireducibilné komponenty

Zariskiho topológiu môžeme definovať aj na algebraickej variete, ide o tzv. *indukovanú topológiu*. V tejto topológii je množina $U \subset X (\subset \mathbb{A}^n)$ je otvorená, ak $U = U' \cap X$, kde U' je otvorená množina v $\mathbb{A}^n$. Uzavreté množiny na variete X sú teda jej podvariety. Takže každú afinnú algebraickú varietu môžeme vnímať ako topologický priestor.

DEFINÍCIA 2.1. Algebraická varieta X sa nazýva *reducibilná*, ak existujú algebraické variety X_1, X_2 také, že $X_1, X_2 \subsetneq X$ a $X_1 \cup X_2 = X$. V opačnom prípade sa varieta X nazýva *ireducibilnou*.

Definíciu reducibilnej a ireducibilnej variety je možné jednoducho preložiť do jazyka topológie:

DEFINÍCIA 2.2. Hovoríme, že topologický priestor X je *reducibilný*, ak existujú $X_1, X_2 \subsetneq X$ uzavreté také, že $X = X_1 \cup X_2$. V opačnom prípade sa priestor X nazýva *ireducibilným*.

DEFINÍCIA 2.3. Hovoríme, že topologický priestor X je *nesúvislý*, ak existujú $X_1, X_2 \subsetneq X$ uzavreté také, že $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ a $X = X_1 \cup X_2$. V opačnom prípade sa priestor X nazýva *súvislý*.

Iná charakterizácia nesúvislého topologického priestoru je, že ide o priestor, ktorý sa dá napísať ako zjednotenie dvoch neprázdnych disjunktných otvorených množín. Je užitočné si uvedomiť, že ide o ekvivalentné charakterizácie: aby množiny X_1, X_2 spĺňali podmienky Definície 2.3, musia byť obe súčasne uzavreté aj otvorené.

POZNÁMKA 2.4. V topológii ste sa zrejme už stretli s pojmom súvislého/nesúvislého topologického priestoru, no možno už nie s pojmom reducibilného/ireducibilného. Pre ireducibilitu ste možno nemali dostatočne zaujímavý model. Skutočne, ak by sme na $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ či $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ ($n \geq 1$) uvažovali štandardnú euklidovskú topológiu, pojem reducibility je dosť nezaujímavý: afinný priestor je reducibilný, stačí ho ľubovoľnou nadrovinou rozdeliť na dva polpriestory a ku každému pridať i hranicu. Toto však nie je prípad Zariskiho topológie, ako čoskoro uvidíme.

Zjavne ireducibilný priestor je aj súvislý. Naopak to platiť nemusí.

PRÍKLAD 2.5.

- $X = V(x^2 - y^2) \subset \mathbb{A}^2$ je súvislý reducibilný priestor: $X = V(x-y) \cup V(x+y)$, kde obe podmnožiny $V(x-y)$ aj $V(x+y)$ sú ireducibilné. (Dôsledné dokazovanie, že varieta je ireducibilná, zvládneme čoskoro.)
- $X = V(z - xy, y - y^2) \subset \mathbb{A}^3$ je nesúvislý reducibilný priestor.
- $X = V(xy, yz) \subset \mathbb{A}^3$ je súvislý reducibilný priestor. Všimnime si, že na strane variet platí $V(xy, yz) = V(x, z) \cup V(y)$, a na strane ideálov zas $(xy, yz) = (x, z) \cap (y)$.
- V špeciálnom prípade, keď X je konečná množina, tak ako topologický priestor je X ireducibilná práve vtedy, keď je súvislá.
- $X = V(y^2 - x^3 - x) \subset \mathbb{A}^2$ je súvislý ireducibilný priestor.

META 2.6. Každá afinná algebraická varieta je zjednotením konečného počtu ireducibilných variet.

Dôkaz. Nech X je varieta, pre ktorú tvrdenie vety neplatí. Teda X sa dá napísať ako $X_1 \cup X'_1$, pričom tvrdenie neplatí pre niektorú z týchto podvariet, nech je to X_1 . Potom aj X_1 sa dá napísať ako $X_2 \cup X'_2$, kde zas pre niektorú z podvariet tvrdenie neplatí. Takto dostávame nekonečnú postupnosť variet

$$X \supsetneq X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq \dots$$

Tejto postupnosti zodpovedá postupnosť ideálov

$$I(X) \subsetneq I(X_1) \subsetneq I(X_2) \subsetneq \dots,$$

čo je ale v spore s faktom, že $k[x_1, \dots, x_n]$ je noetherovský okruh. $\square$

DEFINÍCIA 2.7. Rozklad variety X na ireducibilné podvariety

$$(3) \quad X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_r$$

sa nazýva *iredundantný* alebo *neskrátiteľný*, *minimálny*, ak pre žiadne i, j , $i \neq j$ neplatí $X_i \subset X_j$. V takomto rozklade potom nazývame jednotlivé ireducibilné podvariety *kompontami variety* X .

Inými slovami, rozklad variety je neskrátiteľný, ak žiadnu podvarietu nemôžeme zo zápisu (3) vynechať.

META 2.8. Iredundantný rozklad variety na konečné zjednotenie ireducibilných podvariet je jednoznačný.

