

**MASARYKOVA UNIVERZITA
FAKULTA PŘÍRODOVĚDECKÁ**



Užití a zneužití fraktálů

Diplomová práce

Brno, květen 2006

Robert Wiesner

Prohlašuji, že tato práce je mým původním autorským dílem, které jsem vypracoval samostatně a použil jsem jen uvedených pramenů a literatury.

Robert Wiesner

Chtěl bych poděkovat RNDr. Zdeňkovi Pospíšilovi, Dr., vedoucímu mé diplomové práce, za cenné rady a odkazy na zdroje informací.

Obsah

Úvod	6
1 Trocha historie	7
1.1 K teorii chaosu	8
1.2 K fraktální geometrie	11
2 Tak trochu jiná	22
2.1 Dimenze	23
2.2 Definice	28
2.3 Měření dimenze	28
3 Typy a generování	33
3.1 L-systémy	34
3.2 IFS	36
3.3 Dynamické systémy s fraktální strukturou	40
3.4 Náhodné fraktály	44
4 Fraktály v dnešní praxi	47
Závěr	52
Literatura	53
Rejstřík	55

Úvod

„Konečně je náš obzor zase volný, byť ne jasný, konečně smějí naše lodě zase vyplout,
vstříc jakémukoli nebezpečí, a poznávající se zase může odvážit všeho;
moře, naše moře se tu zase prostírá otevřené,
možná ještě nikdy neexistovalo tak otevřené moře.“

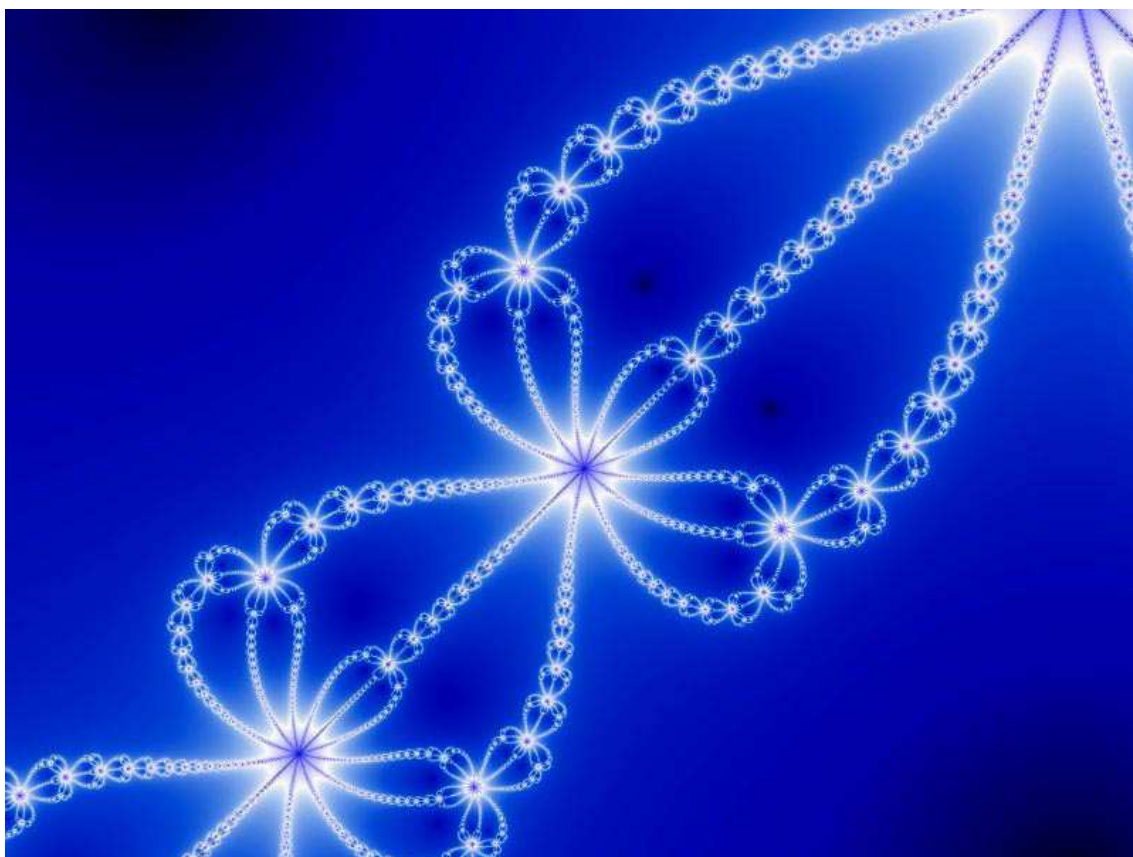
Friedrich Nietzsche

Na základních a středních školách se učíme pracovat s geometrií, která se zabývá geometricky hladkými a pravidelnými útvary, avšak převážná většina útvarů kolem nás je nepravidelná. Jak bychom například popsali mraky? Fraktální geometrie je geometrií tohoto reálného světa. Na rozdíl od euklidovské geometrie, využívající přímky a roviny, kruhy a koule, trojúhelníky a kužely, je základem fraktální geometrie složitost a členitost. Jednotlivé objekty již nejsou variacemi několika ideálních forem, ale vyznačují se nekonečnou složitostí, takže čím důkladněji je zkoumáme, tím složitější detaily odhalujeme. Cílem této práce je právě odhalit některé z těchto zajímavých detailů. Především tedy seznámit čtenáře s pojmy a fakty z této oblasti matematiky a také pokusit se pojmy korektně matematicky zavést. Aby byl výsledný text srozumitelný i lidem bez hlubších matematických znalostí, avšak se zájmem o tento obor, snažil jsem se každý pojem jak matematicky zadefinovat, tak vysvětlit obecnou mluvou. Vzhledem k tomu, že studuji obor učitelství, doufám v uplatnění této práce při případném zájmu středoškolských studentů o problematiku fraktálů. Mě samotného tento směr vždy vzrušoval, ale nikdy jsem si nevyčlenil dostatek volného času, abych se s ním seznámil podrobněji. Proto, když jsem se rozhodoval mezi sbírkou příkladů pro střední školy a fraktální geometrií, nemusel jsem dlouho přemýšlet.

Celá práce je rozdělena do kapitol, logicky podle obsahu. Po historickém vývoji jsou zavedeny a vysvětleny základní pojmy a pojmy potřebné k dalším definicím. Následující kapitola je věnována rozdělení fraktálů a podrobněji jejich jednotlivým typům. Poslední pak popisuje, kde všude v praxi můžeme už dnes fraktály najít. Byl bych rád, kdyby se mi podařilo čtenáře neposkvrněného matematikou alespoň zaujmout a čtenáři se zájmem nabídnout a doplnit informace.

Kapitola 1

Trocha historie



1.1 K teorii chaosu

„Na Boha budu mít dvě otázky: proč relativita a proč turbulence.
Opravdu si myslím, že by na první otázku mohl mít odpověď.“
Werner Heisenberg na smrtelné posteli

Pod pojmem chaos si většina lidí představí něco naprosto neuspořádaného a neorganizovaného či amorfního. Tradičně je chaos definován jako nepořádek, vřava nebo úplný zmatek. Chaos znamená neexistenci struktury či řádu. Jako příklad chaosu by člověk patrně uvedl počasí nebo vodopád. Ovšem není chaos jako chaos. Začneme-li uvažovat o chaotických systémech, bude mít tato definice poněkud jiný význam. Místo naprosté neuspořádanosti nalezneme strukturu. Zdá se, že například vodopády nejsou vůbec neuspořádané, jsou zcela deterministické, ale enormně složité. Podobně i předvídání počasí, i když je snad deterministické, zahrnuje tolik složitých vzorců, že je musíme považovat za dlouhodobě nepředpověditelné. A přesto jak hydrodynamika, tak i meteorologie díky teorii chaosu pokročily. Pomocí ní byly v těchto systémech, považovaných za zcela náhodné, objeveny mnohdy velmi překvapivé struktury a vzorce chování.

Teorie chaosu obecně popisuje systémy, které jsou charakterizovány nelineárními diferenciálními rovnicemi. Proto se někdy označují také jako „nelineární systémy“. V této souvislosti se často hovoří i o kognitivních systémech (tedy o poznávacích nebo evolučních systémech) nebo o disipativních strukturách (čili systém, udržující svou strukturu díky čerpání energie z okolí). Samotná teorie chaosu stojí v první řadě na nedokonalosti lidského měření. Něco podobného je samozřejmě známo i v kvantové fyzice, zde se však celý problém přenáší do zcela jiných měřítek. Řečeno trochu jinak - i malá nepřesnost v měření vstupních hodnot může znamenat, že naše předpověď bude naprosto rozdílná od skutečnosti. A právě tato citlivost na vstupní podmínky se projevuje u naprosté většiny chaotických systémů. S absolutní přesností nemůžeme měřit nic, a proto se některé jevy vzpírají našim předpovědím. Tyto jevy se nazývají **jevy chaotické**.

Další zajímavostí této teorie je její návrat do „lidské“ dimenze. Z důvodu, že současné deterministické modely světa nejsou schopny implikovat správné chování ani vývoj i jednoduchých dynamických systémů, má tato teorie velký význam pro mnohá odvětví vědy, matematiky i inženýrství. Zatímco fyzika dnes zkoumá buď vlastnosti galaxií nebo naopak elementárních částic, teorie chaosu se soustředí spíše na jevy spojené s naší každodenní zkušeností, jako jsou pochody v atmosféře, chování chemikálií v reakční nádobě, vodopád, vír, vývoj cen na burze nebo třeba ekologická rovnováha. Výzkum chaosu změnil naše chápání základů fyziky (Newtonovy zákony) a mnohých jiných oborů. Tento fakt vnesl nové světlo do výzkumů proudění, extrémně namáhaných konstrukcí, zemětřesení, chemických procesů, ale přispěl i k pochopení vzniku přírodních struktur a průběhu jejich utváření.

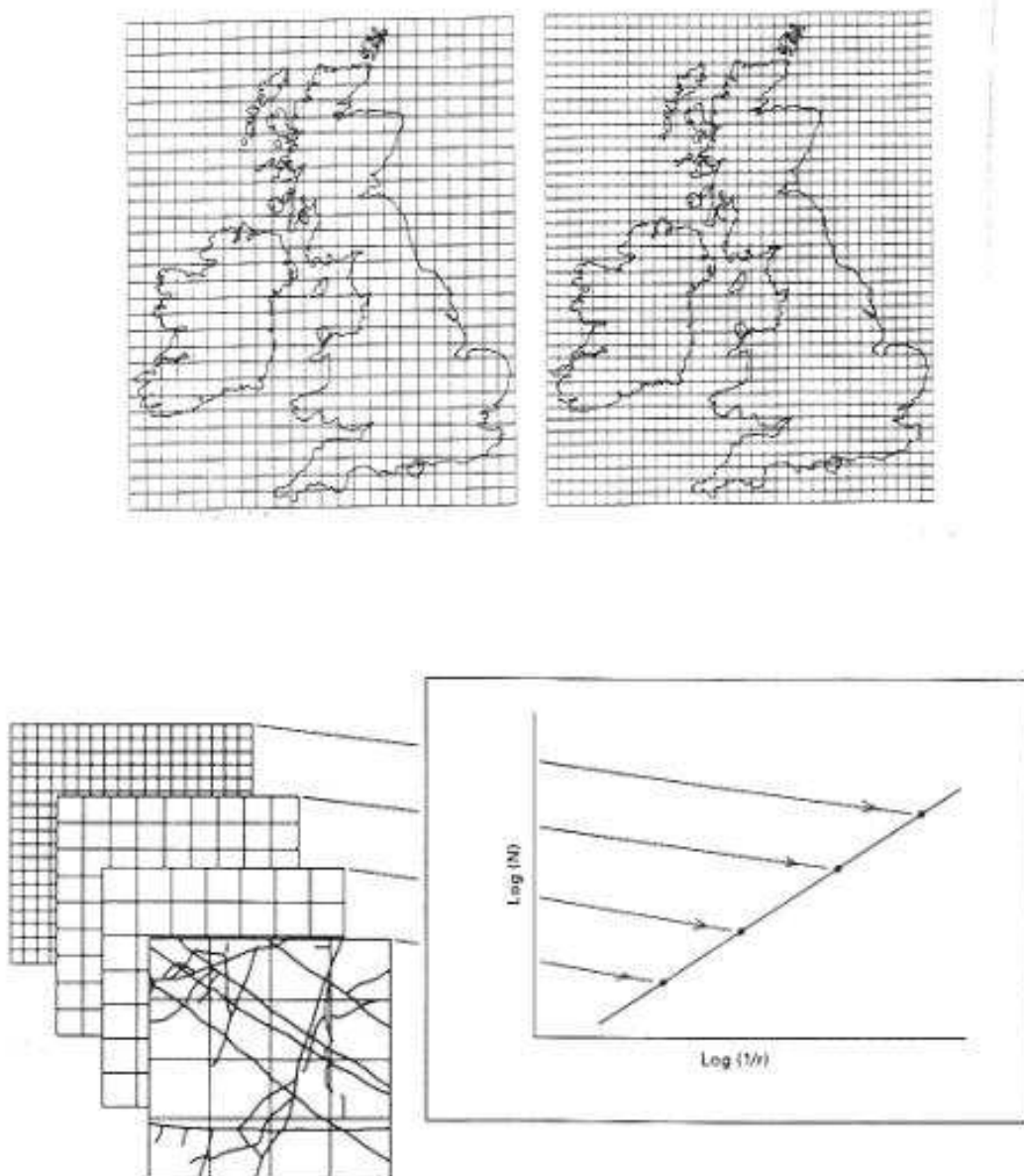
Nová definice chaosu tedy říká, že neuspořádanost může být jednoduše vyšším řádem složitosti, která vzniká ze zcela deterministických procesů. To znamená, že v rámci chaosu existuje současně jakási podivná organizovanost. I tato definice chaosu by ale byla poměrně nudná, kdyby jejím jediným závěrem byl fakt, že něco je náhodné a nic nejde pořádně změřit a už vůbec ne předpovídat. Paradoxně však vede také k tomu, že chaotické jevy v sobě ukrývají určité prvky řádu.

Počátky teorie chaosu nacházíme už v roce 1827, kdy skotský botanik **Robert Brown** (1773-1858) pozoroval mikroskopem náhodný pohyb pylových zrn v kapce vody. Budeme-li pozorovat malé částice pylu rozptýlené ve vodě, zjistíme, že konají chaotický pohyb. Tento pohyb vysvětlil o něco později Albert Einstein jako vliv náhodných nárazů molekul vody. **Brownův pohyb** ve své době nevzbudil velkou pozornost, pro nás je to však historicky první popsáný chaotický systém.

Neméně zajímavou úlohu hraje v teorii chaosu **problém tří těles**. Je definován tak, že máme ve vesmíru tři tělesa a dané počáteční podmínky. Za úkol máme analyticky vypočítat polohu těles v libovolném okamžiku. Tímto problémem se zabýval jak Euler, tak před ním i Newton („... tento problém překračuje možnosti lidského myšlení...“). Že je tento problém daleko složitější, než si dovedeme představit dokázal **Jules Henri Poincaré** (1854-1912), který v roce 1889 šokoval tvrzením, že přesné řešení tohoto problému je analytickými metodami zcela nemožné. Uvědomil si, že nepravidelnost pohybu je vlastností všech systémů a jako vůbec první vědec začal zkoumat chaos a provedl podrobnou analýzu chaotického chování dynamických systému. Tím svou dobu ale příliš předběhl a až v šedesátých letech 20. století se objevili Poincarého následovníci. Dnes je jeho teorie v moderní vědě mezi těmi nejživějšími.

Více než klasickým problémem je **měření délky pobřeží ostrova** (délky hranice). Jako první se tímto vážněji zabýval **Lewis Fry Richardson** (1881-1953), jehož znepokojovaly rozdílné údaje o délce hranic a pobřeží v různých encyklopediích. Jak lze tedy co nejpřesněji změřit délku pobřeží? Jedna z možných metod je „obejít“ ostrov s měřidlem o nějaké délce. Výsledná hodnota však bude pouhou aproximací skutečné délky ostrova. Pokud celý proces zopakujete s menší délkou měřidla, zjistíte, že výsledek je vždy o něco větší. Richardson ale narazil na podivnou věc. Na rozdíl od „rozumných“ křivek (jako třeba kružnice) aproximace délky získaná pro stále kratší měřítko nesměřovala k určité hodnotě, ale stále rostla. To by se koneckonců dalo vysvětlit tím, že se zmenšováním měřítka zahrnujeme do naší délky pobřeží stále více detailů, které jsme předtím prostě zanedbávali. Zajímavější však bylo to, že když Richardson vynesl do grafu hodnoty logaritmu naměřených délek proti použitým měřítkům, dostal poměrně přesnou přímku. Naměřená přímka se vyznačovala určitým sklonem, směrnicí, který byl pro dané pobřeží charakteristický. Jinými slovy, smysluplnou charakteristikou členitosti pobřeží není jeho délka, která roste s klesajícím měřítkem k nekonečnu, ale směrnice výše uvedené logaritmické závislosti. O mnoho let později si otec fraktální geometrie B. Mandelbrot všiml, že

tento tvar závislosti je charakteristický pro fraktální křivky a vysvětlil tuto podivnou zákonitost v rámci fraktální geometrie.



Obr. Měření délky pobřeží

Turbulence je něco jako kámen mudrců pro fyziky a patří k nejdramatičtějším manifestacím chaotického chování. Fyzika měla do sedmdesátých let teorii turbulence, jejímž autorem byl ruský fyzik Lev D. Landau. Nikdo ji však nedokázal experimentálně potvrdit a také se podle ní nedalo nic spočítat. Přesto s ní fyzikové mlčky souhlasili. V roce 1973 ji vyvrátili badatelé Swiney a Gollub, kteří ovšem

sami nedokázali vytvořit správnou teorii. Nicméně věříme, že vcelku tekutiny vyhovují Navierovým-Stokesovým rovnicím, což jsou diferenciální rovnice popisující průměrné chování pohybu částic, z nichž se tekutina sestává. Tato skutečnost je podpořena numericky, ačkoliv bychom měli mít na paměti, že řešení v turbulentním režimu pro třírozměrné toky tekutin jsou stěží získána i pomocí těch nejvýkonnějších počítačů. Tato oblast fyziky není jen módní, ale je také důležitá a z pohledu chování dynamických systémů jde o problém tak obtížný, že až hraničí s absurditou. Bohužel naše chápání rozvinuté turbulence zatím příliš rozvinuté není.

