Metódy výpočtu normál pre konštrukciu interpolantov nad trojuholníkovou sieťou

Róbert Bohdal

Abstrakt
V tomto článku porovnáme niekoľko vybraných metód pre určenie normálových vektorov v daných bodoch, ktoré sú potrebné pre konštrukciu lokálnych interpolantov nad trojuholníkovou sieťou. Hodnoty normál v bodoch tvoriacich trojuholníkovú sieť majú veľký vplyv na výsledný tvar a hladkosť vytvorenej interpolačnej plochy. Vyčíslime odchýlku vypočítaných normál od normál určených pomocou parciálnej derivácie ako i presnosť s akou sa interpolačné plochy zhodujú s testovacími funkciami. Z našich testov vyplýva, že najlepšie výsledky pre výpočet normál dosahuje metóda využívajúca tenkostenné splajny. Metóda využívajúca vážený priemer, ktorá bola vytvorená kombináciou Littleho a Maxovej metódy, dosiahla druhú najlepšiu presnosť.

Kľúčové slová: výpočet normál, interpolácia nerovnomerne rozložených dát, tenkostenný splajn, Clough-Tocher, Powell-Sabin

Abstract
In this article, we compare selected methods for the estimation of normal vectors, which are necessary for the construction of interpolants above the triangular network. The values of normals in individual points of the triangular network greatly affect the shape and the smoothness of the resulting interpolation surface. We compare the individual methods on in-advance given (calculated) normals of the test functions and on the accuracy with which the interpolation surfaces match the test functions. From our tests, the best results were achieved by the method of calculating normals using the local interpolation thin plate spline. The method of weighted average, which was created by combining Little's and Max's method, came the second in order.

Key words: normals calculation, scattered data interpolation, thin plate spline, Clough-Tocher, Powell-Sabin

1 Úvod

V mnohých aplikáciach sa často stretávame s problémom interpolácie nerovnomerne rozložených bodov. V prípade malého počtu zadaných bodov je najlepšie zvoliť (z pohľadu presnosti interpolácie a hladkosti výslednej plochy) tzv. globálne metódy, ktoré interpolujú vstupné body iba jedinou funkciou. Najčastejšie sa používajú metódy radiálnych bázických funkcií, medzi ktoré patria Hardyho multikvadriky (MQ), tenkostenné splajny (TPS) [2] a ďalšie [7]. Pre väčší počet vstupných bodov (rádovo niekoľko tisíc a viac) nemôžeme použiť také globálne metódy, ktoré pri vyčíslení využívajú riešenie sústav rovníc s hustými (plnými) maticami. V takom prípade je použitie lokálnych metód (aj za cenu menšej presnosti) oveľa vhodnejšie. Lokálne metódy využívajú čiastkové funkcie, ktoré interpolujú iba niekoľko bodov v určitom okolí. Príkladom takýchto metód je Cloughova-Tocherova [1, 6, 11] či Powellova-Sabinova [1, 6, 13] interpolačná metóda, interpolácia najbližším susedom (*natural neighbour interpolation*) [10] a ďalšie. Mnohé z nich vyžadujú poznať normálové vektory v daných bodoch. Keďže tieto vektory obyčajne nie sú známe, musia byť vypočítané. Kvalita vytvorených interpolačných plôch (v zmysle vizuálnej hladkosti, spojitosti, presnosti atď.) veľmi závisí na presnosti s akou sú normálové vektory určené. Parciálne derivácie, ktoré určujú gradient plochy vo zvolenom bode, majú často väčší vplyv na tvar plochy ako stupeň hladkosti či stupeň polynómov, ktorým je interpolovaná plocha určená.

Jin a kol. [8] porovnávali vybrané metódy váženého priemeru pre výpočet normál na niekoľkých testovacích plochách, pre ktoré sú známe analyticky určené normály, pričom ich porovnávacia technika je založená na kumulatívnom histograme uhlu odchýliek medzi vypočítanými a známymi normálami. Ich porovnávanie však nezahrňuje normály na obvode neuzavretých plôch.

2 Metódy pre výpočet normál

Existuje mnoho metód ako odhadnúť hodnoty normál. Najčastejšie sa používajú metódy váženého priemeru a metódy využívajúce lokálne interpolanty či aproximanty. O niečo menej často sa používajú globálne metódy, obyčajne využívajúce minimalizáciu hodnoty určitého integrálu na triangulačnej sieti. Iný prístup, ktorý je založený na lineárnej regresii a na metóde konečných diferencií, môžeme nájsť v článku [9].

Väčšina metód využíva k odhadu normál dopredu vytvorenú trianguláciu, zostrojenú zo zadaných bodov. Normály sa potom vypočítajú pomocou váženého priemeru z normál prislúchajúcich trojuholníkov. Je vhodné použiť Delaunayovu trianguláciu, ktorá minimalizuje počet „dlhých a tenkých“[1] trojuholníkoch vo vnútri siete, pretože táto triangulácia maximalizuje minimálne uhly všetkých trojuholníkov triangulácie.

Budeme hľadať metódu dostatočne robustnú vzhľadom na vstupnú sieť bodov. Často sa totiž stáva, že triangulácia vytvorená z daných bodov obsahuje na okraji „dlhé a tenké“ trojuholníky, ktoré nepriaznivo vplývajú na presnosť výpočtu normál metódami váženého priemeru. Zostrojené interpolačné plochy, ktoré tieto normály využívajú, môžu potom na okraji vytvárať nežiadúce tvary (pozri obrázok 4a).

2.1 Normály vypočítané váženým priemerom

Tieto metódy používajú dopredu vytvorenú trianguláciu vstupných bodov, ktoré má výsledná funkcia interpolovať.

Majme dané body $B_i[x_i, y_i, z_i]$, $i \in \{1, ..., n\}$ (vrcholy trojuholníkovej siete $\mathcal{T}$), z množiny daných bodov v $\mathbb{E}^3$. Potom hodnoty normál $\hat{\boldsymbol{n}}_i$ vo vrcholoch B_i môžeme odhadnúť pomocou predpisu uvedeného v [6]:

$$\hat{\boldsymbol{n}}_i = \sum_{\mathcal{N}_i} \omega_{ijk} \mathbf{n}_{\triangle ijk}, \tag{1}$$

[1]Tenké trojuholníky sú také, ktorých minimálne jeden uhol je oveľa menší oproti ostatným. Dlhé trojuholníky majú navyše dve strany výrazne dlhšie oproti ostatným trojuholníkom v sieti.

