

# Využitie radiálnych bázičiek pre modelovanie interpolačných plôch zrážkových intenzít

## Using radial basis functions for modelling of the interpolation surfaces of the spatial rainfall

Bohdal Róbert, Bohdalová Mária

**Abstract:** This paper evaluates various interpolation methods based on radial basis functions. The aim of this paper is the modelling of spatial and temporal scaling exponent of rainfall over a range of scales. We will compare two most used methods: Thin Plate Spline method and Hardy's multi quadric function. Moreover, the second method will be evaluated for various parameters. These interpolation methods are employed, and examples of the results are given. Both modelling approaches are used to predict the rainfall intensity over all places in Slovakia. These model approaches give acceptable forecasts. Their accuracy will be evaluated by bootstrapping statistical approach. The models can be used to predict in real time the spatial rainfall.

**Abstrakt:** V príspevku vyhodnocujeme dve rôzne interpolačné metódy založené na radiálnych bázičiek s cieľom modelovať priestorový a časový škálovací exponent za účelom predpovedania zrážkovej intenzity pre ľubovoľné miesto na Slovensku. Porovnáваме dve najpoužívanejšie metódy: tenkosplajnovú a Hardyho. Ich presnosť vyhodnocujeme bootstrappingovým štatistickým prístupom. V závere stanovíme vhodný model, ktorý môže byť použitý na stanovenie intenzity zrážok v priestore a čase.

**Key words:** Thin Plate Spline, Hardy's Multiquadric Function, rainfall, scaling exponent.

**Kľúčové slová:** tenkostenný splajn, Hardyho multikvadratická funkcia, dažďové zrážky, škálovací exponent.

**JEL classification:** C02, C13, C63, C65.

### Úvod

V príspevku riešime problém interpolovania nerovnomerne rozložených bodov, ktoré predstavujú namerané hodnoty zrážok z jednotlivých merných staníc na Slovensku. Pre tento účel budeme skúmať vhodnosť použitia interpolačných metód založených na radiálnych bázičiek funkciách. Na záver vyhodnotíme presnosť jednotlivých metód bootstrappingovým prístupom a metódou Jack knife.

### 1 Metódy radiálnych bázičiek funkcií

Radiálne bázičiek funkcie získali obrovskú popularitu len nedávno. Ukázalo sa, že sú vhodné pre viacrozmernú interpoláciu nerovnomerne rozmiestnených údajov (Dyn, 1987, 1989), (Buhmann, 2000), (Iske 2003), (Powell, 1992). Sú jednoduché na implementáciu a vytvárajú interpolačnú plochu s dostatočnou hladkosťou. Ako prvý zaviedol tieto interpolačné funkcie na začiatku 70-tych rokov minulého storočia Hardy (Hardy, 1971). V uvedenej práci prvý raz použil metódu multikvadrík, ktorá opisuje konštrukciu multikvadratickej plochy pomocou súčtu častí rotačných plôch 2-dielnych hyperboloidov (resp. rotačných paraboloidov, v závislosti od hodnoty  $\mu$ ).

Radiálne bázičiek funkcie (RBF) sú definované pre danú množinu bodov  $\mathbf{P} = \mathbf{p}_i[x_i, y_i] \in \mathbb{E}^2$ , pre ktoré poznáme hodnoty  $z_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Našou úlohou je nájsť takú interpolačnú funkciu  $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , pre ktorú platí  $f(\mathbf{p}_i) = z_i$ , pre  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Pomocou metódy radiálnych bázičiek funkcií môžeme interpolačnú funkciu  $f(x, y) = f(\mathbf{x})$  zapísať v nasledujúcom tvare (Hoschek, Lasser, 1993):

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i R(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|) + \Phi_m(\mathbf{x}), \quad (1)$$

pričom 
$$\Phi_m(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^l c_k \Phi_k(\mathbf{x}), \quad (2)$$

kde  $\Phi_k(\mathbf{x}) \in \pi_m^2$ ,  $l = \dim(\pi_m^2) = \binom{m-1+2}{2}$ . Symbolom  $\pi_m^d$  označujeme lineárny priestor obsahujúci všetky polynómy nad poľom  $\mathbb{R}$  s  $d$  premennými a stupňa najvyššie  $m-1$ .