1.2 K fraktální geometrie

„...odvrátil jsem se s hrůzou a ošklivostí od toho politováníhodného zla,
jímž jsou funkce bez derivací...“
Charles Hermite roku 1893

Fraktální geometrie je v dnešní době již všeobecně uznávanou vědní disciplínou, ale její historie je poměrně krátká. Vznik této disciplíny spadá zhruba do 70. let dvacátého století, i když určitá setkání s touto problematikou probíhala už dříve.

Za jakousi prehistorii fraktálů bychom mohli označit snahy o nalezení funkcí, které jsou spojitě, ale nejsou diferencovatelné, které probíhaly už koncem devatenáctého století. Roku 1872 ve své přednášce v Královské akademii věd v Berlíně ukázal **Karl Weierstrass** (1815–1897) funkci, která je v celém svém oboru spojitá, ale v žádném bodě nemá derivaci. Jednalo se o funkci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(\pi b^n x), 0 < a < 1, ab > 1 + \frac{3\pi}{2}.$$

Mnoho matematiků se pustilo do zkoumání problému spojitých funkcí bez derivace a další zajímavé funkce objevil například **Charles Cellérier** (1945–1948). V roce 1930 zapříčinil český matematik Karel Rychlík historickou senzaci tím, že uveřejnil součást matematické pozůstalosti **Bernarda Bolzana** (1781–1848), kde je popsána konstrukce funkce spojitě na intervalu, která není v žádném bodě diferencovatelná. Bolzano tak Weierstrasse o mnoho let předešel.



Obr. Cantorovo discontinuum

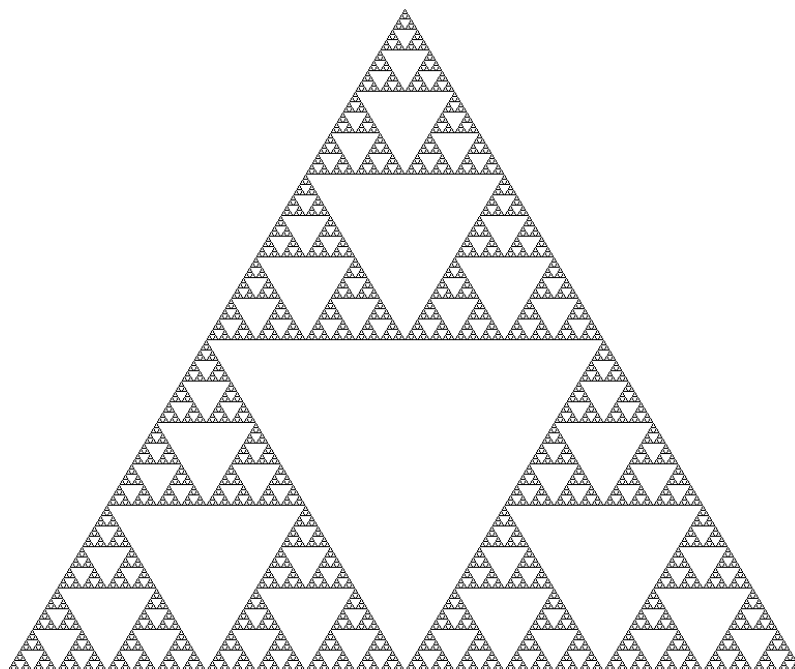
Koncem devatenáctého a počátkem dvacátého století se také začaly objevovat konstrukce různých podivných útvarů. První z nich popsal roku 1883 tvůrce teorie množin **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor** (1845-1918). **Cantorovo diskontinuum** (Cantorovo mračno, Cantorův prach) je úsečka délky 1, kterou rozdělíme na tři stejně dlouhé části, prostřední díl vyjmeme a stejný postup opakujeme na zbývajících dvou úsečkách nekonečně mnohokrát. Výsledkem nekonečného počtu iterací bude množina nekonečně mnoha navzájem izolovaných bodů a celková délka vypuštěných intervalů bude

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \cdots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

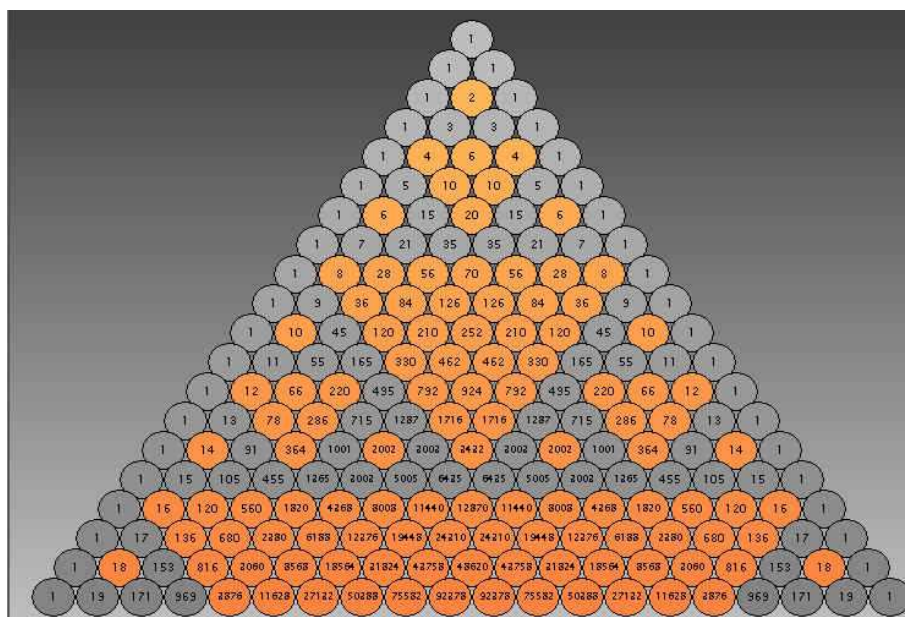
To připadne všem jako docela přirozené. Pokud se ovšem budeme zabývat otázkou mohutnosti Cantorova mračna, můžeme být docela překvapeni. Mohutnost je totiž úplně stejná jako mohutnost původního intervalu $< 0, 1 >$, potažmo jako celé množiny reálných čísel. Později díky Cantorovu mračnu prý Benoit Mandelbrot odstranil šum na telekomunikačních linkách firmy IBM.

Podobné útvary v rovině i v prostoru později sestrojili polský matematik **Wacław Sierpinski** (1882–1969) a rakouský matematik **Karl Menger** (1902-1985). **Sierpinského trojúhelník** se dá nejjednodušeji generovat tak, že na každé straně trojúhelníku najdeme střed a tyto středy spojíme úsečkami. Tímto způsobem nám vzniknou čtyři stejné trojúhelníkové části a prostřední z nich vyjmeme. V nových třech trojúhelnících postup opakujeme. Nejlépe nekonečně mnohokrát.¹

¹Existuje i jednodušší způsob jeho generování, při kterém ale nejsou vidět jednotlivé iterace. Tento způsob se nazývá „Chaotická hra“. Určíme tři vrcholy trojúhelníku ABC a libovolný bod Z. Od tohoto bodu vedeme pomyslnou úsečku k náhodně vybranému vrcholu a v její polovině vykreslíme bod Z_1 . Z tohoto nově vzniklého bodu opět vedeme úsečku k náhodnému vrcholu a v polovině vykreslíme další bod. Takto pokračujeme pro dostatečný počet bodů. Vzniklý obrazec (Sierpinského trojúhelník) je atraktorem tohoto postupu.



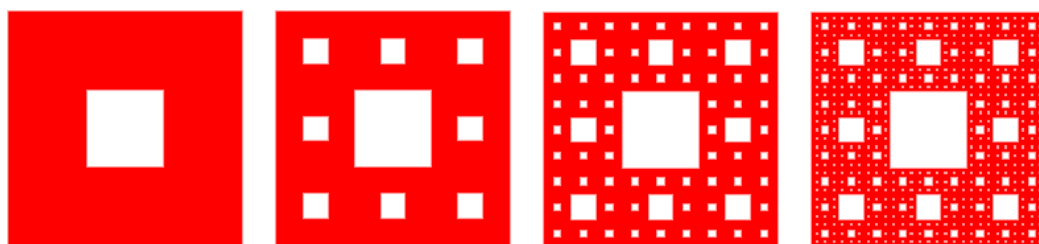
Obr. Sierpinského trojúhelník



Obr. Obarvený Pascalův trojúhelník

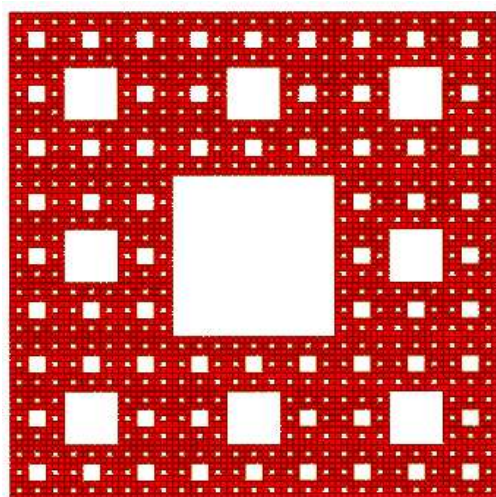
Sierpinského koberec představuje v podstatě přenesení Cantorova diskontinua, s nímž jsme se už seznámili, do roviny. Vycházíme tak místo z jednotkového intervalu, ze čtverce o jednotkové straně, ten rozdělíme na devět stejných malých

čtverců a odstraníme prostřední z nich. Tak pokračujeme až do nekonečna. Zajímavou, až znepokojivou vlastností těchto objektů je jejich nulový obsah ve spojení s nekonečným obvodem. Rovněž velmi zajímavá je podobnost Sierpinského a Pascalova trojúhelníku, ve kterém jsou obarvena sudá čísla jinou barvou než lichá.

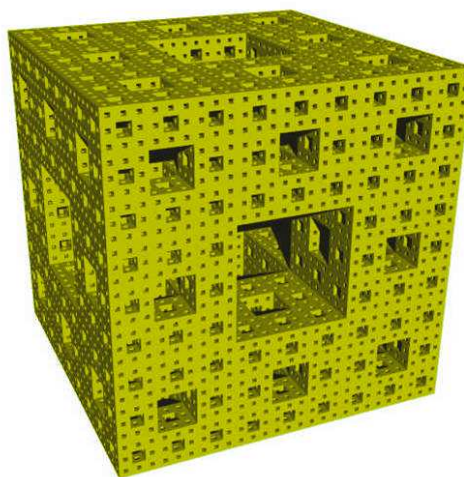


Obr. Iterace Sierpinského koberce

Pokud budeme provádět podobné operace na třírozměrné objekty, vzniknou také velice pěkné útvary. Příkladem je **Mengerova houba**, trojrozměrná mřížka s nekonečně velkým povrchem, ale nekonečně malým objemem. Mengerova houba je zobecněním Sierpinského koberce a představuje tak univerzální objekt, obsahující ekvivalenty všech myslitelných křivek v prostoru. To znamená, že každá křivka, vhodně deformována, je identická s nějakou částí houby a tak představuje Mengerova houba superobjekt pro všechny křivky.



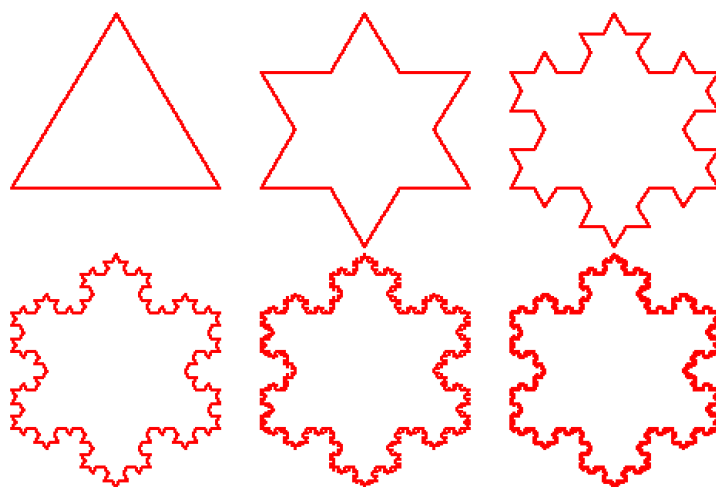
Obr. Sierpinského koberec



Obr. Mengerova houba

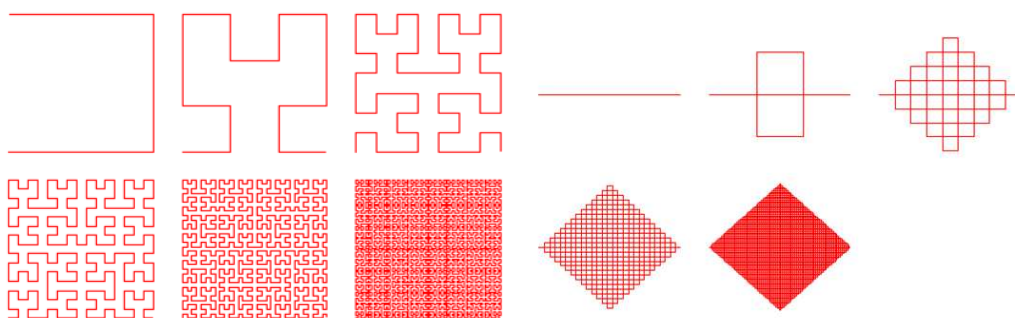
V roce 1904 popsal švédský matematik **Niels Fabian Helge von Koch** (1870-1924) takovouto křivku: představte si rovnostranný trojúhelník, k jehož každé straně přidáme k prostřední třetině další trojúhelník o třetinu menší a tento postup budeme opakovat i na tento trojúhelníček. Po nekonečně mnoha opakováních vznikne

křivka s několika velice zajímavými vlastnostmi. Například neobsahuje žádné úsečky nebo hladké segmenty a nemá derivaci v žádném bodě. Tato křivka také nikdy neprotne sebe sama, neboť nové trojúhelníky jsou příliš malé, než aby si „překážely“. Každá iterace křivku o malý kousek prodlouží, ale plocha zůstává narozdíl od křivky konečná. Nekonečně dlouhá křivka tedy evidentně ohraničuje plochu o konečném obsahu. Tento paradoxní výsledek znepokojoval mnoho matematiků 19. století, kteří se jím zabývali. **Kochova křivka** pro ně byla nehorázností ignorující jakoukoliv rozumnou intuici a také v podstatě vše, co by se dalo nalézt běžně v přírodě.



Obr. Iterace Kochovy křivky

Další známe útvary v rovině jsou například **Peanova křivka** nebo **Hilbertova křivka**. Každá pojmenována podle objevitele, tedy **Giuseppe Peana** (1858–1932) a **Davida Hilberta** (1862–1943). Každá z těchto křivek po nekonečném počtu iterací vyplní celou plochu vykreslovaného útvaru a tak tyto křivky mají větší dimenzi, než na jakou jsme u křivek zvyklí. Způsob generování jistě dostatečně ukazují obrázky.

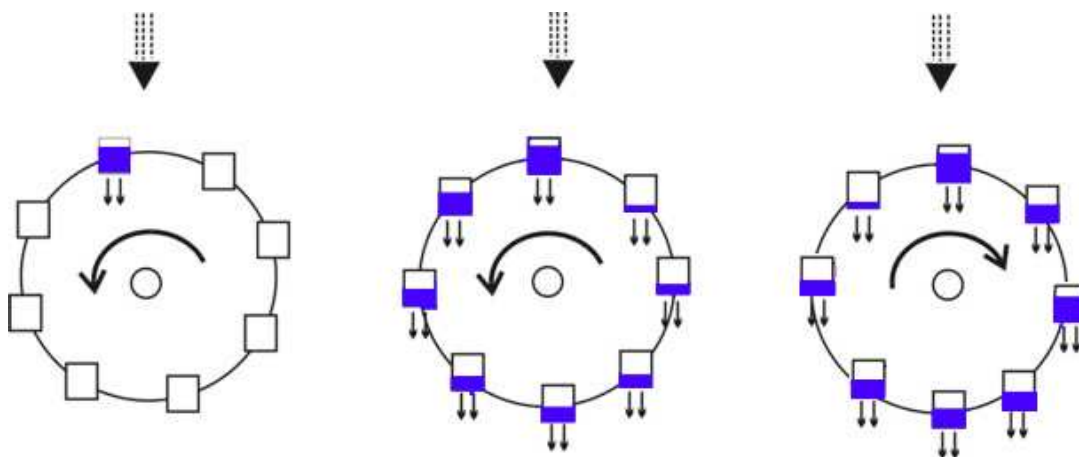


Obr. Iterace Hilbertovy křivky

Obr. Iterace Peanovy křivky

Významným vědcem, který měl lví podíl na vzniku fraktální geometrie, byl **Edward N. Lorenz**. Na přelomu padesátých a šedesátých let se mnoho vědců zabývalo

předpovědi počasí. Edward Lorenz nebyl sice meteorolog, ale počasí ho velice zajímalo a pokoušel se vymyslet rovnice popisující chování atmosféry. Byl jedním z mála vědců, kteří měli ke své práci počítač. V té době byly i výpočty jednoduchých rovnic velmi pomalé a tak si jednou zkrátil čas výpočtem pouze poloviny grafu. Počáteční hodnoty zvolil dle předchozího výpočtu a nechal počítač kreslit graf. Když byl graf hotov, srovnal jeho část s již dříve spočítaným grafem a zjistil, že se po chvíli grafy rozcházejí a odlišují se. Původně si myslel, že je to chyba počítače, ale i po opětovném výpočtu se dostavil stejný efekt. Po nějaké době zjistil, že počítač počítá s osmi desetinnými místy, ale on jich zadal pouze šest. Tehdy si uvědomil, že předpovídat počasí není tak jednoduché, jak se zdálo. Jakkoliv malá nepřesnost při vyjádření počátečních podmínek znamená velkou odchylku od skutečnosti. Psal se rok 1960.



Obr. Lorenzovo vodní kolo

Další Lorenzova práce, označovaná jako „zázračný článek“, popsala první slavný chaotický systém. Počátkem 60. let dvacátého století sestavil a zjednodušil Lorenz soustavu tří diferenciálních rovnic, které popisují tok tekutiny vlivem teplotního gradientu. V sedmdesátých letech **Willem Malkus** a **Lou Howard** z MIT vymysleli přesný mechanický model Lorenzových rovnic. Nejjednodušší verzí je vodní kolo s děravými kelímky připevněnými k otáčivému kruhovému rámu. Voda přitéká rovnoměrně na vodní kolo ze shora. Jestliže je přítok příliš pomalý, pak se horní kelímky nikdy nenaplní natolik, aby překonaly tření a vodní kolo se nebude pohybovat. Jestliže přítok bude vydatnější, pak horní kelímek bude dostatečně těžký, aby se vodní kolo počalo otáčet. Takto se bude vodní kolo rovnoměrně otáčet jedním či druhým směrem. Díky symetrii je otáčení pro oba směry stejně pravděpodobné, takže výsledný směr otáčení závisí na počátečních podmínkách. V případě, že bude přítok narůstat, můžeme destabilizovat rovnoměrné otáčení a pohyb vodního kola se stává chaotickým, tj. kolo provede několik otáček jedním směrem, pak některé kelímky budou příliš plné a kolo nemá dostatek setrvačnosti, aby kelímky přeneslo

přes vrchol, kolo se tímto zpomalí a může dokonce změnit směr otáčení. Poté se chvíli otáčí jiným směrem. Ke změně směru dochází nepravidelně, takže pozorovatelé mohou uzavírat sázky ohledně směru otáčení kola.