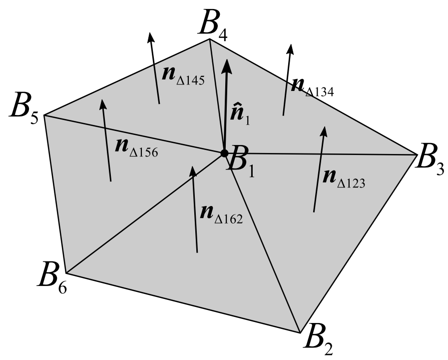
kde váha ω_{ijk} je vyjadrená vzťahom:

$$\omega_{ijk} = \frac{\sigma_{ijk}}{\sum_{\mathcal{N}_i} \sigma_{ijk}} \tag{2}$$

a kde $\mathbf{n}_{\triangle ijk}$ označuje normálu trojuholníka $B_iB_jB_k$. Suma vo vzťahu (1) je vyčíslená pre všetky trojice indexov (i, j, k) vrcholov triangulácie z množiny:

$$\mathcal{N}_i = \left\{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3; j \neq k, \text{ kde } B_j, B_k \text{ vyhovujú „kritériu výberu“}\right\}.$$

Kritérium výberu zahŕňa všetky vrcholy, ktoré buď tvoria hranu s vrcholom B_i, alebo ležia v predpísanom okolí vrcholu B_i (pozri obrázok 1).



Obr. 1. Príklad priľahlých trojuholníkov pre výpočet normály $\hat{\boldsymbol{n}}_1$ s indexmi vrcholov patriacich do množiny $\mathcal{N}_1$

Podľa [6], hodnoty σ_{ijk} vo vzťahu (2) sú určené jednou z nasledujúcich možností (pozri obrázok 2):

- Aritmetický priemer (Gouraud):
  $$\sigma_{ijk} = 1$$
  Každý trojuholník prispeje rovnakou váhou do výslednej normály.

- Prevrátená hodnota dĺžok (Little):
  $$\sigma_{ijk} = \frac{1}{|B_iB_j|^r |B_iB_k|^r}$$
  Štandardne $r = 1$, 2 alebo $1/2$. Váha závisí od prevrátenej hodnoty vzdialenosti jednotlivých vrcholov trojuholníka od bodu B_i. Čím je trojuholník dlhší, tým menej prispieva do výslednej normály.

- Uhol pri vrchole (Thurmer):
  $$\sigma_{ijk} = \alpha_i$$
  Symbol α_i označuje uhol pri vrchole B_i. Do výslednej normály prispeje najviac trojuholník, ktorý má pri tomto vrchole najväčší uhol.

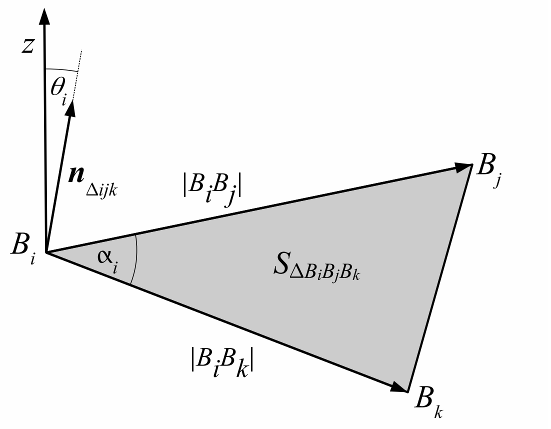
- Obsah trojuholníka (Akima):
$$\sigma_{ijk} = S_{\triangle B_i B_j B_k}$$
Trojuholník s najväčším obsahom prispeje do výslednej normály najviac. Symbol S označuje obsah trojuholníka $B_i B_j B_k$.

- Sklon plochy (Akima2):
$$\sigma_{ijk} = \cos(\theta_i) S_{\triangle B_i B_j B_k}$$
Trojuholník, ktorého normála zviera so z-ovou osou menší uhol, prispieva k výslednej normále najmenej. To zabezpečuje rovnocennosť trojuholníkov, ktoré majú v priemete do roviny xy rovnaký obsah. Symbol θ_i označuje uhol medzi osou z a $\mathbf{n}_{\triangle ijk}$.

V článku [12] autor navrhuje vypočítať σ_{ijk} vzťahom:

$$\sigma_{ijk} = \frac{\sin(\alpha_i)}{|B_i B_j|^r |B_i B_k|^r}$$

Táto metóda preferuje trojuholníky, ktorých uhol pri vrchole B_i sa blíži pravému uhlu a ktorých strany sú krátke.



Obr. 2. Prvky trojuholníka pre výpočet normál

Metódy váženého priemeru sú síce výpočtovo najmenej náročné, avšak dávajú spomedzi tu spomenutých metód najmenej presné výsledky. Sú nevhodné pre triangulácie s menším počtom vrcholov, v ktorých sa sklon trojuholníkov často mení.

2.2 Normály vypočítané pomocou lokálnej interpolácie alebo aproximácie

Ďalšou možnosťou určenia normály v bode B_i je preložiť týmto bodom lokálnu funkciu $f_i(x, y)$, ktorá interpoluje resp. aproximuje množinu „blízkych susedov“ bodu B_i, a normálu vypočítať pomocou parciálnych derivácií:

$$\hat{\boldsymbol{n}}_i = \left(\frac{\partial f_i(x_i, y_i)}{\partial x}, \frac{\partial f_i(x_i, y_i)}{\partial y}, -1 \right)$$

V práci [16] je porovnaných niekoľko typov lokálnych funkcií, medzi ktoré patria:

- Shepardov interpolant:

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x,y) z_i,$$

kde váha ω_i je vyjadrená vzťahom $\omega_i(x,y) = \frac{d_i^2(x,y)}{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x,y)}$ a $d_i^2(x,y) = (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2$

- Hardyho MQ interpolant:

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} c_i \sqrt{d_i^2(x,y) + R^2},$$

kde hodnota R^2 je daný tvarovací parameter a neznáme c_i sú vypočítané zo sústavy rovníc daných interpolačnou podmienkou $f(x_i, y_i) = z_i$

- lineárna polynomická funkcia určená metódou najmenších štvorcov

- kvadratická polynomická funkcia určená metódou najmenších štvorcov

Podľa testov uskutočnených Steadom, najlepšie výsledky dosahuje Hardyho MQ interpolant.