Funkcie  $R(r_i) = R(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|)$ ,  $r_i \geq 0$  vyjadrujú euklidovskú vzdialenosť bodov  $\mathbf{x}, \mathbf{p}_i$  a v literatúre (Hardy, 1971), (Iske, 2003), (Hoschek, Lasser, 1993), (Fogel, Tinney, 1996) sú známe pod názvom radiálne bázické funkcie. Spomedzi všetkých RBF sú najpoužívanejšie tzv. polyharmonické splajny. Do tejto triedy funkcií patria aj tenkostenné splajny. Ak potrebujeme obmedziť globálny vplyv transformačnej funkcie zvolíme také RBF, ktoré nepoužívajú polynomický člen  $\Phi_m(x)$  a ktorých vplyv v danom bode  $\mathbf{p}_i$  klesá s rastúcou vzdialenosťou (napr. gaussovské funkcie resp. recipročné multikvadriky (Iske, 2003)). Veľkosť vplyvu týchto funkcií môžeme riadiť pomocou parametrov  $\sigma$  a  $c$ , prípadne  $\mu$  (pozri tabuľku 1), avšak žiadna voľba týchto parametrov nezabezpečí čisto lokálny vplyv. Nevhodný výber parametra  $c$  môže viesť k riešeniu sústavy so zle podmienenou maticou vo vzťahu (3).

**Tab. 1** Prehľad radiálnych bázických funkcií  $R(r)$  (Iske, 2003)

Radiálna bázická funkcia	$R(r)$	Hodnoty parametrov <sup>1</sup>	$m$
Polyharmonické splajny v priestore $\mathbb{R}^d$	$r^{2k-d}$ $r^{2k-d} \log(r)$	$d$ je nepárne, $2k > d$ ( $k = 3, d = 3$ ) $d$ je párne, $2k > d$ ( $k = 2, d = 2$ )	$m = k - \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil + 1$
Gaussovské funkcie	$\exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right)$	$\sigma > 0, \left(\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$	$m = 0$
Multikvadriky	$(c^2 + r^2)^\mu$	$c, \mu > 0$ ( $c = 1, \mu = 1/2$ )	$m = \lceil \mu \rceil$

Interpoláčnú funkciu  $f(\mathbf{x})$  nájdeme tak, že vypočítame neznáme koeficienty  $\lambda_i$  pre jednotlivé radiálne bázické funkcie  $R(r_i)$  a podobne aj neznáme koeficienty  $c_k$  pre polynomický člen. Neznáme hodnoty  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$  vo vzťahu (1) a  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_l)^T$  vo vzťahu (2) určíme riešením nasledujúcej sústavy rovníc:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3)$$

kde  $\mathbf{A}_{i,j} = R(\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|)$ , pre  $i, j = 1, \dots, n$  a  $\mathbf{P}_{i,k} = \Phi_k(\mathbf{p}_i)$ , pre  $i = 1, \dots, n$  a  $k = 1, \dots, l$ .

Poznamenajme, že sústava rovníc (3) má riešenie práve vtedy, keď sú body  $\mathbf{p}_i$  nekolineárne.

### 1.1 Metóda tenkostenných splajnov

Tenkostenné splajny (thin plate splines) patria do triedy polyharmonických splajnov. Samotný názov „tenkostenné splajny“ zaviedol v roku 1977 Duchon (Duchon, 1977). Tento názov je odvodený zo vzťahu, v ktorom sa hľadá minimum integrálu opisujúceho rozloženie tzv. energie ohybu (bending energy) na nekonečne tenkej elastickej doske.

Duchon ukázal, že pre konečnú množinu bodov  $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^d$  je interpolant  $f(\mathbf{x})$  určený vzťahom:

<sup>1</sup> Vhodné hodnoty parametrov uvádzame v zátvorke

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i R_{d,k}(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|) + \sum_{|\mathbf{a}| < k} c^{\mathbf{a}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}}, \quad (4)$$

kde  $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$ ,  $|\mathbf{a}| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ .

Po dosadení  $d = 2$  (dimenzia priestoru  $\mathbb{E}^2$ ),  $k = 2$  (pozri tabuľku 1) môžeme predchádzajúci vzťah prepísať do tvaru:

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i^2 \log(r_i^2) + c_1 + c_2 x + c_3 y, \quad (5)$$

kde  $r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$

Využitím vzťahu (3) môžeme neznáme  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  a  $c_1, c_2, c_3$  vypočítať pomocou sústavy rovníc vyjadrených v maticovom tvare:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 0 & 0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 1 & x_1 & y_1 & 0 & r_{21}^2 \log(r_{21}^2) & \cdots & r_{n1}^2 \log(r_{n1}^2) \\ 1 & x_2 & y_2 & r_{12}^2 \log(r_{12}^2) & 0 & \cdots & r_{n2}^2 \log(r_{n2}^2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & r_{1n}^2 \log(r_{1n}^2) & r_{2n}^2 \log(r_{2n}^2) & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \lambda_1/2 \\ \lambda_2/2 \\ \vdots \\ \lambda_n/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}. \quad (6)$$

## 1.2 Metóda Hardyho multikvadrík

Táto metóda je veľmi podobná predchádzajúcej metóde. Rozdiel je len v tom, že používa iné RBF a pre  $d = 2$  (dimenzia priestoru  $\mathbb{E}^2$ ) nepoužíva polynomicke členy. Pre náš interpolačný problém dostávame nasledujúcu interpolačnú funkciu:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sqrt{r_i^2 + c^2}, \quad (7)$$

kde  $r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$ .

Hodnota  $c$  určuje tvar výslednej funkcie. Vo všeobecnosti platí, že menšia hodnota parametra  $c$  vytvára v grafe funkcie tzv. „ostré extrémny“ (pozri obrázok 2), zatiaľ čo jeho väčšia hodnota „vyhladzuje“ funkciu (pozri obrázok 4). V literatúre sa uvádzajú viaceré možnosti ako ho vhodne zvoliť (Hoschek, Lasser, 1993), (Fogel, Tinney, 1996). Tu uvedieme niektoré z nich:

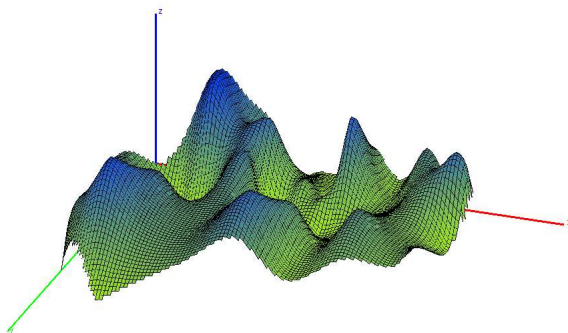
- $c = 0.815d$ , kde  $d$  je priemerná vzdialenosť bodov  $\mathbf{p}_i$  množiny  $\mathbf{P}$  k ich najbližším susedom,
- $c = 1.25D/n$ , kde  $D$  je priemer najmenšej kružnice, ktorá obsahuje všetky body množiny  $\mathbf{P}$ ,
- $c = \sqrt{\frac{1}{10} \max_{i,j} \|x_i - x_j\|}$
- $c = \sqrt{\frac{3}{5} \min_{i,j} \|x_i - x_j\|}$ .

(8)

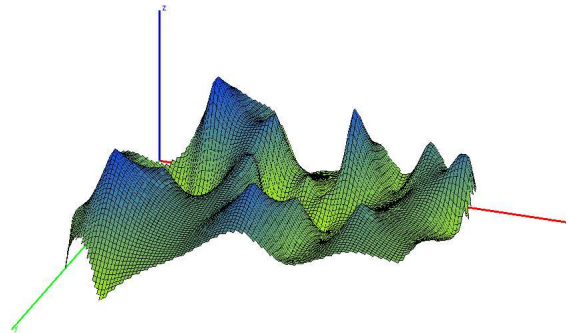
## 2 Aplikácia

Cieľom nášho príspevku bolo porovnať dve interpolačné metódy na reálnych údajoch a určiť vhodnejšiu z nich pomocou známych štatistických mier. Ako vstupné údaje sme použili maximálne intenzity zrážok zo 63 zrážkomerných staníc z celého územia Slovenska, pre trvania dažďov 5 až 180 min. V týchto zrážkomerných staniach bola použitá metóda jednoduchého škálovania na určenie návrhových dažďových intenzít pre celé Slovensko (pozri (Látečková, 2013)). Pre dané údaje sme určili jednotlivé modely, ktoré sme overovali nami navrhnutou metodikou. Zo 63 zadaných bodov (zrážkomerných staníc) sme vytvorili 100 testovacích vzoriek (ďalej vzorka 1). V každej testovacej vzorke sme náhodne vylučovali merania, pričom ich počet bol určený náhodným celým číslom z intervalu od 1 po 5. Na overenie modelov sa zvyčajne používa metodika Jack knife, známa tiež ako bumerangový test, v ktorej sa zo vzorky systematicky vylučuje vždy len jeden bod a preto je možné získať v našom prípade len 63 testovacích vzoriek (ďalej vzorka 2).