Na nějakou dobu zůstal Lorenz zapomenut a mezi vědci nepochopen. Až v roce 1972 objevil jeden matematik jeho článek a věnoval jej **Jamesi Yorkemu**. Yorke si uvědomil, že není možné na všechny věci nahlížet jako na lineární. Článek na něj udělal velký dojem a tak jeho fotokopie rozdával svým přátelům. Jednu kopii věnoval také Stevu Smaleovi z Univerzity v Berkeley a na papír napsal své jméno, aby mu ji vrátil. Smale podobně jako Yorke objevil v článku velmi zajímavé a revoluční myšlenky a situace se opakovala - fotokopii věnoval každému, kdo byl ochoten si ji vzít. Jenže na fotokopiích bylo Yorkeho jméno a adresa, takže vznikl dojem, že Lorenz objevil Yorke. Yorke se ovšem neprosлавil pouze touto příhodou. Byl a je jedním z nejvýznamnějších vědců zabývajících se chaosem a dynamickými systémy.

O zajímavé objevy se postarali během první světové války **Gaston Julia** (1893–1978) a **Pierre Fatou** (1878–1929) při zkoumání iterací funkce komplexní paraboly:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

kde proměnné z_n a c leží v komplexní rovině. Počáteční hodnota z_0 v případě Juliových množin reprezentuje pozici bodu v komplexní rovině. Komplexní hodnota c je zvolena libovolně a pro všechny počítané body v jednom obrazci zůstává konstantní.

Juliova množina J je definována jako množina všech komplexních čísel z_0 , pro které posloupnost z_n nediverguje, tzn.:

$$J = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq \infty\},$$

kde z_n je samozřejmě posloupnost $z_{n+1} = z_n^2 + c$.

Při počítačovém generování Juliových množin máme k dispozici pouze konečný počet iterací, ze kterých musíme usoudit, zda posloupnost z_n konverguje či nikoliv. Existuje číslo $r(c)$ závislé na konstantě c takové, že pokud pro nějaké $n \in \mathbb{N}_0$ je $|z_n| > r(c)$, pak posloupnost diverguje. Platí, že

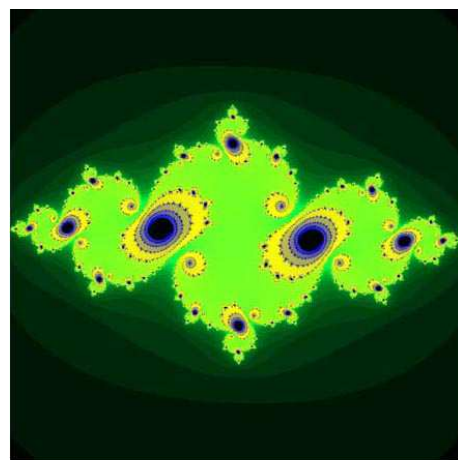
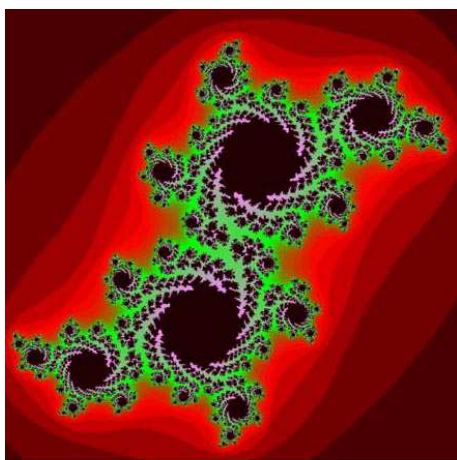
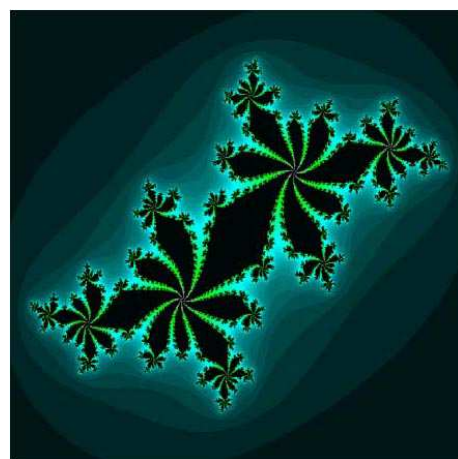
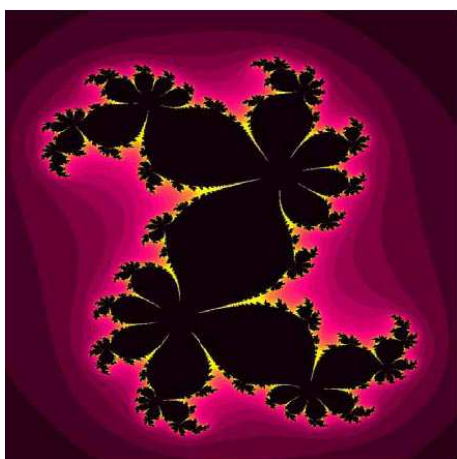
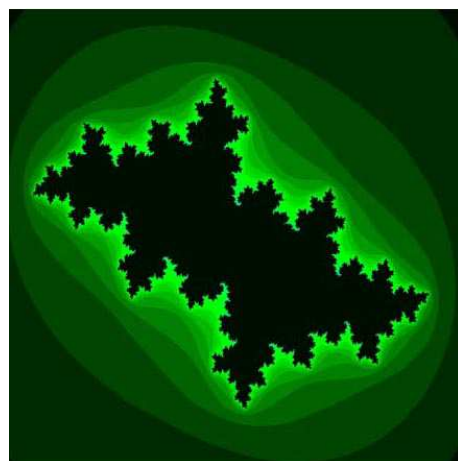
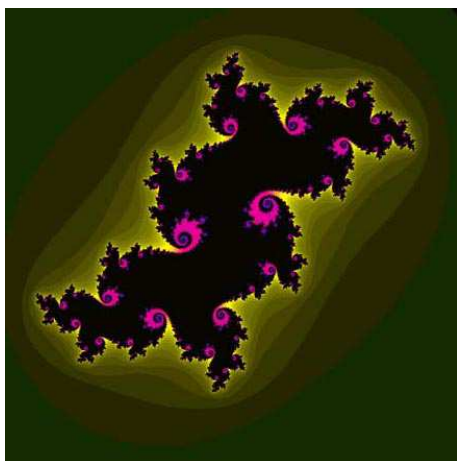
$$r(c) = \max\{|c|, 2\}.$$

Případné zájemce o důkaz těchto tvrzení si dovolím odkázat na [05].

Juliovy množiny lze rozdělit na dva druhy, na souvislé a na nesouvislé. Množinu nazveme souvislou právě tehdy, když ji nelze rozdělit na dvě disjunktní otevřené množiny. Jednoduše řečeno, když je množina jako jeden kus, pak je souvislá. Souvislost množiny nám dále poslouží pro definici Mandelbrotovy množiny.

Na následujících obrázcích jsou příklady Juliových množin. Juliova množina je vždy zobrazena černou barvou, ostatní barvy určují, kolik iterací je třeba vypočítat,

abychom rozhodli, zda posloupnost jde k nekonečnu. Čím světlejší barva, tím je třeba více iterací.



Obr. Ukázky Juliových množin

Kolem roku 1950 se chaosem začal zabývat také **Benoit B. Mandelbrot**. Tento velice ctižádostivý a sebevědomý vědec se narodil roku 1924 ve Varšavě, v roce 1936 se přestěhoval do Paříže a později do Tully. Studoval na École Normale a École Polytechnique. Zabýval se matematikou, vyučoval fyziku a filozofii. Poprvé se setkal s fraktály při studiu vývoje cen bavlny nebo při problému odstraňování šumu při datových přenosech. Cena bavlny byla sice nepředvídatelná, ale stejná posloupnost změn se dala vysledovat v různých měřítcích. Podobný problém odhalil i při sledování poruch na telekomunikačních linkách. Inženýři z IBM se potýkali s problémem šumu na telefonních linkách mezi počítači. Šum se objevoval zcela náhodně a stejně i mizel. Většinou se problém snažili řešit opravou kabeláže, ale to nepomáhalo. Mandelbrot si nechal vytisknout grafy datových přenosů a šumu způsobujících chyby. Po nějaké době našel zajímavou podobnost mezi Cantorovým diskontinuem a šumem, jak už je uvedeno výše.

Benoit Mandelbrot ve svých jednadvaceti letech narazil na zapadlou práci Julia a Fatoua. Začal se zabývat Juliovy množinami a pokoušel se je zobecnit. Dlouhou dobu hledal, kterak popsat tyto množiny a sjednotit je, až v roce 1979 objevil jakýsi „katalog“ Juliovy množin. Tím katalogem byla další množina v komplexní rovině, která popisovala v každém svém bodě určitou Juliovu množinu. Tato množina se nazývá dle svého objevitele **Mandelbrotova množina**. Je velice zajímavé, že tyto dvě množiny jsou spolu propojeny tak, že každý bod v Mandelbrotově množině určuje vzhled množiny Juliovy, která ke zvolenému bodu patří.

Mandelbrotova množina je narozdíl od Juliovy množin jen jedna. Je opět vytvářena pomocí iterace funkce komplexní paraboly:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

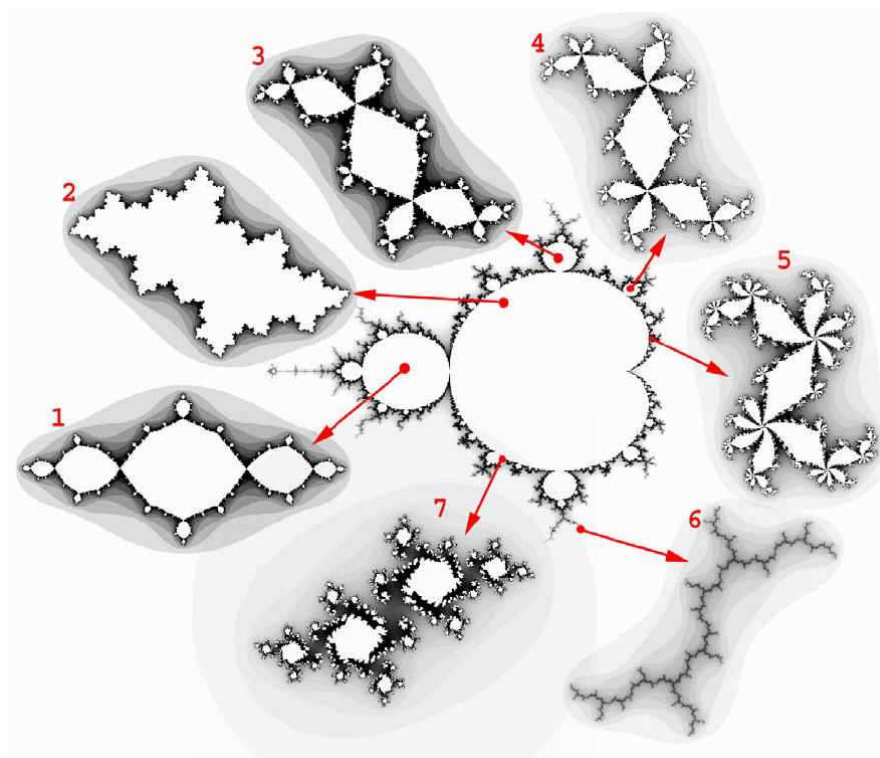
Kde proměnné z_n a c leží v komplexní rovině. Mandelbrotovu množinu lze definovat jako množinu

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid c \rightarrow c^2 + c \rightarrow \dots \text{je omezená}\},$$

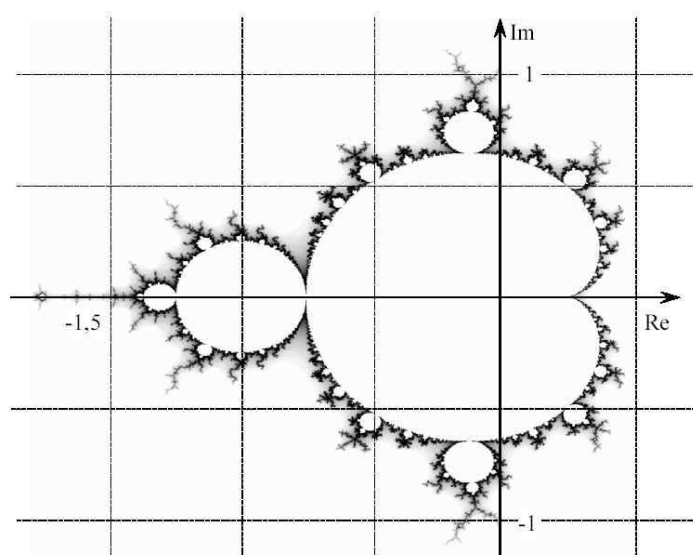
což je původní Mandelbrotova definice z roku 1979. Lze ovšem také definovat jako množinu všech komplexních čísel c , kdy je Juliova množina J_c souvislá, tj.

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid J_c \text{ je souvislá}\}.$$

Mandelbrotova množina je souvislá. Toto tvrzení dokázali roku 1982 A. Douady a J. H. Hubbard. Při zkoumání Mandelbrotovy množiny zjistíme, že po obvodu jsou množiny stejného tvaru. Tyto množiny nejsou pouze po obvodu, ale i „osamoceny“ v okolí. Ovšem vždy jsou spojeny s hlavní částí, M je souvislá.



Obr. Souvislost Mandelbroty množiny a Juliových množin

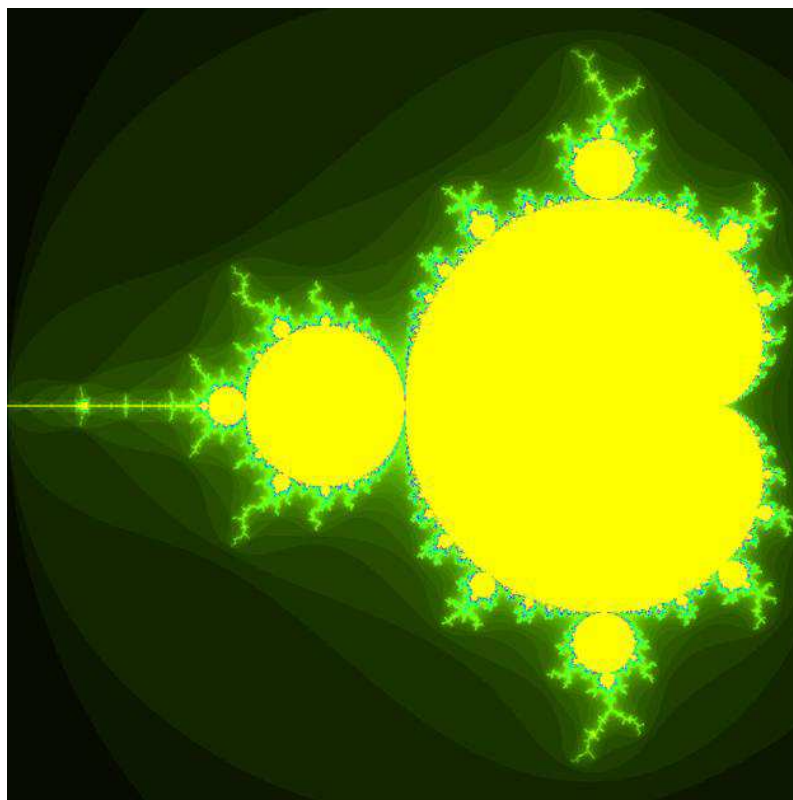


Obr. Mandelbroty množina v komplexní rovině

Výpočet Mandelbroty množiny je velice jednoduchý. Zkoumáme pro každý bod komplexní roviny, zda jeho neustálým umocňováním se vzdaluje od nuly a blíží

k nekonečnu. Na každý bod několikrát aplikujeme rovnici $z_n = z_{n-1}^2 + c$. Vezmeme komplexní číslo a přičteme k němu jeho druhou mocninu. Výsledek zase umocníme a přičteme k němu původní číslo. Tento proces opakujeme, dokud výsledek výpočtu nepřesáhne hodnotu 2 nebo dokud nedosáhneme dostatečného, předem stanoveného počtu opakování. Pokud výsledek hodnotu 2 přesáhne, bod do množiny nepatří. Pokud ne, bod do množiny patří.