V článku [14] je uvedená metóda, podľa ktorej normálu vo vrchole B_i určíme pomocou parciálnych derivácií kvadratickej polynomickej funkcie $f(x,y) = z_i + a(x-x_i)^2 + b(x-x_i)(y-y_i) + c(y-y_i)^2 + d(x-x_i) + e(y-y_i)$, ktorá interpoluje vrchol B_i a aproximuje množinu „blízkych vrcholov“ v zmysle metódy najmenších štvorcov. Každému vrcholu B_j z množiny blízkych vrcholov je priradená váha ω_j tak, aby vrcholy najviac vzdialené od B_i prispievali k výslednej hodnote derivácie čo najmenej:

$$\omega_j = \frac{(r_i - |B_i B_j|)_+}{r_i |B_i B_j|},$$

kde r_i je polomer vplyvu okolia vrcholu B_i.

2.3 Normály vypočítané pomocou globálnych metód

Najlepšie výsledky pri odhade normál dosiahneme pomocou globálnych metód, ktoré sú založené na hľadaní minima integrálnych funkcií. Príkladom je metóda Nielsonovej siete minimálnej normy (*Nielson's minimum norm network*) [15].

Globálne metódy pre odhad normál síce dávajú lepšie výsledky ako lokálne metódy, avšak pri ich výpočte musíme riešiť systémy rovníc s väčším počtom prvkov. Navyše je tento odhad podľa [6] len o málo presnejší ako metódy využívajúce lokálne interpolanty.

3 Metódy interpolácie nerovnomerne rozložených bodov

Riešením problému interpolácie nerovnomerne rozložených bodov je nájdenie takej funkcie $f(x,y)$, pre ktorú platí:

$$f(x_i, y_i) = z_i, \text{ kde } i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

pričom $B_i[x_i, y_i, z_i]$ sú dopredu dané body v $\mathbb{E}^3$. Hľadaná funkcia musí byť spojitá a musíme vedieť vypočítať funkčnú hodnotu v ľubovoľnom bode konvexného obalu danej množiny bodov.

3.1 Tenkostenno-splajnová interpolačná metóda

Tenkostenné splajny (*thin plate splines*) patria medzi triedu polyharmonických splajnov [7]. Samotný názov „tenkostenné splajny“ zaviedol už v roku 1977 Duchon v práci [3]. Tento názov je odvodený zo vzťahu, v ktorom sa hľadá minimum integrálu opisujúceho rozloženie tzv. energie ohybu (*bending energy*) na nekonečne tenkej elastickej doske.

Interpolačná funkcia $f(x,y)$ je daná predpisom uvedeným v [4]:

$$f(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i^2(x,y)\ln(d_i^2(x,y)), \text{ kde } [x,y] \in \mathbb{E}^2.$$

Hodnoty $a_0, a_1, a_2, \lambda_i,\ i = 1,\dots,n$ sú neznáme. Môžeme ich vypočítať na základe okrajových podmienok:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = 0. \tag{4}$$

Aplikovaním interpolačných (3) a okrajových (4) podmienok môžeme vypočítať tieto neznáme hodnoty pomocou nasledovného systému rovníc:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 0 & 0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 1 & x_1 & y_1 & 0 & r_{21}^2\ln(r_{21}^2) & \cdots & r_{n1}^2\ln(r_{n1}^2) \\ 1 & x_2 & y_2 & r_{12}^2\ln(r_{12}^2) & 0 & \cdots & r_{n2}^2\ln(r_{n2}^2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & r_{1n}^2\ln(r_{1n}^2) & r_{2n}^2\ln(r_{2n}^2) & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \lambda_1/2 \\ \lambda_2/2 \\ \vdots \\ \lambda_n/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

kde $r_{ij}^2 = r_{ji}^2 = d_{ji}^2(x,y) = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2$.

3.2 Cloughova-Tocherova interpolačná metóda

Pre zostrojenie C^1 spojitého kubického Cloughovho-Tocherovho (C-T) interpolantu, musíme rozdeliť každý trojuholník vstupnej siete na tri *minitrojuholníky*, spojením jeho vrcholov s bodom ležiacim vnútri každého trojuholníka (napr. v jeho ťažisku).

Výsledná funkcia $f(x,y)$ bude C^1 spojitá plocha, pozostávajúca z kubických Bèzierovych záplat:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}(u,v,w) = {} & \boldsymbol{b}_{300}u^3 + 3\boldsymbol{b}_{210}u^2v + 3\boldsymbol{b}_{120}uv^2 + \\ & \boldsymbol{b}_{030}v^3 + 3\boldsymbol{b}_{021}v^2w + 3\boldsymbol{b}_{012}vw^2 + \\ & \boldsymbol{b}_{003}w^3 + 3\boldsymbol{b}_{102}w^2u + 3\boldsymbol{b}_{201}wu^2 + 6\boldsymbol{b}_{111}uvw. \end{aligned} \tag{5}$$

nad všetkými minitrojuholníkmi[2].

[2]Prechod z karteziánskych súradníc (x,y) na barycentrické (u,v,w) dosiahneme tak, že nájdeme minitrojuholník, v ktorom bod $[x,y]$ leží a potom vypočítame barycentrické súradnice tohto bodu vzhľadom na nájdený trojuholník.

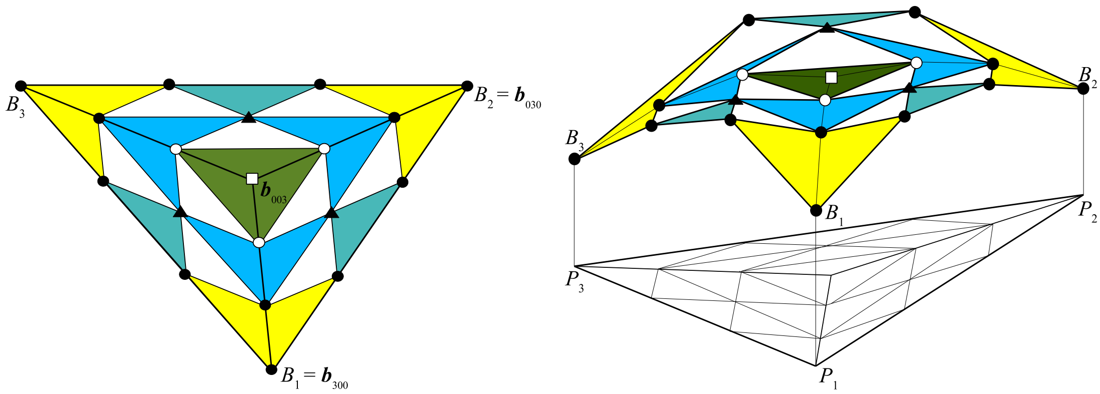
3.2.1 Výpočet riadiacich bodov Bèzierovych záplat

Bèzierove vrcholy riadiacej siete, troch stýkajúcich sa trojuholníkových záplat, vyčíslime nasledovným postupom [1, 6]:

Súradnice $[x, y]$ Bèzierovych vrcholov v každom minitrojuholníku sa nachádzajú buď vo vrcholoch minitrojuholníka, alebo v $1/3$ či v $2/3$ príslušnej hrany, prípadne v ťažisku minitrojuholníka (pozri obrázok 3).