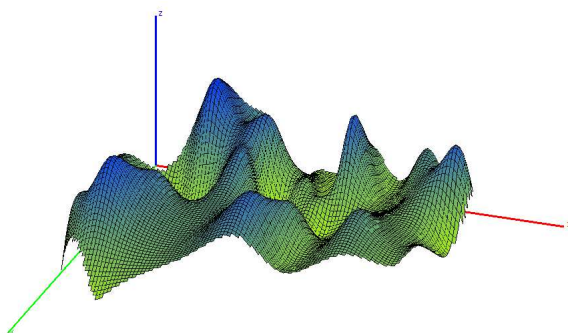
Pre obe vzorky sme použili dve vyššie uvedené interpolačné plochy založené na RBF (pozri kapitolu 1). Na rozdiel od tenkostenných splajnov metóda Hardyho multikvadrík používa i vstupný parameter  $c$ . Hodnoty tohto parametra sme postupne menili od 0.2 do 63 (Tab. 2). Hodnotu  $c = 63$  sme určili pomocou vzťahu (8). Ostatné vzťahy viedli k vysokej hodnote parametra  $c$ , preto sme ich nezahrnuli do testovania.



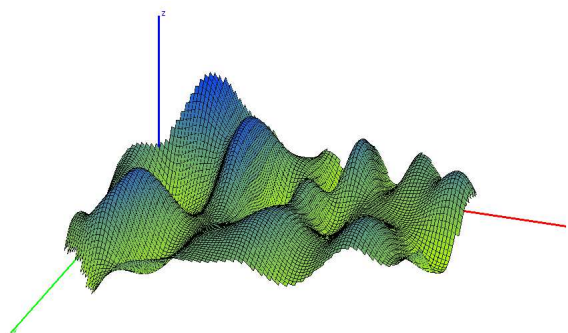
**Obr. 1: Interpolácia Tenkosplajnovou plochou**



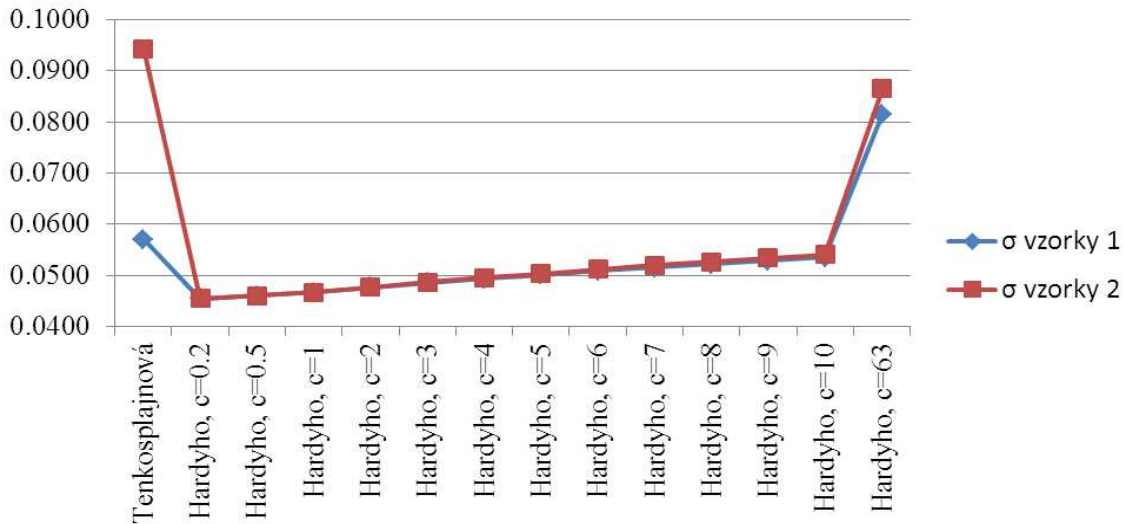
**Obr. 2: Interpolácia Hardyho multikvadríkom pre  $c = 0.2$**