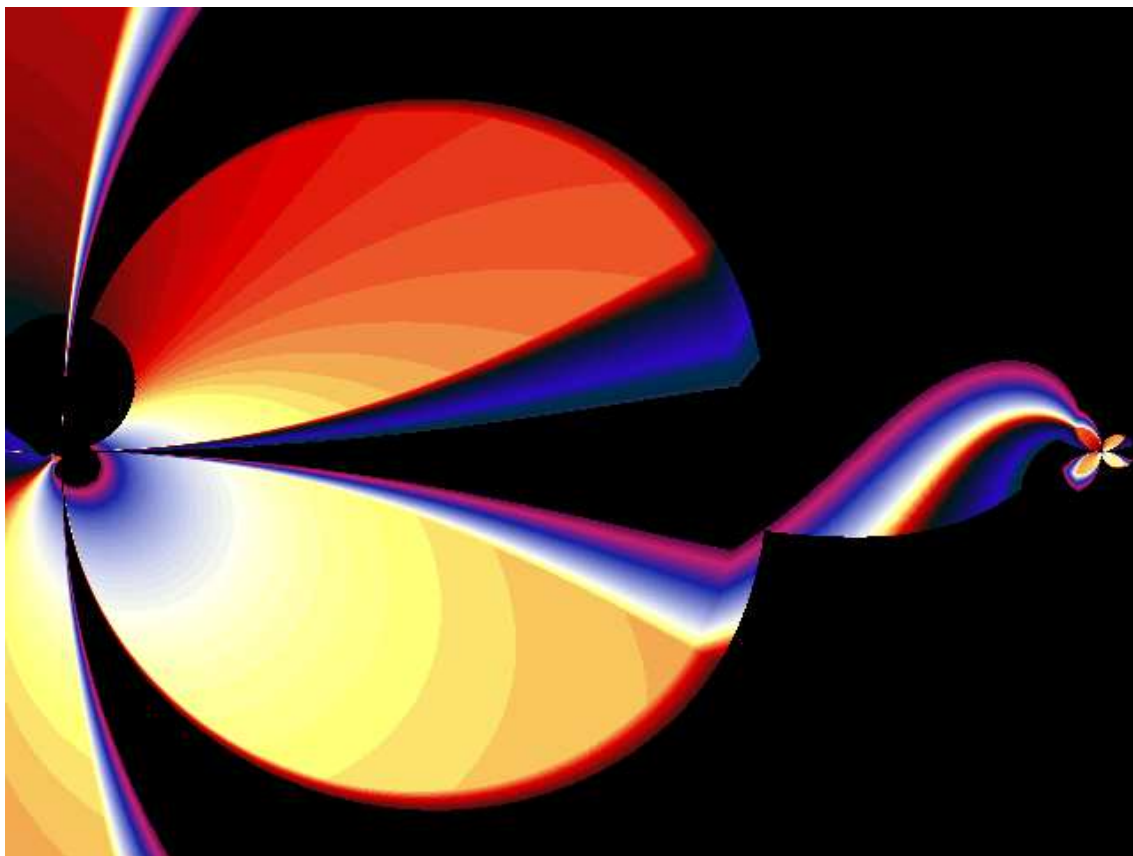
Tyto křivky a nediferencovatelné funkce jsou příklady toho, čemu dnes říkáme **fraktály**. Tento pojem definoval jako první právě Benoit B. Mandelbrot v roce 1975 (fraktál pochází z latinského slova „fractus“). Proslavil se ale až díky Mandelbrotově množině, množině kterou jako první popsal. Známa byla jeho přednášková turné, kde vystavoval své slavné obrázky umělých krajinek, mráčků a umělých stromků rašících z umělé půdy. Přestože měl ke své práci už daleko rychlejší počítač, kreslení Mandelbrotovy množiny bylo časově náročné. První černobílé obrázky se objevovaly velice pomalu, ale nastartovaly novou vědní disciplínu, která se vyvíjela a vyvíjí velice bouřlivě a chaoticky.



Obr. Mandelbrotova množina

Kapitola 2

Tak trochu jiná



2.1 Dimenze

„Jsem kapitán Rimmer. Arnold Rimmer. Přátelé mi říkají „Eso“. Přiletěl jsem z jiné dimenze. Vysvětlím to později. Teď vás vytáhnou z té bryndy.“
Arnold „Eso“ Rimmer, seriál Červený trpaslík

Prvním pojmem, který musíme při popisování fraktálů zavést, je **soběpodobnost** (matematicky invariance vůči změně měřítka). Soběpodobnost je taková vlastnost objektu, kdy objekt vypadá podobně při pohledu v různém zvětšení, tj. při rozdílných měřítkách. Soběpodobnost je hlavním znakem fraktálních útvarů a bývá také považována za jejich definici, což však není zcela korektní, protože to vylučuje některé náhodné (stochastické) fraktály. Pomáhá nám ale při vyhledávání fraktálních útvarů v přírodě. Soběpodobný je například kámen, hory, mraky, stromy, rostliny, ale i krátery atd., tedy objekty živé i neživé přírody.

Soběpodobnou množinu lze matematicky definovat následujícím způsobem: soběpodobná množina A z n -dimenzionálního Euklidovského prostoru, dále označovaného E^n , je taková množina, pro kterou existuje konečně mnoho kontrahujících zobrazení $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ (jedná se o takové zobrazení z E^n do E^n , které zmenšuje vzdálenost mezi dvěma body ležícími v prostoru E^n a přesně ho budeme definovat v kapitole o iterovaných systémech funkcí) takových, že A vznikne jako:

$$A = \bigcup_{i=1}^n \Phi_i(A)$$

Množina definovaná pomocí předchozího vztahu má několik velmi zajímavých vlastností, které jsou typické pro velkou většinu fraktálních objektů:

1. Soběpodobná množina vzniká opakováním sebe sama při určité transformaci. Transformací v tomto kontextu rozumíme například změnu měřítka, rotaci, posunutí či zkosení. Všechny tyto transformace (které jsou lineární) jsou definovány nad prostorem E^n . Kromě lineárních transformací se samozřejmě používají i transformace nelineární, vždy však musí jít o transformace kontrahující, tj. vzdálenost libovolných dvou bodů, které nejsou pevné se po aplikaci transformace musí zmenšit.
2. Soběpodobné množiny jsou invariantní vůči změně měřítka. Při libovolném zvětšení či naopak zmenšení vypadají stejně (pro náhodné fraktály spíše podobně). Tato vlastnost z velké části vyplývá už ze samotné definice soběpodobné množiny, která se skládá ze zmenšených kopií sebe sama.
3. Soběpodobná množina vzniká sama ze sebe, respektive vzniká opakováním téhož základního motivu. Blíže viz. předchozí vlastnost.

Princip opakování podobných tvarů ve zmenšené podobě je vidět prakticky u jakékoliv komplexní, složité struktury, která je vytvářena i pomocí velmi jednoduchých pravidel. Způsob, jakým probíhá větvení stromů či cév v tělech živočichů nebo hromadění bakterií a řas v koloniích, se dá matematicky uspokojivě popsat pouze fraktální geometrií.

Při používání pojmu soběpodobnosti si musíme uvědomit, že se jedná o podobnost objektu pouze při změně měřítka. Existuje mnoho geometrických útvarů, které jsou podobné (nebo dokonce shodné) při aplikaci jiné transformace. Například čtverec je invariantní vůči středovému zrcadlení, kruh je invariantní vůči stranovému i středovému zrcadlení a přímka je invariantní vůči posunu ve směru jejího vektoru (a také vůči zrcadlení). Tato invariance, pokud není doprovázena invariancí vůči změně měřítka, v žádném případě nedefinuje fraktál, ale „obyčejný“ objekt Euklidovské geometrie.

Ústřední pojem při zkoumání fraktálů však hraje jejich dimenze, a to jak **dimenze topologická**, tak i **dimenze fraktální**, nazývaná také dimenze Hausdorffova-Besicovitchova. Jejimi objeviteli byli **Felix Hausdorff** (1868–1942) a **Abram Samoilovitch Besicovitch** (1891–1970). Zajímavé je, že Hausdorffova dimenze byla známa dlouho před definováním pojmu fraktál, jen neměla žádné praktické využití.

Topologická dimenze je dimenze známá z klasické Eukleidovské geometrie. Pokud si celou problematiku zjednodušíme, můžeme říci, že topologická dimenze určuje počet nezávislých proměnných, kterým lze dané těleso popsat. Například bod má nulovou dimenzi a přímka má dimenzi rovnu jedné, neboť ji lze popsat vztahem $x = ay + t$, kde t je jediný parametr (nezávislá proměnná) a pozici každého bodu ležícího na úsečce lze vyjádřit výše uvedeným vztahem. To, že má nějaká křivka dimenzi rovnu jedné, ještě nutně neznamená, že je zobrazována pouze v jednorozměrném prostoru. Dimenze udává jen počet parametrů, které jsou nutné pro jednoznačné definování bodu na křivce. Také můžeme uvažovat v tom smyslu, že pro křivky, které mají topologickou dimenzi rovnu jedné, je definována jejich délka (která může být i nekonečná), ale jejich plocha je nulová (jsou nekonečně tenké). Jakákoliv hladká plocha má dimenzi rovnu dvěma, to znamená, že poloha bodu musí být určena pomocí dvou parametrů. Takto definované plochy mají určitý obsah, ale jejich objem je nulový, protože mají nulovou tloušťku. Krychle, koule, válec nebo celý běžný prostor kolem nás mají dimenzi rovnu třem, protože poloha jakéhokoli bodu je v nich jednoznačně určena třemi parametry. Naznačeným způsobem je samozřejmě možno pokračovat dále, ale v reálném světě za obvyklých podmínek další dimenze prakticky neexistují (až na čas). Z matematického hlediska však není velkým problémem definovat například čtyřrozměrnou kouli.

Pro výše popisované funkce a tělesa, která můžeme označit jako „normální“ nebo „běžné“, platí, že všechny jejich parametry mohou být zadány v libovolné jednotce, aniž by se změnila vlastnosti tělesa. Tedy bereme jako samozřejmost, že výsledek je vždy stejný, i když počítáme v libovolném měřítku. Je například nepodstatné, zda je

poloměr koule zadaný v milimetrech či kilometrech; objem koule či její povrch vyjde vždy stejný (samozřejmě při přepočtu na stejné jednotky). To znamená, že nezáleží na měřítku, se kterým se na těleso díváme a výsledky jsou nezávislé na použitých jednotkách.

Ve všech předchozích případech jsme mluvili o dimenzi, která je specifikována celým číslem a před zkoumáním fraktálů si vědci s touto dimenzí vystačili. Geometrické objekty, které je možné popsat klasickou Euklidovskou geometrií, mají celočíselnou dimenzi a dále je budeme nazývat **geometricky hladké objekty**. Bylo poměrně velkým překvapením, když byly objeveny zvláštní geometrické útvary, pro které toto rozdělení na celočíselné dimenze není dostatečné. Některé tyto útvary nejsou jen abstraktní objekty vzniklé díky fantazii matematiků či umělců, ale mají své vzory přímo v okolní přírodě.

Klasický příklad takového útvaru je břeh nějaké řeky či potoka nebo pobřeží nějakého reálného ostrova. Obvod ostrova Korsiky měřil **Richardson** (viz výše), který také jako první zjistil, že obvod ostrova je závislý na délce tyče, kterou se měří. Se zmenšujícím se měřítkem délka roste a při délce měření blížící se limitně k nule by délka rostla až do nekonečna. Tato vlastnost se nazývá **Richardsonův efekt**. Vyplyvá z toho zajímavý fakt, že ostrov o konečné ploše má nekonečnou délku pobřeží. Také plocha některých objektů v přírodě, které mají konečný objem, může být nekonečná. Například povrch planety je teoreticky nekonečný. Zdálo by se, že planeta vypadá jako dokonalá koule. Při určitém přiblížení rozeznáme vrcholky hor a velká údolí. Při dalším přiblížení zjistíme, že každá hora je velmi členitá a její plocha je obdobně členitá jako povrch celé planety. Každý kámen potom vypadá jako celá hora, ale je mnohem menší. S touto změnou měřítka můžeme pokračovat dále až do subatomárních struktur. Obrovská je i plocha plic či lidského mozku při relativně malém objemu a ve všech těchto případech jde o praktickou aplikaci fraktálů v přírodě.

Objekty popisované fraktální geometrií mají dimenzi neceločíselnou. Dimenzi fraktálních objektů nazýváme **fraktální dimenzí** či **Hausdorffovou dimenzí**. Hodnota této dimenze potom udává úroveň členitosti daného objektu, respektive míra rozdílu mezi fraktální dimenzí a dimenzí topologickou ukazuje, s jakou rychlostí délka (či odpovídající veličina při větším počtu rozměrů) těchto útvarů roste do nekonečna. Jestliže se bude Hausdorffova dimenze a topologická dimenze lišit velmi málo, bude takový objekt málo členitý. Mezní hodnotou je pak případ, kdy je Hausdorffova dimenze o jedničku větší než dimenze topologická - tuto vlastnost má například hranice Mandelbrotovy množiny.

Jedním ze způsobů určení fraktálnosti objektu je použití metody **mřížkové dimenze**, anglicky box-counting dimension. Výhodou mřížkové dimenze je její snadná realizace na výpočetní technice a především to, že ji lze použít i na útvary bez soběpodobnosti. Zjišťování dimenze probíhá tak, že se zadaný útvar umístí na mřížku s velikostí buněk s a spočítá se, kolik buněk obsahuje alespoň část útvaru. Tím se získá číslo N , které samozřejmě závisí na volbě s . Dále se postupně volí menší

s a počítá se $N_{(s)}$. Potom se hodnoty vynesou do $\log/\log$ diagramu (přesněji do $\log(N_{(s)})/\log(\frac{1}{s})$ digramu) a získané body se aproximují přímkou. Box-counting dimenze je směrnice této přímky. Z praktického hlediska je vhodné volit mřížku dvakrát hustší než v předchozím kroku. Tím získáme posloupnost $N(2^{-k})$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Směrnice z $\log/\log$ diagramu je potom dána vzorcem

$$\frac{\log N(2^{-(k+1)}) - \log N(2^{-k})}{\log 2^{k+1} - \log 2^k},$$

který při volbě logaritmu o základu 2 přejde na

$$\log_2 \frac{N(2^{-(k+1)})}{N(2^{-k})}.$$

Takto získáme směrnici vždy mezi dvěma měřeními. Pokud se počet započítaných buněk $N_{(s)}$ mezi dvěma po sobě jdoucími měřeními znásobí číslem 2^D , kde D je stále stejné, pak box-counting dimenze je D .

Nyní si uvedeme definici **Hausdorffovy dimenze**, pomocí které následovně nadefinujeme pojem fraktál. Pro tuto definici dimenze se omezíme pouze na množiny A , které jsou částí euklidovského prostoru

$$R^n = \{x | x = (x_1, \dots, x_n), x_i \in R\}$$

pro n přirozené. Dále je třeba zavést vzdálenost dvou bodů

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

a definujeme ještě průměr množiny A jako

$$\text{diam} A = \sup\{d(x, y) | x, y \in A\}.$$

Jako poslední pojem zavedeme spočetné otevřené pokrytí množiny $A \subset R^n$. Spočetný systém $\{U_1, U_2, U_3, \dots\}$ otevřených podmnožin R^n nazveme otevřené spočetné pokrytí množiny A , pokud

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i.$$

Definice Hausdorffovy dimenze: Nechť s a ϵ jsou reálná kladná čísla. Potom definujeme

$$h_\epsilon^s(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s \mid \{U_1, U_2, \dots\} \text{ je otevřené pokrytí } A, \forall i \in \mathbb{N} \text{ diam}(U_i) < \epsilon \right\}.$$

Se snižujícím se ϵ se míra možných pokrytí zužuje, a proto se infimum zvyšuje. To nám dovoluje psát

$$h^s(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_\epsilon^s(A)$$

Toto číslo se nazývá s -dimenzionální Hausdorffova míra množiny A . Hausdorff dokázal, že existuje číslo $D_H(A)$ takové, že

$$h^s(A) = \begin{cases} \infty & \text{pro } s < D_H(A) \\ 0 & \text{pro } s > D_H(A) \end{cases}$$

Toto číslo $D_H(A)$ se nazývá Hausdorffova dimenze množiny A . Lze ho získat pomocí předpisu

$$D_H(A) = \inf\{s | h_s(A) = 0\} = \sup\{s | h_s(A) = \infty\}.$$

Jinak je možné Hausdorffovu dimenzi definovat i takto:

Nechť K značí délku celkového počtu $N_{(\epsilon)}$ úseček nutných k aproximaci dané křivky. Pro délku K platí vztah:

$$K = N_{(\epsilon)} \epsilon^D; \text{ kde } D \text{ je Hausdorffova dimenze}$$

Když budeme délku úsečky ϵ neustále zkracovat, potom platí:

$$K = \lim N_{(\epsilon)} \epsilon^{(D)} = \lim \frac{\epsilon^D}{\epsilon}$$

Pro $D > 1$ je délka K nekonečná, jestliže je $D < 1$ potom $K = 0$.

Představte si, že máte rozdělit úsečku o délce jedné jednotky na pět stejných dílků. Délka jednoho dílku bude tedy $\epsilon = \frac{1}{5}$. Po zobecnění to bude $\epsilon = \frac{1}{N_{(\epsilon)}}$. Když budeme místo úsečky dělit čtverec na 25 dílků, vzoreček bude vypadat stejně $\epsilon = \frac{1}{5}$. Zde po zobecnění je ovšem $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{N_{(\epsilon)}}}$. Podobně u krychle bude obecný vzorec vypadat $\epsilon = \frac{1}{\sqrt[3]{N_{(\epsilon)}}}$. Je možné zapsat obecný výraz:

$$\epsilon = \frac{1}{N_{(\epsilon)}^D}; \text{ kde } D \text{ je dimenze objektu.}$$

Po vyjádření D :

$$D = \frac{\log N_{(\epsilon)}}{\log \frac{1}{\epsilon}},$$

kde $N_{(\epsilon)}$ označujeme faktor změny délky a $\frac{1}{\epsilon}$ faktor změny měřítka.

2.2 Definice

„Není všechno zlato, co se třpytí“
lidové přísloví

Nejjednodušeji můžeme definovat fraktál jako **nekonečně členitý útvar**, což je opak geometricky hladkého útvaru. Mimo této definice existuje i tzv. obecná definice využívající soběpodobnosti:

„Fraktál je takový útvar, při jehož zvětšení dostaneme opět stejný obraz, bez ohledu na měřítko.“

Jestliže víme, co je to topologická dimenze a Hausdorffova dimenze, můžeme zde uvést definici fraktálu B. Mandelbrota, která je skutečnosti nejbližší. Nutno poznamenat, že matematická definice tohoto pojmu zatím neexistuje a ne všichni matematici se s touto definicí ztotožňují. Pro naše účely je však dostatečná.

„Fraktál je množina, jejíž Hausdorffova dimenze je větší, než dimenze topologická.“

2.3 Měření dimenze

„Čím více je experiment vzdálen od teorie, tím blíže je k Nobelově ceně.“
Frédéric Joliot-Curie

Nyní si ukážeme, jakým způsobem je možné spočítat Hausdorffovu dimenzi na některých jednoduchých útvarech, abychom lépe objasnili rozdíl mezi topologickou dimenzí a dimenzí Hausdorffovou. Nejprve začneme dimenze vyjadřovat pro objekty známé z klasické Euklidovské geometrie a později spočítáme Hausdorffovu dimenzi Kochovy vločky.

Nejjednodušším netriviálním příkladem bude zřejmě úsečka. Vytvoříme úsečku, která má jednotkovou délku. Nyní tuto úsečku rozdělíme na N dílů. To odpovídá tomu, jako bychom se na úsečku podívali s N -násobným zvětšením. Měřítko nové úsečky se tedy vypočítá následujícím způsobem:

$$s = \frac{1}{N},$$

kde s značí měřítko a N je počet dílů, na které se těleso (v našem případě úsečka) rozdělí. Pro Hausdorffovu dimenzi obecně platí následující podmínka:

$$Ns^D = 1$$

Z toho vyplývá, že Hausdorffova dimenze se pro dané dělení N a dané měřítko s vypočítá pomocí postupu:

$$\begin{aligned}
Ns^D &= 1 \\
\log Ns^D &= \log 1 \\
\log N + \log s^D &= 0 \\
\log N + D \log s &= 0 \\
D \log s &= -\log N \\
D &= \frac{-\log N}{\log s} \\
D &= \frac{\log N}{\log \frac{1}{s}}
\end{aligned}$$

Po dosazení výše uvedeného vztahu $s = \frac{1}{N}$ do vzorce $D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{s}}$ získáme výsledek:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{s}} = \frac{\log N}{\log N} = 1$$

Topologickou dimenzi úsečky samozřejmě známe z Euklidovské geometrie: je rovna jedné. Hausdorffovu dimenzi jsme nyní vypočítali a je také rovna jedné. Hausdorffova dimenze se tedy rovná dimenzi topologické. Z výše uvedené definice fraktálu tedy vyplývá, že úsečka není fraktál (pro fraktál musí být Hausdorffova dimenze ostře větší než dimenze topologická).