Súradnice z týchto Bèzierovych vrcholov sú určené nasledovným postupom:

1. Súradnice z Bèzierovych vrcholov nad P_1 a P_2 označené „●" sú z-ové hodnoty bodov B_1 a B_2 z danej triangulácie.
2. Súradnice z vrcholov označených „●", ktoré ležia na hranici riadiacej siete, sú vypočítané z podmienky, že tieto vrcholy ležia v dotykovej rovine určenej bodom B_1 alebo B_2 a normálou v tomto bode.
3. Súradnice z vrcholov označených „●", ktoré ležia na spojniciach ťažiska trojuholníka s jeho vrcholmi, sú určené podmienkou, že ležia v rovine určenej jedným daným a dvoma vypočítanými bodmi „●" v predošlom kroku (pozri žlté mikrotrojuholníky na obrázku 3).
4. Súradnice z troch vrcholov označených „▲" vo vnútri minitrojuholníkov sú určené podmienkou, že ležia v rovine určenej vektorom odhadnutej priečnej derivácie[3] v strede každej z troch hrán trojuholníka $B_1B_2B_3$ a príslušnými vrcholmi „●" vypočítanými v kroku 2.
5. Súradnice z troch vrcholov označených „○" môžu byť vypočítané z podmienky, že ležia v rovine určenej dvoma vrcholmi „▲" vypočítanými v predošlom kroku a jedným vnútorným vrcholom „●" vypočítaným v kroku 2[4].
6. Posledný Bèzierovy vrchol „□", ležiaci nad ťažiskom trojuholníka $P_1P_2P_3$, leží v rovine určenej tromi vrcholmi „○", pretože tri „stredové" trojuholníky vyplnené zelenou farbou musia byť komplanárne.



Obr. 3. Konštrukcia Bèzierovych vrcholov nad tromi minitrojuholníkmi

Po určení všetkých potrebných vrcholov $\boldsymbol{b}_{ijk}$, môžeme použiť predošlý vzťah (5) na vyčíslenie akéhokoľvek bodu Bèzierovej záplaty nad konkrétnym minitrojuholníkom[5]. Uvedeným postu-

[3] Táto môže byť určená napr. ako aritmetický priemer dvoch vektorov vypočítaných vektorovým súčinom normály v zadanom bode s vektorom smeru príslušnej hrany minitrojuholníka.

[4] Pretože platí, že dva priľahlé mikrotrojuholníky tyrkysovej farby s vrcholmi „▲, ●, ○" musia byť komplanárne.

[5] Na pokrytie trojuholníka $B_1B_2B_3$ budeme teda potrebovať tri záplaty.

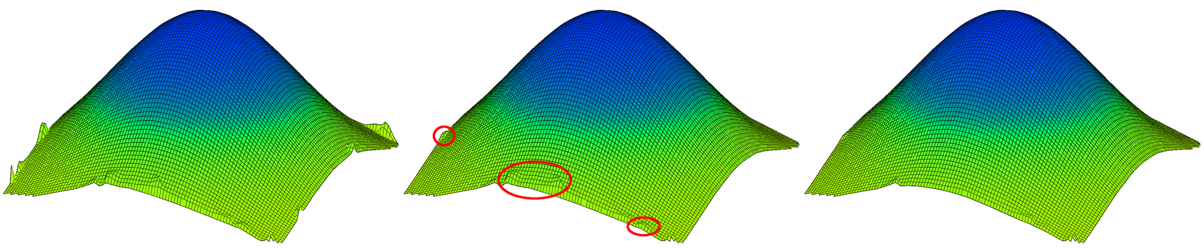
pom vypočítame trojicu záplat pre každý trojuholník vstupnej siete, čím získame C^1 spojitú interpolačnú plochu.

4 Testovanie metód

Pre testovacie účely sme použili dáta, ktoré boli vytvorené pomocou 9-tich testovacích funkcií, v ktorých vieme vypočítať normály pomocou parciálnych derivácií. K siedmim testovacím funkciám uvedeným v [5] sme pridali dve vlastné (pozri obrázok 6 a prílohu 5).

Vzorky boli vytvorené z náhodne vybraných 100, 900, 2500 a 4900 bodov ležiacich v intervale $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$, rôznych pre každú testovaciu funkciu, čím sme získali 36 rôznych vstupných triangulácií. Porovnávali sme 7 metód výpočtu normál pomocou váženého priemeru s jednou metódou používajúcou lokálny interpolačný tenkostenný splajn. Všetky metódy boli testované na počítači s procesorom Intel(R) Core(TM) i5-4670K CPU @3.40GHz a 8GB RAM. Aplikácia na výpočet normál, interpolačných plôch a nižšie uvedených odchýliek bola naprogramovaná v jazyku C++. Pre vyhodnotenie pomerne veľkého množstva údajov bol vytvorený skript v jazyku **R**, pomocou ktorého sme vytvorili výsledné grafy a obrázky uvedené v prílohe. Príklad vstupnej triangulácie a výsledné normály pre vzorku bodov vytvorených z testovacej funkcie $f_1(x,y)$ je na obrázku 5.