Dôkaz. Nech $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_r$ a tiež $X = X'_1 \cup X'_2 \cup \dots \cup X'_s$ sú neskrátiteľné rozklady variety V . Platí

$$X_j = X_j \cap X = X_j \cap (X'_1 \cup X'_2 \cup \dots \cup X'_s) = \bigcup_{i=1}^s (X_j \cap X'_i).$$

Keďže X_j je ireducibilná, tak $X_j = (X_j \cap X'_i)$ pre nejaké i , a teda $X_j \subset X'_i$. Podobne ukážeme, že $X'_i \subset X_l$ pre nejaké l . Odtiaľ potom $X_j \subset X_l$. Z neskrátiteľnosti rozkladu potom máme $X_l = X_i$ a teda aj $X'_i = X_j$. Takto ukážeme pre každú komponentu, že sa nachádza v oboch rozkladoch. Odtiaľ potom už vyplýva tvrdenie vety. $\square$

Teraz chceme skúmať, ako sa reducibilnosť či ireducibilnosť algebraickej variety odrazí na strane ideálov.

Pripomeňme, že ideál $I \subset R$ v okruhu R sa nazýva *prvoideálom*, ak pre všetky $f, g \in R$ také, že $fg \in I$ platí, že $f \in I$ alebo $g \in I$.

PRÍKLAD 2.9. V okruhu $\mathbb{Z}$ je (p) prvoideálom práve vtedy, keď je p prvočíslo.

PRÍKLAD 2.10. V okruhu $\mathbb{C}[x]$ máme:

- $(x^2 - 1)$ nie je prvoideál,
- $(x - 1)$ je prvoideál.

TVRDENIE 2.11. V okruhu $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ je (f) prvoideálom práve vtedy, keď je f ireducibilným polynómom.

Dôkaz. Nech f nie je ireducibilný: $f = f_1 f_2$, $\deg f_i \geq 1$. Vtedy $f_1 f_2 \in (f)$, ale $f_1 \notin (f)$, $f_2 \notin (f)$: keby platilo $f_1 \in (f)$, teda $f_1 = gf$ pre nejaké $g \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Vtedy $f_1 = gf = gf_1 f_2 = (gf_2)f_1$, teda gf_2 je konštanta, čo však nie je možné, lebo $\deg f_2 \geq 1$.

Nech f je ireducibilný a nech $f_1 f_2 \in (f)$, teda $f_1 f_2 = hf$ pre nejaké $h \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Z ireducibility f potom ale máme, že $f \mid f_1$ alebo $f \mid f_2$, čo ale znamená, že $f_1 \in (f)$ alebo $f_2 \in (f)$, teda (f) je prvoideál. $\square$

TVRDENIE 2.12. Nech $X \subset \mathbb{A}^n(k)$ Nasledovné tvrdenia sú ekvivalentné:

- (i) X je ireducibilná varieta.
- (ii) $I(X)$ je prvoideál.
- (iii) $k[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ je oborom integrity (okruhom bez deliteľov nuly).

Dôkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Nech X je ireducibilná varieta a nech $fg \in I(X)$. Označme

$$X_1 = X \cap V(f) \quad \text{a} \quad X_2 = X \cap V(g).$$

Potom zrejme $X_1 \cup X_2 \subset X$. Tiež platí, že $X \subset X_1 \cup X_2$ lebo $fg \in I(X)$: keďže $(fg)(a) = 0$ pre $a \in X$, tak platí $f(a) = 0$ (a teda $a \in X_1$) alebo $g(a) = 0$ (a teda $a \in X_2$). Ďalej z faktu, že X je ireducibilná, musí platiť, že $X = X_1$ alebo $X = X_2$; nech $X = X_1 = X \cap V(f)$, teda $X \subset V(f)$, odtiaľ $f \in I(X)$, a teda $I(X)$ je prvoideál.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Nech $I(X)$ je prvoideál a nech $X = X_1 \cup X_2$. Nech $X_1 \neq X$, teda existuje $f \in I(X_1)$, $f \notin I(X)$. Nech $g \in I(X_2)$ je ľubovoľný. Potom $fg \in I(X)$ a teda $f \in I(X)$ alebo $g \in I(X)$, čiže $g \in I(X)$. Takže $I(X) = I(X_2)$ a preto $X = X_2$, čiže X je ireducibilná.

(iii) je v podstate len preformulovaním tvrdenia (ii): Nech $I(X)$ nie je prvoideál, t.j. existujú f, g také, že $f \notin I(X)$, $g \notin I(X)$ a $fg \in I(X)$. Potom f, g chápané ako prvky $k[X]$ sú nenulové, a s nulovým súčinom. Naopak, nech $f, g \in k[X]$ sú delitele nuly, t.j. $f, g \notin I(X)$ a $fg \in I(X)$, čo však znamená, že $I(X)$ nie je prvoideál. $\square$

PRÍKLAD 2.13. Pre ireducibilné variety v Prípade 2.5 teraz už vieme ukázať, že sú naozaj ireducibilné. Podobne o reducibilných varieties, že komponenty v rozklade sú naozaj ireducibilné.

PRÍKLAD 2.14. Afinný priestor $\mathbb{A}^n$ je ireducibilný. Pre $\mathbb{A}^1$ a $\mathbb{A}^2$ to vyplýva už z našej znalosti Zariskiho topológie. Všeobecne pre $\mathbb{A}^n$ z faktu, že $I(\mathbb{A}^n) = (0)$, a vieme, že (0)

je prvoideál. Ekvivalentne (viď Tvrdenie 2.12):

$$k[x_1, \dots, x_n]/I(\mathbb{A}^n) = k[x_1, \dots, x_n]/(0) = k[x_1, \dots, x_n]$$

nemá delitele nuly.

PRÍKLAD 2.15. Prienik ireducibilných variet nemusí byť ireducibilná varieta. Teda ireducibilné polynómy nemusia určovať ireducibilnú varietu: $V(xy - z^2, z)$ je reducibilná.