Dalším typickým a současně velmi jednoduchým tvarem, jehož Hausdorffovu dimenzi budeme zkoumat, je čtverec. Zkonstruuje čtverec, jehož hrany budou mít jednotkovou délku. Tento čtverec má plochu taktéž jednotkovou. Po dvojnásobném zjemnění čtverec vypadá tak, jako by měl čtyřnásobnou plochu. Měřítka se tedy musí změnit podle tohoto vztahu:

$$s = \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}$$

Hausdorffova dimenze čtverce se vypočítá dle vzorce:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{s}} = \frac{\log N}{\log N^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Topologická dimenze čtverce je rovna dvěma, neboť se jedná o plošný útvar z Euklidovské geometrie. Hausdorffova dimenze čtverce je taktéž rovna dvěma, proto čtverec opět není, za použití předchozí definice, fraktálem.

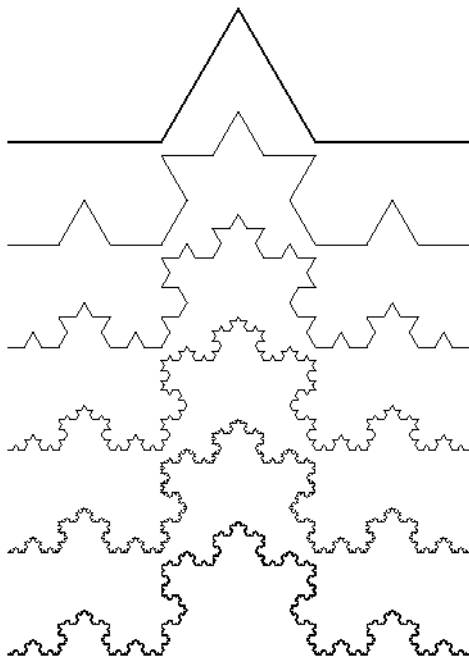
Pro vyšší dimenze vypadá výpočet obdobně, například pro krychli vytvořenou v prostoru E^3 . S rozdělením krychle na díly se výsledné krychličky zmenší o třetí odmocninu z N . Měřítka se poté vypočítá ze vztahu:

$$s = \frac{1}{N^{\frac{1}{3}}}$$

Hausdorffovu dimenzi krychle je možné vyjádřit následovně:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{s}} = \frac{\log N}{\log N^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

Topologická dimenze krychle je rovna třem, neboť se jedná o útvar v prostoru E^3 . Hausdorffova dimenze krychle je také rovna třem, krychle tedy, podobně jako úsečka a čtverec, také není fraktálem.



Obr. Iterace Kochovy křivky



Obr. Kochova křivka trochu jinak

Nyní zkusíme v našem experimentu pokračovat a vypočítat Hausdorffovu dimenzi útvaru, jehož zjemnění o jeden krok spočívá v tom, že se každá úsečka předchozího útvaru nahradí dvěma úsečkami se třetinovou délkou a rovnostranným trojúhelníkem sestrojeným uprostřed mezi dvěma novými úsečkami. Tento objekt se nazývá podle svého objevitele vločka či křivka Helge von Kocha.

Při trojnásobném zjemnění se délka křivky zvětší čtyřikrát, proto Hausdorffova dimenze není celé číslo. Pro $N = 4$ se tedy měřítko musí zmenšit na třetinu:

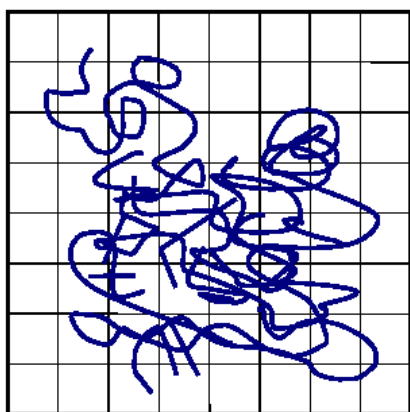
$$s = \frac{1}{3}$$

$$N = 4$$

Hausdorffova dimenze křivky Helge von Kocha se vypočítá jako:

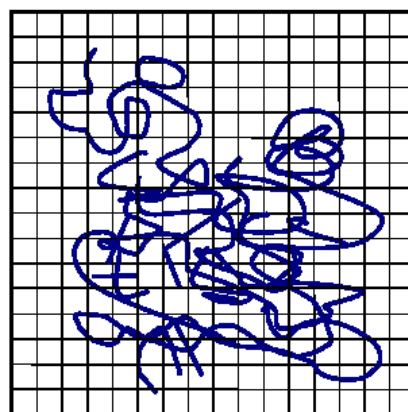
$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{s}} = \frac{\log 4}{\log 3} \cong 1.262$$

Topologická dimenze této křivky je rovna jedné, Hausdorffova dimenze je však větší než jedna. Z toho vyplývá, že **křivka Helge von Kocha je fraktálem**.



$$s = 1/8$$

$$N(s) = 48$$



$$s = 1/16$$

$$N(s) = 140$$

Obr. Ukázka použití mřížky

Nyní si na příkladu ukážeme výpočet mřížkové dimenze. Objekt, jehož dimenzi se snažíme zjistit, umístíme na mřížku se 64 políčky, přičemž 16 políček nám zůstane volných a do 48 objekt zasáhne. Tedy máme první dvě hodnoty:

$$\log \frac{1}{s} = \log 8 \quad \text{a}$$

$$\log N(s) = \log 48$$

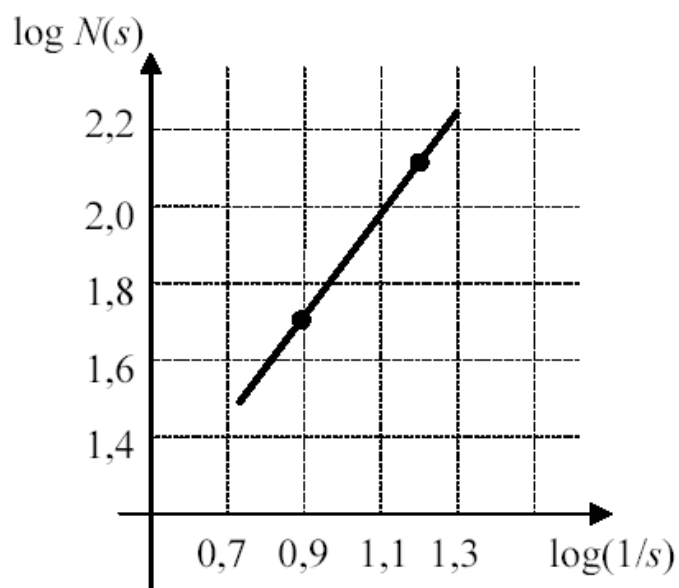
Zjištěné hodnoty logaritmů zaneseme pro názornost do grafu a potom hustotu mřížky zdvojnásobíme. Sledovaný objekt pak zasáhne do 140 políček z celkových 256. Další hodnoty pro výpočet směrnice jsou tedy:

$$\log \frac{1}{s} = \log 16 \quad \text{a}$$

$$\log N(s) = \log 140$$

Směrnice přímky je tedy:

$$\frac{\log 140 - \log 48}{\log 16 - \log 8} \cong \frac{0.465}{0.3} = 1.55$$



Obr. Graf k mřížkové dimenzi

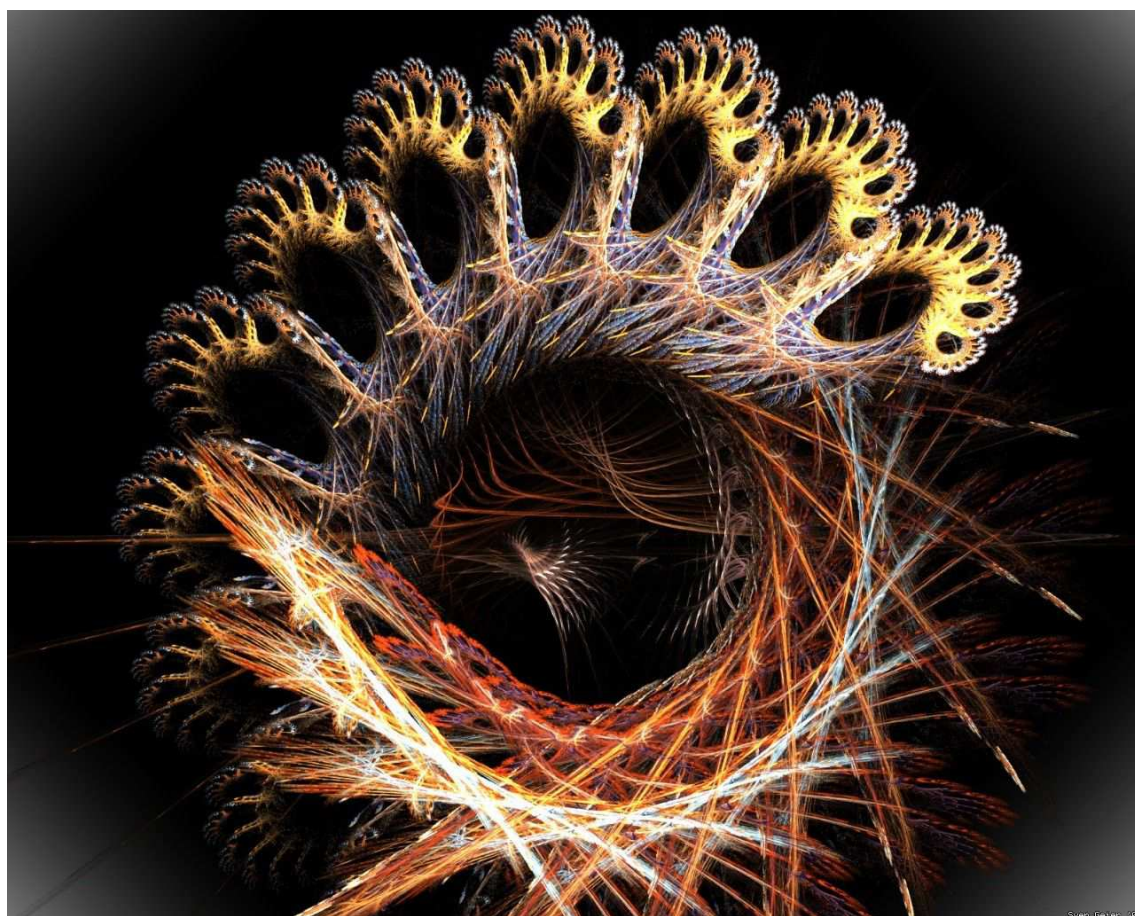
V následující tabulce je pro zajímavost uveden odhad Hausdorffovy dimenze některých přírodních útvarů.

<i>přírodní objekt</i>	<i>odhad fraktální dimeze</i>
Sierpinského trojúhelník	1.5850
Sierpinského koberec	1.8928
Cantorovo diskontinuum	0.6309
Kochova vložka	1.2618595
Hilbertova křivka	2
pobřeží	1.26
povrch mozku člověka	2.76
neerodované skály	2.2 - 2.3
obvod 2D průmětu oblaku	1.33

Kapitola 3

Typy a generování

Tuhle ti dám ten hrneček. Když ho doma postavíš na stůl a řekneš: „Hrnečku, vař!“
navarí ti tolik kaše, co budeš chtít.
K. J. Erben, Hrnečku, vař!



Podobně jako v ostatních vědních disciplínách se i ve fraktální geometrii začaly po určitém čase rozlišovat jednotlivé typy fraktálů, přičemž fraktály stejného typu mají shodné své nejvýznamnější charakteristiky. Toto rozlišování není zavedeno pouze kvůli systematičnosti, ale i proto, že jednotlivé typy fraktálů jsou vhodné pro řešení pouze určitého okruhu problémů. Také vlastní způsob generování fraktálů se liší podle typu fraktálu, přičemž fraktály stejného typu se většinou generují s využitím podobných algoritmů.

- L-systémy
- IFS
- Dynamické systémy s fraktální strukturou
- Náhodné fraktály

3.1 L-systémy

Název L-systémy vznikl buďto z anglického sousloví LOGO-like turtle, nebo podle botanika **Aristida Lindenmayera**, který je použil již v roce 1968 pro simulaci vývoje mnohobuněčných organismů. Takže v některé literatuře jsou také označovány termínem **Lindenmayerovy systémy**. Pro L-systémy se někdy používá i označení fraktální křivky. Nicméně LOGO je programovací jazyk, ve kterém se pomocí jednoduchých příkazů dají pomocí želvy kreslit různé obrazce. Podstatou tvorby L-systémů je přepisování řetězců podle určitých pravidel (gramatik). Každému terminálnímu symbolu (znaku, jež se nepřepisuje) v řetězci je přiřazen jistý geometrický význam, například transformace či generování objektu. Z toho, jak se fraktál generuje, je zřejmé, že jde o deterministický postup a výsledný fraktál je tedy též deterministický. Podívejme se nyní, jak se L-systém generuje.

Deterministický bezkontextový L-systém je uspořádaná trojice:

$$G = [V, P, S], \text{ kde}$$

- V je konečná abeceda symbolů
- P je konečná množina pravidel tvaru $A \rightarrow B$; $A \in V$; $B \in V^*$ tj. množině všech řetězců
- S je axiom: neprázdná posloupnost symbolů $S \in V^+$ tj. množině všech neprázdných řetězců

Determinismus tohoto L-systému pramení z podmínky, že v množině P nesmějí být dvě pravidla se stejnou levou stranou. Při přepisování tedy vždy přesně víme, které pravidlo pro přepis vybrat.

Derivace $(\rightarrow)$ řetězce $A \in V^*$ znamená paralelní přepsání všech symbolů $X \in A$ řetězce V z pravé strany pravidel z množiny P .

Například první dvě derivace L-systému G :

$$G = [\{A, F, -, +\}, \{A \rightarrow F - -F - -F, F \rightarrow F + F - -F + F, + \rightarrow +, - \rightarrow -\}, A]$$

s axiomem A mají podobu:

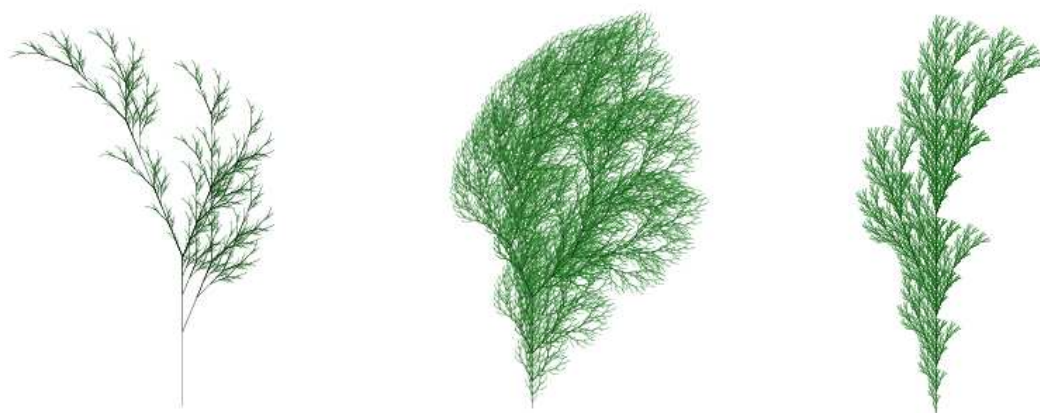
$$A \rightarrow F - -F - -F \rightarrow F + F - -F + F - -F + F - -F + F - -F + F.$$

Poslední posloupnost symbolů získaná v poslední derivaci se ve druhém kroku geometricky interpretuje. K tomu se používá takzvaná **želví grafika** (turtle graphics), ve které želva reprezentuje pomyslné kreslicí zařízení.

Želva je definována svým stavem a tabulkou akcí. Stav se skládá ze dvou prvků, z polohy želvy a z její orientace. Želva čte sekvenčně řetězec a pomocí tabulky akcí interpretuje jednotlivé symboly jako příkazy. Pro úplné zadání tedy musíme přiřadit každému symbolu jeho význam. Oproti předchozímu systému máme přidány symboly $(,)$.

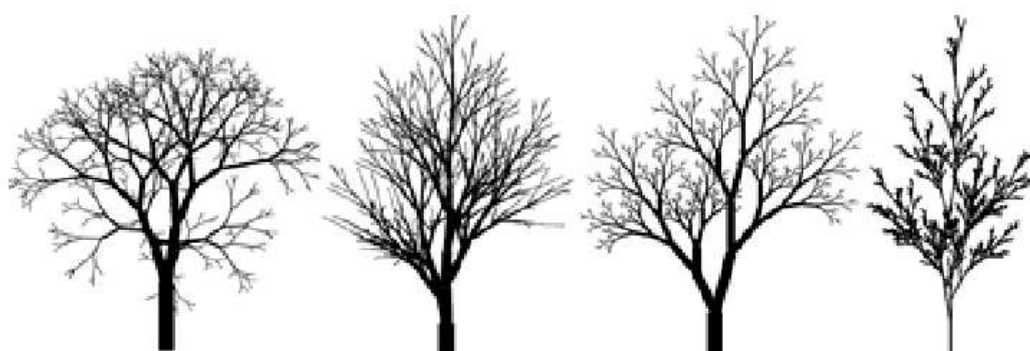
<i>symbol</i>	<i>význam</i>
F	posun želvy dopředu
B	posun želvy dozadu
$+$	natočení želvy doleva
$-$	natočení želvy doprava
$($	uschování stavu želvy do zásobníku
$)$	obnovení stavu želvy ze zásobníku

Pomocí těchto příkazů dovede želva kreslit různé rostliny, stromy, řeky atd. Záleží jen na vhodné volbě startovacího symbolu a přepisovacích pravidlech. Zajímavé obrazce s fraktální strukturou se začnou tvořit, jestliže v jazyce LOGO použijeme rekurzi, což odpovídá iteraci v gramatice (na pravé straně přepisovacího pravidla gramatiky je nonterminální symbol shodný se symbolem na levé straně pravidla). Jednou z možností, jak klasické L-systémy rozšířit, je použití více želv a zavedení nových symbolů pro souběžné nebo samostatné řízení těchto želv. Za pomoci L-systémů lze generovat fraktály, které se podobají rostlinám, stromům a dalším přírodním útvarům. Složitější aplikace směřují k využití těchto fraktálů ke generování plošných i prostorových textur.