Niektoré z metód používajúcich vážený priemer (napr. metóda Akima) poskytujú zlé výsledky pre triangulácie obsahujúce veľmi „tenké a dlhé trojuholníky", ktoré sa často vyskytujú na okraji triangulácie (pozri obrázok 5a). Po ich odstránení sme dosiahli zlepšenie výsledkov[6], ale môže vzniknúť problém ako vypočítať hodnoty interpolačnej funkcie mimo triangulácie, ktorý je však riešiteľný. Ďalším pokusom bolo pre jednotlivé body z okraja trojuholníkovej siete nepoužívať vo váženom priemere normály, ktoré sa veľmi líšia od „priemernej" normály (pozri algoritmus 1). V tomto prípade bolo zlepšenie výsledkov miernejšie. Kombinácia oboch úprav poskytla pre menej robustné metódy výrazné zlepšenie tvaru výslednej interpolačnej plochy (pozri obrázok 4).

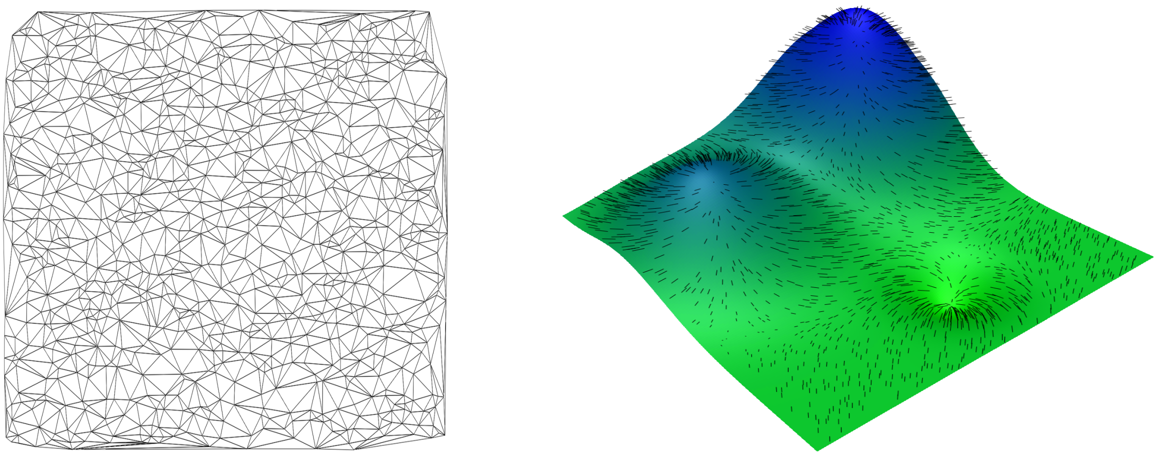


(a) Pôvodná metóda (b) Odstránené tenké trojuholníky (c) Odstránené „nevhodné" normály

Obr. 4. Demonštrácia vplyvu úpravy výpočtu normál pre výsledný tvar interpolantu určeného vzorkou bodov z testovacej funkcie $f_4(x,y)$.

V kategórií metód používajúcich vážený priemer dosiahli najlepšie výsledky Littleho a Maxova metóda. Žiadna z nich nebola výrazne lepšia (pozri grafy na obrázku 7), pre niektoré dáta bola lepšia Littleho a pre iné Maxova. Rozhodli sme sa preto obe skombinovať do jedného vzťahu

[6] Odstránili sme trojuholníky, ktorých najväčší uhol bol väčší ako 178°.



(a) Vstupná triangulácia

(b) Výsledné normály

Obr. 5. Príklad vstupnej triangulácie a vypočítaných normál metódou TPS pre vzorku bodov z testovacej funkcie $f_1(x, y)$.

Algoritmus 1 Odstránenie nevhodných normál

vstup: $num\_normals$, $triangles\_normals[]$, k

výstup: $triangles\_normals$

if $num\_normals < 5$ **then**
    return
$sum\_norm = 0$
for all $normal$ in $triangles\_normals$ **do**
    $sum\_norm += normal$
$average\_normal = sum\_norm/num\_normals$
$sum\_sqd = 0.0$
for $i = 0$ to $num\_normals$ **do**
    $square\_dif[i] = \|triangles\_normals[i] - average\_normal\|^2$
    $sum\_sqd += square\_dif[i]$
$average\_sqd = sum\_sqd/num\_normals$
for $i = 0$ to $num\_normals$ **do**
    $delta\_sqd = |square\_dif[i] - average\_sqd|$
    if $delta\_sqd > k * average\_sqd$ **then**
        odstráň $triangles\_normals[i]$ zo zoznamu

pomocou aritmetického priemeru (LittleMax):

$$\sigma_{ijk} = \frac{1 + \sin(\alpha_i)}{2|B_iB_j|^r|B_iB_k|^r}$$

čím sme dosiahli lepšiu „priemernú presnosť“ (pozri grafy na obrázku 7 a 8).

Z metód používajúcich lokálne interpolanty sme zo skupiny radiálnych bázických funkcií $\phi(d_i^2(x, y))$ namiesto Hardyho multikvadrík $\phi(d_i^2(x, y)) = \sqrt{d_i^2(x, y) + R^2}$ vybrali tenkostenné splajny $\phi(d_i^2(x, y)) = 1/2d_i^2(x, y)\ln(d_i^2(x, y))$, pretože nevyžadujú odhad parametra R^2.

V našom teste sme vypočítali:

1. odchýlky odhadnutých normál od normál vypočítaných pomocou parciálnych derivácií. Odchýlku sme vypočítali z uhla, ktorý zviera vypočítaná normála $\hat{\boldsymbol{n}}_i$ a skutočná normála

testovacej funkcie $\nabla f_t(x,y)$ v danom bode (x_i,y_i):

$$\mathrm{RMSE}_\alpha = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\arccos\left(\frac{\hat{\boldsymbol{n}}_i\cdot\nabla f_t(x_i,y_i)}{|\hat{\boldsymbol{n}}_i||\nabla f_t(x_i,y_i)|}\right)\right)^2}{n}}.$$

Výsledky sú uvedené v grafoch na obrázku 7.

2. presnosť s akou sa výsledné interpolačné plochy vytvorené Cloughovou-Tocherovou či Powellovou-Sabinovou metódou zhodujú s príslušnou testovacou funkciou. Pre test presnosti interpolačnej plochy sme odchýlku vypočítali zo štvorca rozdielu medzi funkčnou hodnotou interpolačnej funkcie $\hat{f}(x,y)$ a funkčnou hodnotou testovacej funkcie $f_t(x,y)$ pre $m = 2500$ náhodne vybratých bodov z intervalu $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$:

$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}(\hat{f}(x_i,y_i) - f_t(x_i,y_i))^2}{m}}.$$

Výsledky sú uvedené v grafoch na obrázku 8. Keďže poradie presnosti testovaných metód bolo takmer identické pre Cloughovu-Tocherovu a Powellovu-Sabinovu interpolačnú metódu, uvádzame iba výsledky v grafoch pre prvú z nich.