Obr. Ukázka struktur generovaných pomocí L-systémů

Samozřejmě že existuje více druhů L-systémů, ale obecná klasifikace nebyla dosud zavedena. Pokusy o ní stále vycházejí z konkrétních oborů, kde jsou L-systémy používány. Za nejpřesnější a nejobecnější metodu jejich třídění můžeme považovat rozdělení podle způsobu jejich generování. Podrobné rozdělení těchto systémů včetně jejich přesných definic lze nalézt v [09], kam si dovoluji čtenáře odkázat, neboť se domnívám, že pro tuto práci není nadefinování podskupin L-systémů stěžejní. Typickým příkladem L-systému je Peanova a Hilbertova křivka nebo Kochova vločka. Tento druh fraktálu je využíván v biologii, geologii a podobných přírodních vědách. Jejich plnému využití zatím brání nedostatek údajů přesně popisujících morfologii přírodních objektů. To se projevuje zejména tehdy, když výzkum vedeme „do hloubky“ a nestačí nám jen prosté zobrazení.

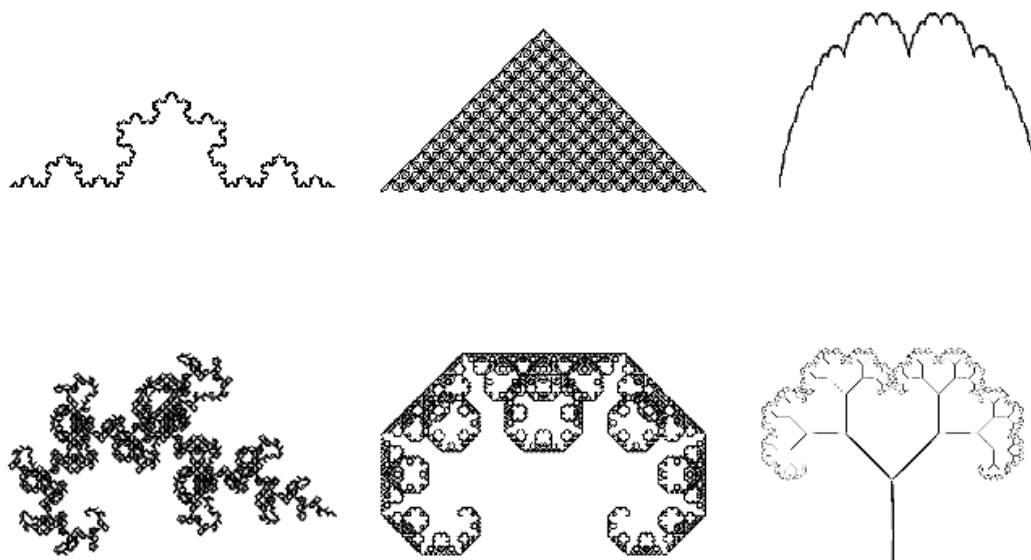


Obr. Struktury generované parametrickým L-systémem s odlišnými hodnotami parametrů

3.2 IFS

Název IFS systémů je odvozen z původního anglického označení Iterated Function System, česky lze tento název přeložit jako **systém iterovaných funkcí**. První pu-

blikace, které se týkaly IFS systémů, vydali v roce 1985 Demko a následně pak v roce 1987 Barnsley. Tvorba obrázků pomocí IFS systémů patří mezi generativní metody vytváření fraktálů, kterou řadíme mezi metody deterministické. Algoritmus pro generování IFS fraktálů však může být jak deterministický, tak nedeterministický. Oboje paradoxně vede ke stejnému výslednému fraktálu, použijeme-li dostatečný počet iterací. Práce se systémy IFS představuje jednu z často používaných aplikací procedurálního modelování těles. Ve velkém množství případů se však jedná o pouhý podpůrný nástroj bez další návaznosti na celé trojrozměrné scény.



Obr. Fraktály vytvořené pomocí IFS

Při definici IFS se vychází z teorie pevných bodů, která je aplikací **Banachovy věty o pevném bodu**:

Nechť U je metrický prostor s metrikou d a f je funkce:

$$f : A \rightarrow U \quad \text{přičemž } A \in U$$

Jestliže má funkce f bod x_0 takový, že platí:

$$f(x_0) = x_0,$$

pak se x_0 nazývá **pevný bod**.

Jestliže je $A \subset U$ a funkce $f : A \rightarrow A$, přičemž existuje určitá konstanta δ (nazývaná kontrakční faktor), pro kterou platí $0 < \delta < 1$, potom:

$$d[f(x), f(y)] < \delta d[x, y] \quad \text{a funkce } f \text{ se nazývá } \mathbf{kontrakce}.$$

Proměná d v našem případě znamená vzdálenost, ať už jakkoliv definovanou. Z toho vyplývá, že IFS mohou být definovány nad jakýmkoliv prostorem, který má definován pojem vzdálenosti. Například pro Euklidovu metriku platí:

$$d = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Po k iteracích potom platí:

$$d[f^{(k)}(x), x_0] < \delta^k d[x, x_0]$$

Jestliže vezmeme v úvahu tu skutečnost, že kontrakční faktor leží v rozsahu od nuly do jedné, potom limita pro k iterací, pro k blížíící se k nekonečnu, je rovna nule, tedy:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d[f^{(k)}(x), x_0] = 0$$

Dá se dokázat věta tvrdící, že pevný bod pro danou kontrakci existuje právě jeden. Touto problematikou se zabývá takzvaný **teorém pevného bodu**:

Jestliže je f kontrakce s kontrakčním faktorem δ na A ležící v U , potom existuje právě jeden pevný bod x_0 ležící v A , přičemž

$$d[x_k, X_0] < \delta^k d[x_0, x_0]$$

IFS je potom konečná množina kontrakcí definovaných na celém prostoru U , jedná se tedy o funkce $U \rightarrow U$ (tedy na sebe samu). Srovnáním rovnic pro IFS transformace a rovnic pro soběpodobnou množinu dojdeme k závěru, že aplikací IFS vznikne soběpodobná množina. Z těchto rovnic dále vyplývá, že IFS tvoří fraktál. Určit Hausdorffovu dimenzi tohoto fraktálu lze jen při zadaných transformacích tvořících IFS. Obecně lze však říci jen, že pro rovinné transformace může mít IFS Hausdorffovu dimenzi od 0 do 2.

Pro běžné použití IFS však uvažujeme pouze omezenou množinu transformací. Tyto transformace mají afinní povahu, tzn., že se skládají z násobné a přičítací matice.

$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad \text{kde } x, y \text{ jsou souřadnice.}$$

Afinní transformace mají tu vlastnost, že jsou lineární, to znamená, že při aplikaci takovéto transformace na úsečku vyjde rovněž úsečka. Použití tohoto typu transformací značně zjednodušuje všechny výpočty, které můžeme provádět s IFS množinou. Transformace musí splňovat ještě jednu podmínku, musí být kontrakcemi. To znamená, že po aplikaci transformace na libovolné dva body, bude nová vzdálenost bodů menší než původní vzdálenost bodů.

Transformace v Euklidově prostoru definujeme takto:

$$d(\phi(X) - \phi(Y)) < sd(X - Y)$$

kde $d(X)$ je Euklidova metrika, X a Y jsou libovolné dva body a $\phi(X)$ a $\phi(Y)$ jsou transformované body.

Podle velikosti koeficientu s pak určujeme typ transformace jako:

- $s < 1$: ϕ je zmenšení (kontrakce)
- $s = 1$: ϕ je symetrie
- $s > 1$: ϕ je zvětšení (extrakce)

K množině zobrazení $S = \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ náleží ještě množina pravděpodobností $P = p_1, p_2, \dots, p_n, p_i > 0$. Pro tyto pravděpodobnosti musí platit podmínka **jednotkového součtu**:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

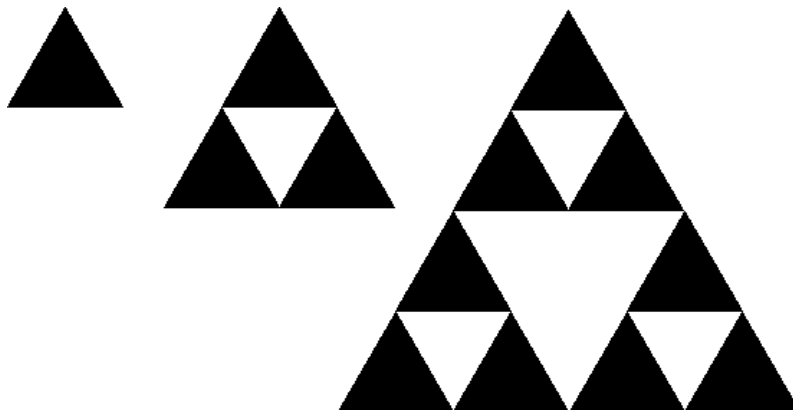
Množina S je **průměrně kontraktivní**, pokud platí podmínka:

$$s_1^{p_1} \cdot s_2^{p_2} \dots s_n^{p_n} < 1$$

Platí-li předchozí vztah, potom uspořádanou dvojici

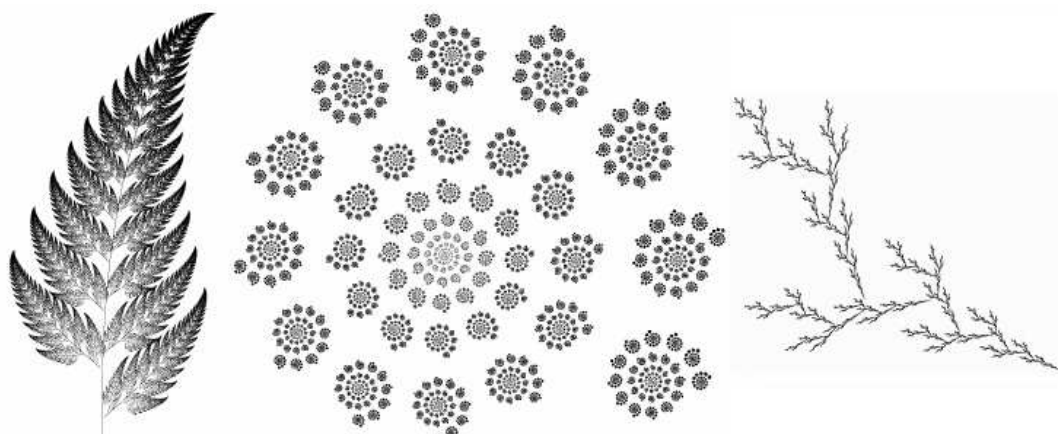
$$\text{IFS} = (\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}, \{p_1, p_2, \dots, p_n\})$$

nazveme systémem iterovaných funkcí (IFS).



Obr. Iterační metoda na Sierpinského trojúhelníku

Další způsob je na představení mnohem jednodušší. Jedná se o prostě iterační metodu, jednoduše představitelnou jako kopírovací stroj se sadou čoček, které obraz vstupu zmenšují a vytvářejí překrývající se kopie originálu. Výstup je pak přiveden opět na vstup a tak „kopírka“ pracuje iteračně. Jako příklad vezmeme opět Sierpinského trojúhelník. Nejprve tedy máme obecný, nejlépe ale rovnostranný trojúhelník. Nyní narýsujeme střední příčky, čímž počáteční trojúhelník rozdělíme na čtyři části a pak prostřední vyjmeme. Získáme tři kopie původního trojúhelníku a na ně aplikujeme stejné pravidlo. Po dostatečném počtu iterací dostaneme fraktální útvar. Metoda je triviální a je názornější, protože už od počátku vidíme obrysy cíle. IFS fraktálů je samozřejmě mnoho, nejenom Sierpinského trojúhelník, jako další příklady lze uvést Sierpinského koberec, Barsleyovu kapradinu a spousta dalších. Systémy iterovaných funkcí tvoří velmi důležitou skupinu lineárních deterministických fraktálů. Jejich nejdůležitější aplikací je v současné době takzvaná **fraktální komprese dat**.



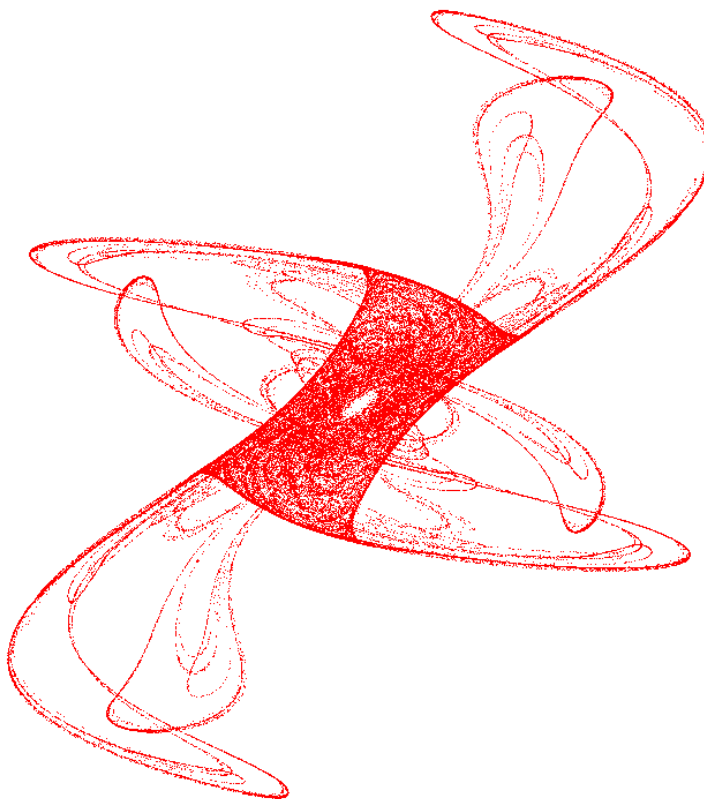
Obr. Fraktály vytvořené pomocí IFS

3.3 Dynamické systémy s fraktální strukturou

Dynamické systémy tvoří tu kategorii fraktálů, která má v technické praxi nejširší uplatnění, ale na rozdíl od předešlých dvou typů je nelze většinou použít pro zkoumání přírodních objektů. Často však vytvářejí fascinující obrazce, a proto jsou nejznámější. Dynamický systém je matematický objekt, jehož stav je závislý na nějaké nezávislé veličině, většinou to bývá na čase. Odtud je také odvozován název těchto systémů. Dynamický systém vychází z počátečních podmínek a je jimi v čase determinován. Jak již víme, existují dynamické systémy, které se po určitém čase neustálí v pevném stavu, ale ani nedivergují. Tento případ, který v určitých ohledech připomíná iracionální čísla, má většinou fraktální dynamiku a označuje se (pro někoho nesmyslným) termínem **deterministický chaos**.

Dynamický systém je popsán pomocí dynamických podmínek, které popisují změnu tohoto systému v čase. Stav systému v libovolném časovém okamžiku je potom reprezentován vektorem, který leží ve stavovém prostoru dynamického systému, nazývá se **stavový vektor**. Dynamické podmínky jsou většinou zadány soustavou diferenciálních rovnic, které popisují změnu stavového vektoru v čase. Změna stavu dynamického systému se děje řešením těchto diferenciálních rovnic a nahrazením starého stavového vektoru novým.

Typickým příkladem dynamického systému s fraktální dynamikou je výpočet populačního růstu, který má tu zajímavou vlastnost, že volbou jediného parametru lze určit, zda bude systém ustálený, oscilující nebo chaotický. Při zkoumání dynamiky populačního růstu byly také objeveny některé konstanty, které mají obecnou platnost, podobně jako například konstanta π nebo základ přirozených logaritmů e . Dynamické systémy s fraktální strukturou existují i v komplexní rovině. Z těchto systémů jsou asi nejvíce známy **Juliovy množiny** a **Mandelbrotova množina**. Existuje i rozšíření Juliovy množiny a Mandelbrotovy množiny do hyperkomplexního prostoru. Dalším notoricky známým příkladem dynamického systému je **Lorenzovo vodní kolo**. Existují i jiné fraktály generované pomocí dynamických systémů, například **King's dream**, který vymyslel Clifford Pickover čistě z estetického hlediska.



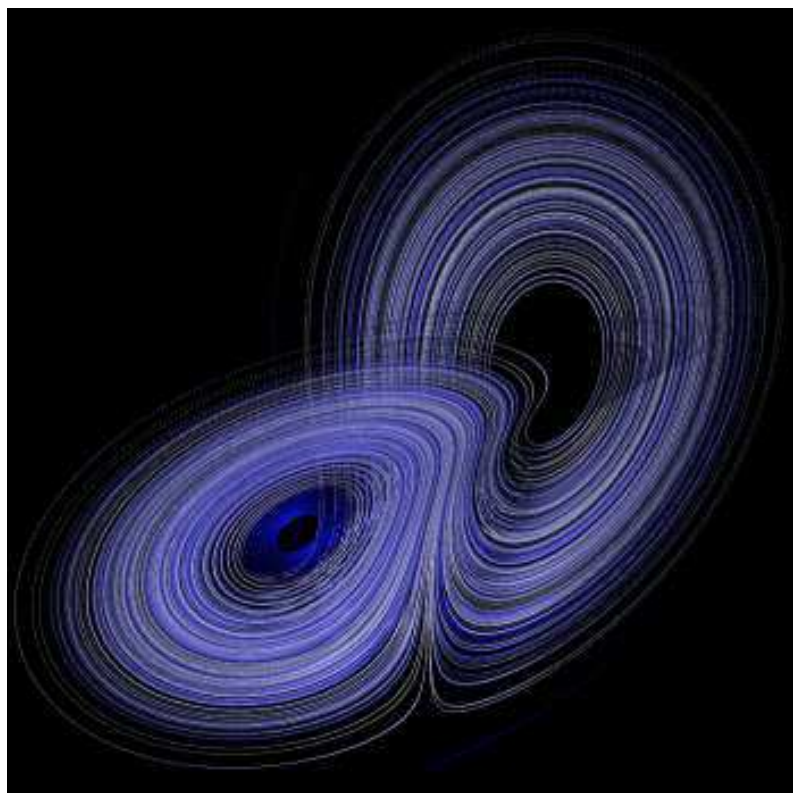
Obr. Fraktál King's dream

Znalost toho, zda nějaký systém je ustálený, či zda směřuje k chaosu, je velmi důležitá pro výpočty nad tímto systémem. Pro chaotický systém (nebo fraktálně dynamický systém) nelze předpovědět stav systému ve vzdálené budoucnosti (až na jednu známou výjimku). A to ani kdybychom simulovali celý vývoj systému, protože možnosti a kapacity výpočetní techniky jsou omezené. Taktéž platí, že dynamické systémy jsou obecně velmi závislé na počátečních podmínkách, takže i nepatrná změna počátečních podmínek má za následek odlišné chování systému v budoucnosti.

Z hlediska počítačové grafiky je nejzajímavější vhodným způsobem vizualizovat nějakou vlastnost dynamického systému - v případě systémů v komplexní rovině se může jednat například o počet iterací. V soustavě souřadnic testujeme různé hodnoty, které dosazujeme do původní rovnice. Na její výsledek aplikujeme iterativně stejné pravidlo. Pravou stranu dosadíme do levé a tak stále pokračujeme. Z toho vyplývá, že výsledku bychom se dobrali až v nekonečném čase. V praxi se tedy stanoví limitní hranice pro počet iterací. Pokud atraktor jasně směřuje do své oblasti přitažlivosti, výpočet ukončíme a bod pro větší efektivitu obarvíme příslušnou barvou podle počtu iterací. Pokud dosáhneme limitní hodnoty, pak bod obarvíme implicitní barvou. Generování těchto fraktálů tedy není zcela exaktní, závisí na počtu iterací. Ovšem čím větší kvalitu požadujeme, tím větší nároky klademe na hardware počítače.

V předchozím odstavci jsme použili pojem **atraktor**, který je třeba podrobněji objasnit, neboť má u dynamických systémů zásadní význam. Vlastně už při zobrazování IFS systémů většinou vykresluje právě atraktor tohoto dynamického systému. Atraktor dynamického systému je množina stavů, do kterých systém směřuje. Jinými slovy se jedná o množinu hodnot, kterých může nabývat stavový vektor dynamického systému po dostatečně dlouhém časovém úseku od chvíle, kdy je systém inicializován. Atraktory rozdělujeme do několika základních tříd:

- atraktorem systému může být množina pevných bodů;
- atraktorem může být množina periodických bodů;
- atraktorem může být množina kvaziperiodických bodů;
- atraktor je chaotický;
- atraktor je „podivný“.



Obr. Lorenzův atraktor

Jsou-li atraktorem dynamického systému **pevné body** (resp. množina pevných bodů), jedná se o nejjednodušší případ, protože se systém v nekonečném čase ustálil v nějakém stabilním stavu, který je možné dopředu vypočítat. Jsou-li atraktorem **periodické body** (resp. kvaziperiodické body), jde také o vcelku jednoduchý případ. Systém se totiž po určité době ustálí tak, že osciluje mezi několika stavy a ty mohou a nemusí být analyticky vyjádřitelné. Je-li **atraktor chaotický**, znamená to, že výsledný stav systému nelze v podstatě nijak dopředu předpovědět. To může být způsobeno mimo jiné tím, že je systém velmi citlivý na počáteční podmínky. Chaotičnost v tomto případě neznamena náhodnost, protože se stále bavíme o systémech deterministických. **Podivný atraktor** je z hlediska fraktální geometrie nejzajímavějším případem atraktoru. Tento typ atraktoru může vzniknout tehdy, je-li systém popsán soustavou alespoň tří diferenciálních rovnic. Takový systém může mít velmi komplikovaný atraktor, který sice bude vykazovat vlastnosti pravidelného, ale současně i chaotického atraktoru. Termín podivný atraktor není ještě přesně matematicky definován, ale považujeme za něj takový atraktor, který vykazuje vlastnosti do jisté míry shodné s těmi, jaké mají fraktály. Dále platí, že všechny chaotické atraktory jsou současně podivnými atraktory, opačná implikace však neplatí.

3.4 Náhodné fraktály

Poměrně velkou skupinu fraktálů tvoří fraktály nepravidelné. Zatímco všechny předchozí typy fraktálů byly v určitém smyslu symetrické, nepravidelné fraktály jsou generovány algoritmy, do nichž je vnesena náhoda. Tento typ fraktálů také umožňuje nejlepší popis přírodních objektů. Zatímco při generování stromu klasickým L-systémem nebo IFS koláží dostaneme jako výsledek perfektně symetrický strom, je skutečnost už na první pohled zcela jiná. Strom rostoucí v přírodě má nepravidelné délky a tloušťky větví, úhel růstu větví také není vždy stejný, strom rostoucí v lese má jiný tvar než tentýž druh stromu rostoucí osamoceně apod. Proto je velmi vhodné zavést do generování fraktálů náhodu. Způsob, jakým se náhodnost bude podílet při generování fraktálů, bude vždy určovat tvar fraktálu a mimo další charakteristiky i jeho Hausdorffovu dimenzi. Pro generování náhodných čísel se používá například Gaussovský generátor nebo generátor bílého šumu.

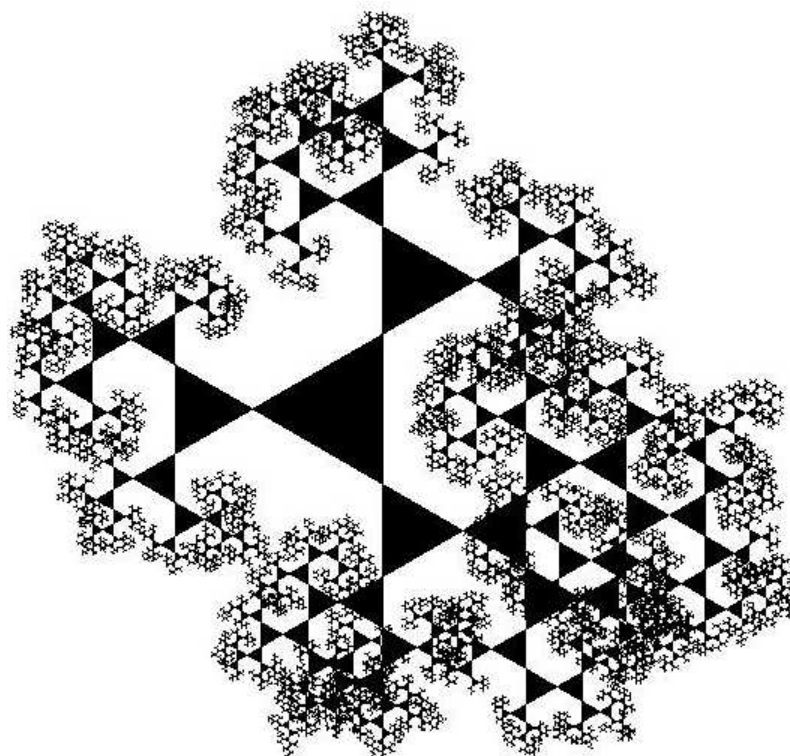
Ve stručnosti se na tyto dva generátory podíváme podrobněji. Generátor náhodných čísel generuje čísla vždy z daného intervalu. Je tedy zaručené, že vygenerovaná čísla nepřekročí meze daného intervalu $< a, b >$. Důležité je, že generátor generuje čísla s určitým statistickým rozdělením. Nejjednodušší je **generátor bílého šumu**, který má rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti a pravděpodobnostní funkce $f(x)$ je definovaná takto:

$$f(x) = \begin{cases} h & \text{pro } x \in < a, b > \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Pravděpodobnostní funkce $f(x)$ říká, s jakou pravděpodobností bude vygenerované náhodné číslo x . Pro praktické účely se většinou používá **Gaussovský generátor**, který má tvar:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

kde σ je rozptyl, který vyjadřuje „ostrost“ generátoru a μ je střední hodnota, která je číslo generované s největší pravděpodobností. Výhodou tohoto generátoru je, že Gaussovskému rozložení odpovídá většina přírodních jevů, jako je výška stromů vybraného druhu, počet narozených mláďat u savců, inteligenční kvocient u lidí a apod.

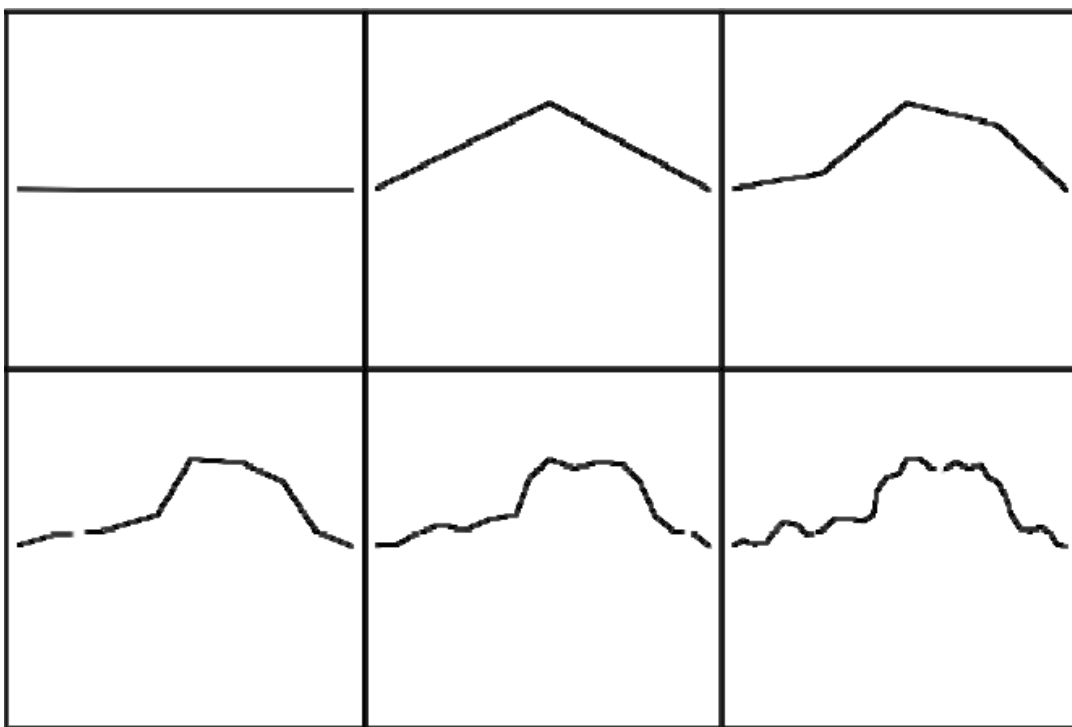


Obr. Ukázka Náhodného fraktálu

Náhodné fraktály můžeme vytvářet více způsoby. První způsob spočívá v náhodném přesouvání bodu, který za sebou zanechává stopu buď v ploše, nebo v prostoru. Tedy simulací Brownova pohybu. Druhý způsob spočívá v použití metody přesouvání středního bodu a třetí způsob využívá spektrální syntézu.

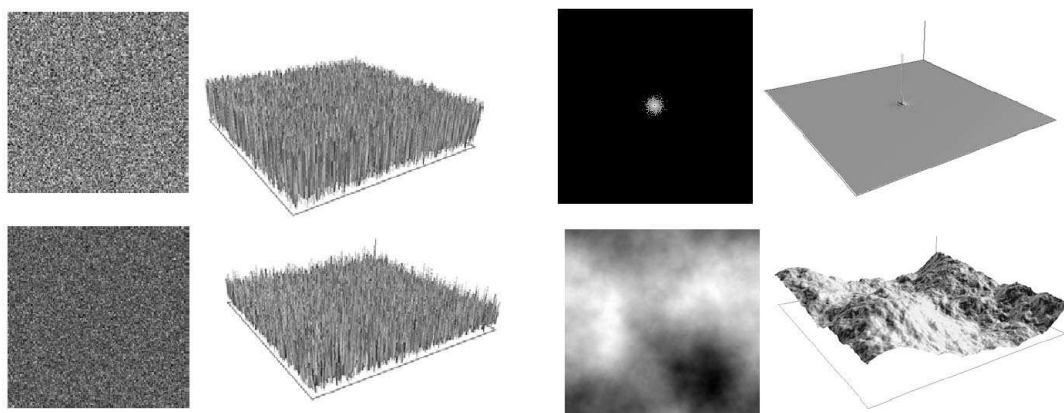
Simulace Brownova pohybu vytváří fraktální objekt, jehož Hausdorffova dimenze je úměrná absolutní velikosti změny při jednom kroku iterace. Tato metoda se používá například při generování toků řek, není však příliš vhodná pro trojrozměrné objekty. Také vytváření obrazů difúze je založeno na Brownově pohybu.

Mezi typické metody generování stochastických fraktálů patří metoda **přesouvání prostředního bodu**, a to jak na ploše, tak i v prostoru. V jednoduchosti lze tuto metodu popsat jako rekurzivní dělení úsečky (při práci v ploše) na polovinu s přesouváním prostředního bodu o náhodné číslo (s gaussovým rozložením pravděpodobnosti). Počáteční iterace dají objektu hlavní tvar a další vytvoří zvrásnění a detaily. Nakonec se křivka vyhladí a vytvoří se eroze. Tato metoda se velmi často používá v počítačové grafice k vygenerování takzvaného výškového pole a následné vizualizaci přírodní krajiny. Volbou maximální odchylky při posunu prostředního bodu lze potom měnit celkový ráz krajiny od pouště až po velehory s rozeklanými vrcholky.



Obr. Vizualizace metody přesouvání prostředního bodu

Další často používanou metodou je **spektrální syntéza**, která vychází z principu výpočtu Fourierovy řady. Metoda spočívá v tom, že náhodně vygenerujeme Fourierovy obrazy, které mají spektrální hustotu úměrnou zadané Hausdorffově dimenzi. Potom provedeme inverzní Fourierovu transformaci s těmito koeficienty (převod z frekvenční oblasti do oblasti časové). Výsledkem je fraktální objekt. Vizualizace tohoto postupu na obrázku snad alespoň trochu přiblíží jeho průběh i složitost. Pomocí této metody lze generovat hory či povrchy planet. Velkou výhodou je, že lze přímo zadat požadovanou Hausdorffovu dimenzi výsledného objektu.

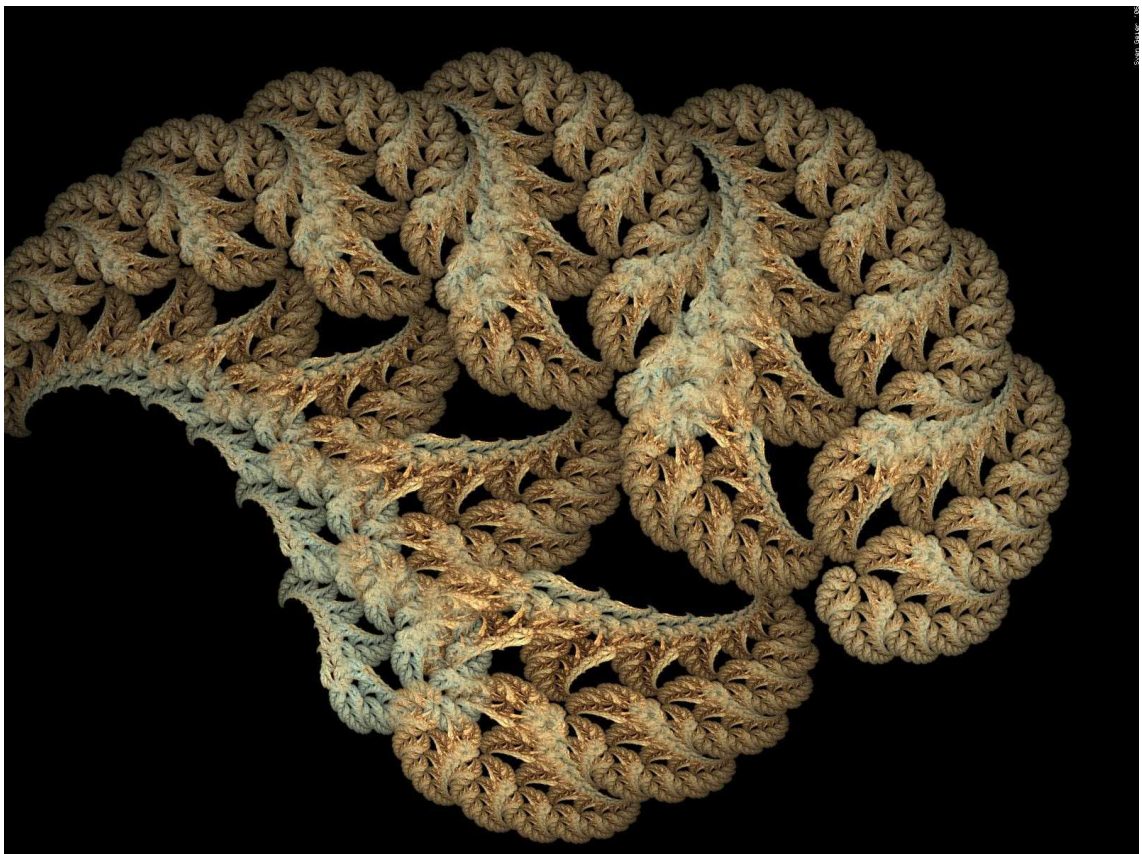


Obr. Vizualizace syntézy krajiny

Kapitola 4

Fraktály v dnešní praxi

„Svět je napsán jazykem matematiky.“
Galileo Galilei



Fraktální geometrie postupně přechází z fáze objevování do fáze praktického využití. Spousta jevů v reálném světě je závislá na náhodě. Od počasí, chemických reakcí až po sociologii nebo ekonomiku. Vědci se odjakživa pokoušeli popsat tyto jevy matematickými vztahy, ale až moderní matematice se v nich daří nacházet principy jejich chování. Zasloužil se o to hlavně B. B. Mandelbrot, který zjistil, že se v chaosu vyskytují některé fraktální zásady. Především je chaos soběpodobný i soběpříbuzný, takže nezáleží na zvoleném měřítku či úhlu pohledu a stále se jedná o chaos.

Fraktály se využívají v **biologii**, **chemii** a **medicině** pro modelování různých procesů. Metody vyvinuté teorií chaosu se osvědčují u mnoha biologických a fyziologických problémů, týkajících se člověka, např. tzv. chaotické filtry umějí oddělit EKG signál plodu od celkového signálu EKG matky a dalšího šumu. Pokud je EKG signál srdce naprosto periodický, jedná se často o patologické stavy, např. fibrilaci. Jisté studie se zabývají i možnou fraktální strukturou naší genetické informace - nukleových kyselin DNA a RNA. Poslední dobou se fraktální geometrie využívá i při zkoumání vlastností krve, kdy se měří Hausdorffova dimenze jejích částíček. Někteří odborníci také zkoumají, zda má nějakou souvislost Hausdorffova dimenze povrchu mozku a inteligence člověka či jeho paměťové schopnosti, protože povrch mozku je tvořen mozkovými závití, které svým počtem a členitostí určují různé schopnosti mozku, například paměť či inteligenci.