5 Zhodnotenie

Z testovaných metód sa podľa očakávania ukázala ako najlepšia metóda používajúca lokálny tenkosplajnový interpolant (pozri grafy na obrázkoch 7 a 8). Druhá najlepšia metóda bola vo všeobecnosti kombinácia Littleho a Maxovej metódy. Oba prístupy pre výpočet boli dostatočne robustné vzhľadom na použité vstupné dáta a vypočítali pomerne presne normály aj na okraji vstupnej siete. V prípade, že vstupných bodov je dostatočne veľa a vzdialenosti medzi nimi sú malé, je možné použiť akúkoľvek metódu, pretože odchýlky sú dostatočne malé.

Zaujímavým zistením bolo, že na rozdiel od Jin a kol. [8], kde ako najlepšia bola vyhodnotená Thurmerova metóda, bola v našich testoch Littleho a Maxova metóda, resp. ich kombinácia, pre každú testovaciu funkciu lepšia. Pravdepodobne to bolo spôsobené nielen rozdielnymi testovacími funkciami[7], ale aj tým, že Jin a kol. nezahrnuli do testov normály vypočítané na okraji triangulácie. V našom prístupe sme jednak odstránili extrémne tenké obvodové trojuholníky, ale navyše sme normály v bodoch na okraji triangulácie vypočítali s použitím algoritmu 1.

Pre aplikácie nevyžadujúce veľkú rýchlosť výpočtu normál je najvhodnejšie použiť metódu využívajúcu lokálny interpolačný tenkostenný splajn, v inom prípade doporučujeme použiť kombináciu Littleho a Maxovej metódy alebo niektorú z nich. Čas výpočtu jednotlivých metód v milisekundách je uvedený v tabuľke 1. Z tabuľky je vidno, že metóda používajúca tenkostenné splajny (TPS) je približne 5x časovo náročnejšia ako metódy používajúce vážený priemer.

[7] V našom prípade sme pre vzorku testovacích bodov používali explicitné funkcie, pretože sme sa zaoberali aj vplyvom normál na tvar skonštruovanej interpolačnej plochy. Jin a kol. používali aj implicitné funkcie guľovej plochy, torusu a ďalšie.

Metóda/počet bodov	10x10	30x30	50x50	70x70	90x90
Gouraud	0,34	7,93	43,24	169,00	436,86
Little	0,49	9,25	46,21	171,57	447,71
Thurmer	0,56	9,63	46,80	178,29	452,57
Akima	0,38	8,31	44,09	173,71	436,86
Akima2	0,53	9,56	47,90	171,71	454,57
Max	0,47	8,49	44,34	171,71	439,14
LittleMax	0,56	9,83	48,13	180,57	456,57
TPS	3,94	52,39	240,90	824,57	2025,43

Tabuľka 1. Porovnanie času výpočtov jednotlivých metód v milisekundách

Zoznam testovacích funkcií

$$f_1(x,y) = \frac{3e^{-\frac{(9y+1)^2}{10}-\frac{(9x+1)^2}{49}}}{4} + \frac{3e^{-\frac{(9y-2)^2}{4}-\frac{(9x-2)^2}{4}}}{4} + \frac{e^{-\frac{(9y-3)^2}{4}-\frac{(9x-7)^2}{4}}}{2} - \frac{e^{-(9y-7)^2-(9x-4)^2}}{5}$$

$$f_2(x,y) = \frac{1-\tanh(9y-9x)}{9}$$

$$f_3(x,y) = \frac{\cos\left(\frac{27}{5}y\right)+\frac{5}{4}}{6(3x-1)^2+6}$$

$$f_4(x,y) = \frac{e^{-\frac{81\left(\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)}{16}}}{3}$$

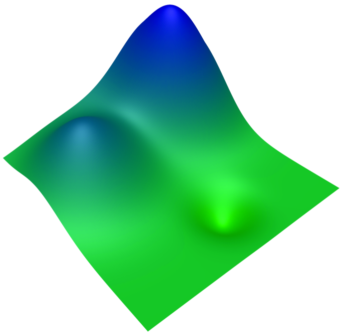
$$f_5(x,y) = \cos(10y)+\sin(10(x-y))$$

$$f_6(x,y) = \frac{\sqrt{64-81\left(\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)}}{9} - \frac{1}{2}$$

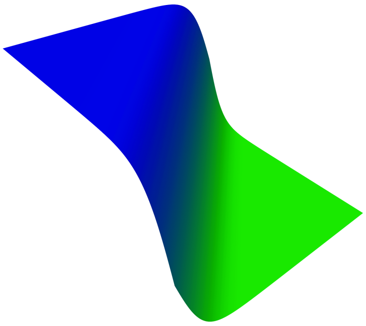
$$f_7(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2e^{-3\left(\sqrt{y^2+x^2}-\frac{67}{10}\right)}+1}}$$

$$f_8(x,y) = 50e^{-200\left(\left(y-\frac{3}{10}\right)^2+\left(x-\frac{3}{10}\right)^2\right)} + e^{-50\left(\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)}$$