Jedním z problémů, které úzce souvisí s fraktály a dynamickými systémy, je takzvaný **problém tří těles**. Jde o úlohu z klasické newtonovské fyziky, kterou jsme nastínili již výše. Problém tří těles je definován tak, že máme ve vesmíru tři tělesa a dané počáteční podmínky (tedy polohu těles, jejich hmotnost, počáteční rychlost a směr pohybu). Máme analyticky vypočítat polohu těles v libovolném okamžiku. Bylo dokázáno, že tento problém není analyticky řešitelný, což je jistě zajímavé, protože problém dvou těles je v newtonovské mechanice až triviálně jednoduchý. Při studiu pohybu tří těles se ukázalo, že se tělesa pohybují po částečně chaotických drahách a jsou přitahovány k určitým bodům na své dráze, k atraktorům. V tomto případě k podivným atraktorům.

Také **Brownův pohyb** má fraktální strukturu. Brownův pohyb vzniká chaotickým pohybem částíček v hmotě, který je způsoben nenulovou teplotou tělesa. Brownův pohyb lze sledovat například při míchání dvou kapalin či plynů, ale lze ho i poměrně věrně simulovat na počítači s využitím fraktální geometrie.

Podrobně Nzkoumána byla a je především **ekonomika**. Vývoj trhu má totiž řadu chaotizujících faktorů. Mezi roky 1935 a 1947 pravidelně sledoval **R. N. Elliot** hodinová data na New Yorské burze. Díky shromážděným údajům byl schopen popsat chování trhu. Po něm byla pak nazvána tzv. Elliotova vlna. Bylo prokázáno, že Elliotovy vlny jsou fraktály, protože je jedna Elliotova vlna tvořena mnoha dalšími a nezáleží na měřítku pohledu. Mají dvě fáze, které se cyklicky opakují. Jsou to impulsní (ve směru trendu) a korekční fáze (proti směru trendu). Impulsní fáze

má tři vzestupné vlny s pěti zlomy a korekční má dvě vlny se třemi zlomy. Platí, že po pátém zlomu impulsní fáze přijde fáze korekční a po třetím zlomu korekční fáze přijde fáze impulsní. Problémem je, že ne všechny Elliotovy vlny musí mít všechny náležitosti. Často se vyskytují nejrůznější deformace.

Velmi zajímavou **fyzikální** oblastí, ve které byly objeveny fraktály, je zkoumání změny stavu některých materiálů. Podrobně byla studována například změna stavu magnetického materiálu na materiál nemagnetický. Materiál je uspořádán z elementárních magnetů, které v závislosti na teplotě určují, zda je materiál magnetický či nikoliv. Při nízkých teplotách je materiál jako celek magnetický, ale při mikroskopickém pohledu existují jisté lokální fluktuace, kde nejsou elementární magnety uspořádané. Naopak, za dostatečně vysoké teploty je materiál jako celek nemagnetický, ale existují domény, kde jsou elementární magnety uspořádány. Vlastnost magnetismu je tedy závislá na „měřítku pohledu“ na materiál. Při kritické teplotě (takzvaná Curieova teplota) materiál přechází z magnetického stavu do nemagnetického a naopak. Jestliže je materiál zahřán přesně na tuto teplotu, vypadá stejně ve všech měřítkách a má fraktální strukturu. Při této teplotě také nemůžeme jednoznačně dokázat, zda je materiál magnetický či nikoli. Tato fraktální struktura existuje například i při změně skupenství látky, jako je tání ledu či vypařování vody. Základní stavy hmoty jsou z makroskopického hlediska tři (pevné, kapalné, plynné), můžeme však přidat i plazmu a další (například degenerovaná hmota). Z mikroskopického hlediska je ovšem těchto stavů mnohem více a přechody mezi těmito stavy nejsou skokové. Fraktální strukturu hmoty potom můžeme vidět při přechodu hmoty z jednoho stavu do stavu druhého.

Pravděpodobně největší uplatnění má fraktální geometrie a fraktály v počítačové grafice. **Počítačová grafika** dává vědcům aparát, pomocí kterého mohou fraktály detailně zkoumat, a naopak počítačová grafika hojně využívá poznatků vyplývajících ze zkoumání fraktálů. S rozvojem grafických schopností počítačů se stále více ukazovalo, že je zapotřebí objevit nové postupy, jak **modelovat přírodní objekty**. V principu jsou možné tři různé způsoby zadávání dat pro modely.

Prvním způsobem je modelování objektů animátorem. Pro tento způsob se dlouhou dobu vytvářely modelovací programy typu CAD a CAM. V případě modelování technických a geometrických předmětů je tento způsob ideální. Problém nastává v případě, že chceme modelovat nějaký složitější přírodní objekt, například hory nebo stromy. Množství vytvářených dat je obrovské a vynaložená práce většinou neodpovídá kvalitě a věrohodnosti výsledku.

Druhým způsobem je přímé snímání (skenování) daného objektu. Tato metoda má své uplatnění, ale není výhodná ve všech případech. Prostorové (trojrozměrné) skenery jsou drahá zařízení, která mají omezenou rozlišovací schopnost. Také jsou schopny skenovat pouze objekty určité velikosti a struktury. Například skenování hory či stromu je nemožné. Také objekty, které mají velkou členitost, je obtížné skenovat (hlava člověka s vlasy). Množství výstupních dat, která vycházejí po na-

skenování, je obrovské, protože je objekt reprezentován malými trojúhelníčky. Proto se tato metoda používá jen pro určitý okruh problémů a je vyhrazena jen CAD pracovištím, která mají možnost si toto drahé zařízení pořídit.

Třetí způsob spočívá ve využití takzvaného procedurálního modelování. Animátor nezadává přímo tvar objektu, ale způsob, jakým bude objekt generován. Tato metoda má tu přednost, že objem zadávaných dat je většinou malý a výsledný objekt lze modifikovat změnou počátečních podmínek a tak lze vytvářet zajímavé animace, jako je například růst stromů. V této oblasti neexistuje lepší způsob, který by dal věrohodnější výsledky. Nevýhodou je nutnost výběru správné metody pro generování určité množiny objektů a také nutnost pochopit, co který parametr znamená a jak se projeví na výsledném tvaru objektu. Při vytváření objektu (zadávaní parametrů) není přímo vidět výsledek, pracuje se tedy metodou pokus – omyl. Při procedurálním modelování se mimo jiné používají i fraktály. Fraktály lze v počítačové grafice využít například ke generování přírodních útvarů, jako jsou stromy, rostliny, hory, mraky, kameny atd.

V odvětví **rozpoznávání obrazu** se asi nejdále zatím dostalo rozpoznávání písma. Přesto jsou nejmodernější technologie schopné rozpoznávat s vysokou úspěšností pouze tištěný text. S rukopisy mají již problémy a zatím neexistuje systém, který by byl schopen uspokojivě rozpoznat písmo dvou různých lidí.

Systémy iterovaných funkcí tvoří z hlediska užití v praxi velmi důležitou skupinu lineárních deterministických fraktálů. Jak už bylo dříve řečeno, první publikace o IFS publikoval Demko v roce 1985 a Barnsley v roce 1987. V obou publikacích autoři předkládají praktický návod, jak používat IFS pro generování textur. IFS se skutečně používají pro tuto činnost a to i v běžných aplikacích, jako jsou například počítačové hry. Obrovskou výhodou fraktálů je jejich paměťová nenáročnost. Data pro texturu, která má být generovaná fraktálem, mají velikost několika bytů nebo desítek bytů, oproti běžné bitmapě s velikostí řádově stovky kilobytů. Také je možno texturu zobrazit v různých velikostech, aniž by bylo vidět nějaké zkreslení, které běžně nastává u bitmapových textur.

Později se metoda IFS ukázala jako mimořádně výhodná pro **kompresi dat**, jelikož jedna transformace je v tomto případě zapsána pouze pomocí osmi čísel, a to šest čísel na zapsání transformace a dvě čísla na změnu kontrastu a jasu. Metodu IFS využívá mimo jiné i grafický formát FIF. V porovnání s ostatními grafickými formáty dosahuje většinou lepších výsledků nebo výsledků alespoň srovnatelných se ztrátovou metodou JPEG (komprese pomocí IFS je také ztrátová metoda). Tento grafický formát se bohužel moc nerozšířil, protože algoritmus komprese je patentovaný firmou Iteration Systems, která také dodává hardwarové akcelerátory do počítačů. Dekompresní algoritmy jsou dostatečně rychlé pro programovou implementaci a jsou volně dostupné. Například pro HTML prohlížeč Netscape existuje plug-in modul pro zobrazování obrázků typu FIF. Velkou výhodou tohoto formátu je možnost zobrazení obrázku ve velkém zvětšení bez viditelné ztráty kvality.

Třetí možností, kde lze využít IFS, je **konstrukce trojdimenzionálních objektů**, například stromů či rostlin, s následnou možností vizualizace. V této oblasti se využívá jak IFS, tak i L-systémy. Každý z těchto systémů se hodí k něčemu jinému. Pomocí L-systémů lze vytvářet polygonové objekty pro možnost dalšího zpracování v CAD systému. IFS naopak tvoří jednotlivé body, proto je vhodný například pro programy, které podporují složitější entity, jako jsou například koule. Souřadnice bodů vygenerovaných pomocí IFS je potom použita jako střed zobrazované koule. Zde je opět vidět pěkné využití fraktálů v počítačové grafice, jelikož ruční modelování stromu v CAD systému by bylo nesmírně pracné a dosažené výsledky by většinou neodpovídaly námaze. Jednotlivé body vygenerované pomocí IFS lze také použít jako generující body pro systémy částic, kde umožňují například simulaci růstu rostlin. Fraktály lze také využít při **animaci**. Rozšíříme-li generování fraktálu o jeden rozměr, lze tento nadbytečný rozměr považovat za čas, a tímto způsobem fraktál animovat. Tato metoda je použita při zobrazování ohně nebo pohybujících se mraků. Lze ji také kombinovat se systémem částic, což umožňuje animaci mnoha jevů, které nelze běžnými metodami ani zobrazit, ani odsimulovat.

Mnozí matematici, včetně B. Mandelbrota, byli uchváteni krásou fraktálů, které zkoumali a nejdén z nich si vytvářel fraktály jen tak pro jejich krásu. Velký rozmach **artware** nastal s příchodem osobních počítačů do domácností. Vznikly mnohé více či méně zdařilé programy pro generování fraktálních obrazců, kterých lze dnes na internetu nalézt tisíce. Artware se v dnešní době zaměřuje na dvojrozměrné obrazce, v nichž je většinou ještě třetí rozměr, který je vyjádřen barvou. Dle mého názoru jsou to právě tyto obrázky, které podstatnou měrou přispívají k popularizaci fraktální geometrie.

Závěr

„Fyzici si rádi myslí, že stačí říct: Toto jsou počáteční podmínky, co se bude dít dál?“
Richard P. Feynman

Myslím, že se podařilo vytvořit kompaktní text, který čtenáře uvede do problematiky a podle jeho matematických znalostí zavede pojmy fraktální geometrie a základní druhy fraktálů. Pro mě to byla konečně možnost a pádný důvod, abych se s fraktály poznal blíže sám a musím říci, že to bylo setkání příjemné. Na druhou stranu nemohu opomenout, že přesně definovat Hausdorffovu dimenzi nebo jednotlivé skupiny fraktálů, bez znalostí středoškolské a základů vysokoškolské matematiky, je velmi obtížné. Určitým zklamáním pro mne bylo, když jsem zjistil, že tato látka je pro středoškoláka nebo laika poněkud těžce stravitelná a v mnoha případech dokonce nezajímavá. O to větším zklamáním pak bylo, když jsem nenašel rozumné užití fraktálů pro výuku na střední škole, snad kromě výtvarné výchovy a trochu v programování. Tedy nepřekvapilo by mě, kdyby neoborní čtenáři definice přeskakovali a i nadále používali termíny fraktální geometrie poněkud nepřesně a nejistě. Pořád je to ale lepší, než kdyby se do čtení nepustili vůbec. Možná by bylo zajímavé diskutovat potřebu pojmu fraktál jako takového. Má označení fraktál i jiný než čistě informativní význam? Jakou novou informaci o objektu získám, když se dozvím, že se jedná o fraktál? A jakou informaci to přinese laikovi?

Co jsem úmyslně neuváděl a nevypracovával byly programy pro generování obrázků fraktálů. V mnoha případech lze fraktály popsat velmi jednoduchým algoritmem a tak na internetu existují opravdu spousty povedených aplikací a případný zájemce jistě nebude mít problém takovýto program najít, stejně jako galerie fraktálů. Tím nechci říci, že je něco špatného na tom, když si každý student napíše svůj vlastní program na generování nějakého fraktálu nebo si alespoň nějaký zkusí vygenerovat. Já jsem se úmyslně snažil vyhnout vkládání pěkných obrázků bez jiného významu než estetického.

Rád bych se na tomto místě také zmínil o absolutním nedostatku odborné literatury v češtině k danému tématu. Je pravdou, že takřka každý člověk ovládá alespoň jeden světový jazyk, ale absence české literatury osvětě jistě nepřispívá. Nechť je tato práce prospěšná i z tohoto hlediska.

Literatura

- [01] Mandelbrot Benoit B. *Fraktály*. Praha: Mladá Fronta, 2003
- [02] Gleick J. *Chaos: vznik nové vědy*. Brno: Ando Publishing, 1996
- [03] Murray J.D. *Mathematical Biology I an Introduction*. New York : Springer, 2002
- [04] Sochor J. *Fraktály*. <http://www.fi.muni.cz/~sochor/PA010/Slajdy/Fraktaly.pdf>, 2006
- [05] Pauš P. *Počítačové generování fraktálních množin*. <http://kmlinux.fjfi.cvut.cz/~pausp1/html/skola/fraktaly/reserse.htm>, 2006
- [06] Pauš P. *Počítačová analýza fraktálních množin*. http://kmlinux.fjfi.cvut.cz/~pausp1/html/skola/vyzkumny_ukol/vyzkumak.pdf, 2006
- [07] Hudec B. *Fraktály*. <http://www.cgg.cvut.cz/~zpg/prednasky/Fraktaly.pdf>, 2006
- [08] Sixta T. *Chaos a fraktály*. <http://www.sweb.cz/chaos.fraktaly/>, 2006
- [09] Herodes M. *Virtuální zahrada*. http://decibel.fi.muni.cz/HCILAB/people/xherodes/VirtualGarden_text.pdf, 2006
- [10] Vachtl P. *Fraktály a chaos I.* <http://amber.zine.cz/AZ0ld/Dimenze/fraktaly1.htm>, 2006
- [11] Vachtl P. *Fraktály a chaos II.* <http://amber.zine.cz/AZ0ld/Dimenze/fraktaly2.htm>, 2006
- [12] Tišnovský P. *Fraktály v počítačové grafice*. <http://www.root.cz/serialy/fraktaly-v-pocitacove-grafice/>, 2006
- [13] Pálková K. *Historie fraktálů*. <http://www.fi.muni.cz/usr/jkucera/pv109/2003p/xpalkov1.htm>, 2006

-
- [14] Hinner M. *Jemný úvod do fraktálů*. <http://www.penguin.cz/~mhi/math/Fraktaly/>, 2006
- [15] Příkryl M. *Fraktální komprese*. <http://www.prikryl.cz/cze/htmlseminarka.php?id=fraktal>, 2006
- [16] Heczko S. *Teorie chaosu a chování otevřených systémů*. http://www.sds.cz/docs/prectete/epubl/she_tch.htm, 2006
- [17] Tuleja S., Hanč J. *Teória chaosu a frakály*. <http://chaos.host.sk/>, 2006
- [18] Vašíček, J. *Krátký úvod do teorie chaosu a jeho odraz v meteorologii*. <http://www.pu.army.sk/view.php?cislocclanku=2003110701>, 2006
- [19] Hajmar J. *Zajímavé matematické objekty*. http://hajtmr.3web.cz/index.php?id_page=40, 2006
- [20] Punčochář M. *Svět plný fraktálů..* <http://home.icpf.cas.cz/slezak/Mywww/puncweb/worldfract/index.htm>, 2006
- [21] Tišnovský P. *Fraktály*. <http://www.vood.mysteria.cz/fraktaly/clanky/uvod.htm>, 2006
- [22] Šupina P. *Fraktály*. http://flashlight.slad.cz/files/fractals_cz.html, 2006
- [23] Červenka M. *Poznámky k chaosu*. <http://herodes.feld.cvut.cz/nonlin/chaos/chaos.php>, 2006

Rejstřík

- atraktor, 12, 42
- Banachova věta, 37
- Barsleyovu kapradinu, 40
- Besicovitch Abram, 24
- Bolzano Bernard, 11
- Brown Robert, 9
- Brownův pohyb, 9
- Cantor Georg, 12
- Cantorovo diskontinuum, 12
- Cellérier Charles, 11
- chaotické jevy, 8
- chaotický atraktor, 43
- definice fraktálu, 28
- deterministický chaos, 40
- Einstein Albert, 9
- Elliot R. N., 48
- Fatou Pierre, 17
- fraktál, 21
- fraktální dimenze, 24, 25
- fraktální komprese dat, 40, 50
- Gaussovský generátor, 44
- generování fraktálů, 33
- generátor bílého šumu, 44
- geometricky hladké objekty, 25
- Hausdorff Felix, 24
- Hausdorffova dimenze, 25, 26
- Hilbert David, 15
- Hilbertova křivka, 15
- Howard Lou, 16
- IFS, 36
- Julia Gaston, 17
- Juliova množina, 17
- Juliovy množiny, 41
- King's dream, 41
- Koch Helge, 14
- Kochova křivka, 15, 31
- kontrakce, 23, 37
- L-systémy, 34
- Lindenmayer Aristid, 34
- Lorenz Edward, 15
- Lorenzovo vodní kolo, 16, 41
- Malkus Willem, 16
- Mandelbrot Benoit, 19
- Mandelbrotova množina, 19, 41
- Menger Karl, 12
- Mengerova houba, 14
- měření délky pobřeží, 9
- mřížková dimenze, 25, 31
- Newton Isaac, 9
- Peano Giuseppe, 15
- Peanova křivka, 15
- pevný bod, 37
- podivný atraktor, 43
- Poincaré Jules Henri, 9
- problém tří těles, 9, 48
- přesouvání prostředního bodu, 45

Richardson Lewis Fry, 9, 25

Richardsonův efekt, 25

rozpoznávání obrazu, 50

Sierpinski Wacław, 12

Sierpinského koberec, 13, 40

Sierpinského trojúhelník, 12, 40

simulace Brownova pohybu, 45

soběpodobnost, 23

spektrální syntéza, 46

stavový vektor, 41

teorie chaosu, 8

teorém pevného bodu, 38

topologická dimenze, 24

turbulence, 10

Weierstrass Karl, 11

Yorke James, 17

želví grafika, 35