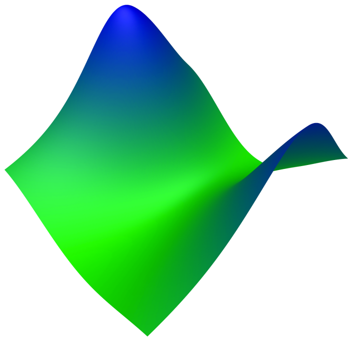
$$f_9(x,y) = \sin(\pi x)\sin(2\pi y)$$



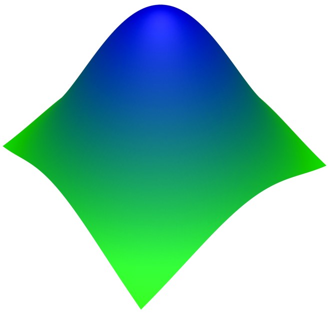
Testovacia funkcia $f_1(x, y)$



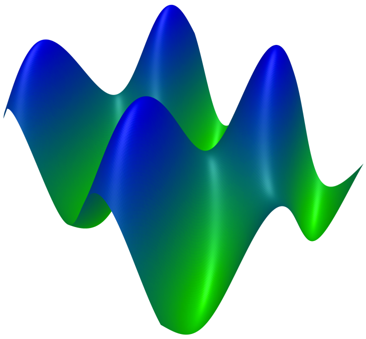
Testovacia funkcia $f_2(x, y)$



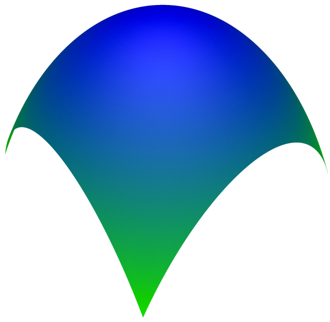
Testovacia funkcia $f_3(x, y)$



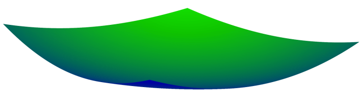
Testovacia funkcia $f_4(x, y)$



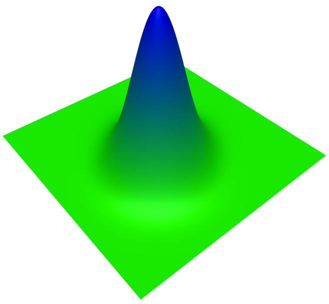
Testovacia funkcia $f_5(x, y)$



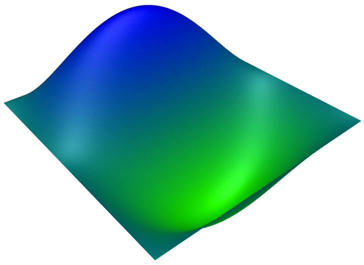
Testovacia funkcia $f_6(x, y)$



Testovacia funkcia $f_7(x, y)$



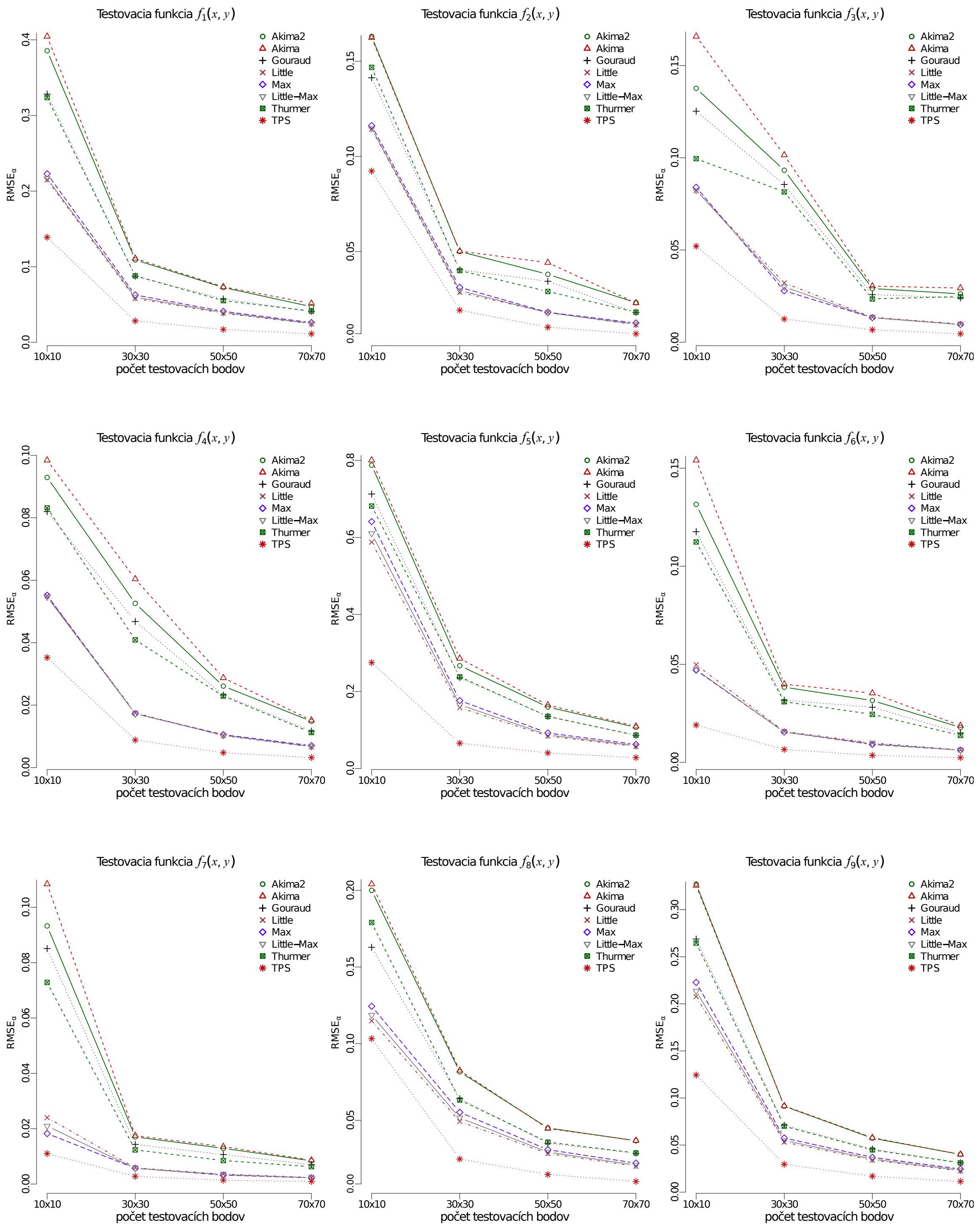
Testovacia funkcia $f_8(x, y)$



Testovacia funkcia $f_9(x, y)$

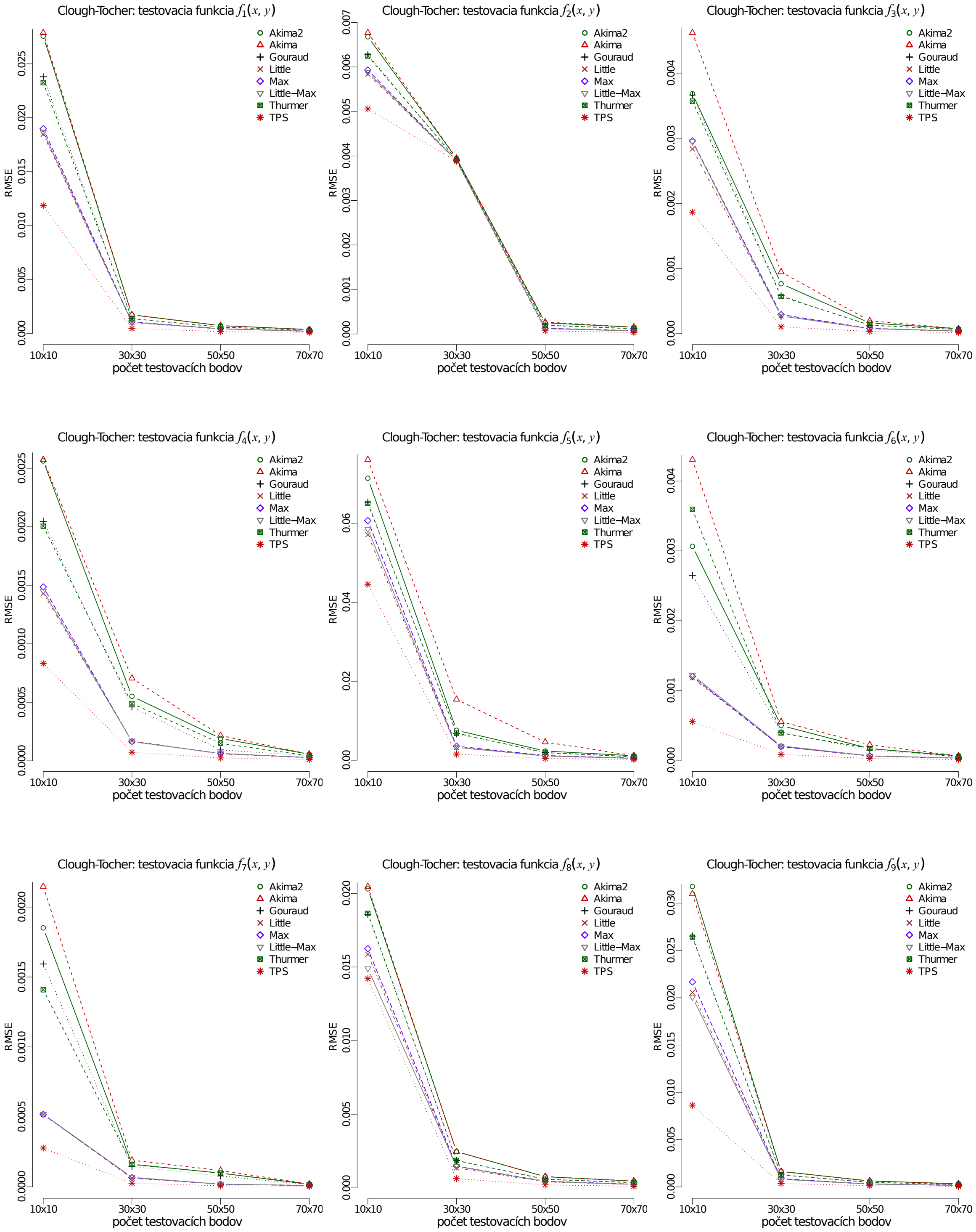
Obr. 6. Obrázky testovacích funkcií

Odchýlky medzi vypočítanými a analyticky určenými normálami



Obr. 7. Grafy odchýliek medzi vypočítanou normálou a skutočnou normálou testovacej funkcie

Odchýlky medzi C-T interpolantom a testovacou funkciou



Obr. 8. Grafy odchýliek medzi funkčnou hodnotou interpolačnej a testovacej funkcie

Literatúra

[1] Amidror, I. Scattered data interpolation methods for electronic imaging systems: a survey. *Journal of electronic imaging*, ročník 11, č. 2, 2002: s. 157–176.

[2] Bookstein, F. L., ai. Principal warps: Thin-plate splines and the decomposition of deformations. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, ročník 11, č. 6, 1989: s. 567–585.

[3] Duchon, J. Splines minimizing rotation invariant semi-norms in Sobolev spaces. V *Constructive Theory of Functions of Several Variables*, *Lecture Notes in Math.*, ročník 571, 1977, s. 85–100.

[4] Fogel, D., Tinney, L. Image registration using multiquadric functions, the finite element method, bivariate mapping polynomials and the thin plate spline. 1996.

[5] Franke, R. Scattered data interpolation: Tests of some methods. *Mathematics of computation*, ročník 38, č. 157, 1982: s. 181–200.

[6] Hoschek, J., Lasser, D. *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. Natick, MA, USA: A. K. Peters, Ltd., 1993, ISBN 1-56881-007-5.

[7] Iske, A. Radial basis functions: basics, advanced topics and meshfree methods for transport problems. *Rendiconti del Seminario Matematico, Polytechnic University of Turin*, ročník 61, č. 3, 2003: s. 247–285.

[8] Jin, S., Lewis, R. R., West, D. A comparison of algorithms for vertex normal computation. *The Visual Computer*, ročník 21, č. 1-2, 2005: s. 71–82.

[9] Jirka, T., Skala, V. Gradient Vector Estimation and Vertex Normal Computation. Technická správa, University of West Bohemia, Pilsen, 2002.

[10] Ledoux, H., Gold, C. An efficient natural neighbour interpolation algorithm for geoscientific modelling. V *Developments in Spatial Data Handling*, Springer, 2005, s. 97–108.

[11] Mann, S. Cubic precision clough-tocher interpolation. *Computer aided geometric design*, ročník 16, č. 2, 1999: s. 85–88.

[12] Max, N. Weights for computing vertex normals from facet normals. *Journal of Graphics Tools*, ročník 4, č. 2, 1999: s. 1–6.

[13] Powell, M., Sabin, M. Piecewise quadratic approximations on triangles. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, ročník 3, č. 4, 1977: s. 316–325.

[14] Renka, R., Cline, A. A triangle-based C1 interpolation method. *Rocky Mountain Journal*, 1984.

[15] Scheuermann, G., Tricoche, X., Hagen, H. C1-interpolation for vector field topology visualization. V *Visualization'99. Proceedings*, IEEE, 1999, s. 271–533.

[16] Stead, S. Estimation of gradients from scattered data. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, ročník 14, č. 1, 1984.

RNDr. Róbert Bohdal, PhD.

Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava, SR
email: bohdal@fmph.uniba.sk