**Obr. 3: Interpolácia Hardyho multikvadríkom pre  $c = 3$**



**Obr. 4: Interpolácia Hardyho multikvadríkom pre  $c = 63$**



Obr. 5: Porovnanie smerodajných odchýlok interpolačných metód

Tab. 2: Porovnanie  $\sigma$ , AIC a BIC interpolačných metód

Metóda	$\sigma$ vzorky 1	$\sigma$ vzorky 2	AIC	BIC
Tenkosplajnová	0.0570	0.0942	-3.7296	-0.0325
Hardyho, $c=0.2$	0.0455	0.0455	-4.1787	-0.4816
Hardyho, $c=0.5$	0.0460	0.0460	-4.1574	-0.4603
Hardyho, $c=1$	0.0466	0.0466	-4.1303	-0.4332
Hardyho, $c=2$	0.0477	0.0477	-4.0871	-0.3900
Hardyho, $c=3$	0.0485	0.0487	-4.0503	-0.3532
Hardyho, $c=4$	0.0494	0.0496	-4.0170	-0.3199
Hardyho, $c=5$	0.0501	0.0504	-3.9867	-0.2896
Hardyho, $c=6$	0.0508	0.0512	-3.9578	-0.2607
Hardyho, $c=7$	0.0515	0.0519	-3.9310	-0.2339
Hardyho, $c=8$	0.0522	0.0527	-3.9050	-0.2079
Hardyho, $c=9$	0.0529	0.0534	-3.8802	-0.1831
Hardyho, $c=10$	0.0535	0.0541	-3.8563	-0.1592
Hardyho, $c=63$	0.0815	0.0864	-3.7413	-0.0442

### 3 Záver

Z grafu na obrázku 5 vyplýva, že tenkosplajnové interpolačné plochy sú citlivé na výber vzorky, pretože obsahujú polynomický člen, ktorý zabezpečuje globálny vplyv<sup>2</sup>. Odhady parametra  $c$  pre interpolačné plochy vytvorené Hardyho multikvadríkami uvedené v kapitole 1.2 sú pre naše údaje nevyhovujúce, keďže aj najmenšia hodnota parametra  $c = 63$  už dáva horšie výsledky v porovnaní s tenkosplajnovou plochou. Heuristickou metódou sme odhadli, že hodnota parametra  $c = 3$  pre našu dátovú množinu dáva uspokojivé výsledky s dostatočne vizuálne hladkou plochou. Príspevkom sme ukázali, že ak určíme vhodnú hodnotu parametra  $c$  dostaneme oveľa presnejšie výsledky ako u tenkosplajnových plôch, ktoré sú vo všeobecnosti používanjšie, pretože nevyžadujú odhad žiadneho parametra. V problematike interpolovania škálovacieho exponentu za účelom predpovedania zrážkovej intenzity nebola metóda Hardy-

<sup>2</sup> Globálny vplyv znamená, že zmena jedného interpolovaného bodu spôsobí zmenu na veľkej časti plochy.

ho multikvadrík zatiaľ použitá a rovnako nebola zatiaľ použitá nami navrhnutá metóda vytvárania vzoriek pre testovanie vhodnosti správnej metódy pre reálne údaje.

#### 4 PodĎakovanie

Príspevok bol podporený grantom SPINKLAR-3D (Project VEGA No. 1/1106/11)

#### 5 Literatúra

- [1] AMIDROR, I., 2002. Scattered data interpolation methods for electronic imaging systems. *Journal of Electronic Imaging* 2(11), str. 157–176.
- [2] BARA, M., GAÁL, L., KOHNOVÁ, S., SZOLGAY, J., HLAVČOVÁ, K., 2008. Simple scaling of extreme rainfall in Slovakia: a case study. In: *Meteorological Journal*. 4(11), str. 153–157.
- [3] BOHDAL, R., BOHDALOVÁ, M., 2009. Scaling exponent of rainfall modeling by interpolation methods. In: *Forum Statisticum Slovaca* 3, str. 1–6.
- [4] BOOKSTEIN, F., 1989. Principal Warps: Thin-plate splines and the decomposition of deformations. In: *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine* 6(11), 1989, str. 567–585.
- [5] BUHMANN, M.D., 2000. Radial basis functions. *Acta Numerica*, str. 1–38.
- [6] DUCHON, J., 1977. *Lecture Notes in Mathematics* 571. Springer–Verlag, Berlin, str. 85–100.
- [7] DYN N., 1987. Interpolation of scattered data by radial functions, In: *Topics in Multivariate Approximation*, (Eds. Chui C.K., Schumaker L.L. and Utreras F.I.), Academic Press, New York, str. 47–61.
- [8] DYN N., 1989. Interpolation and approximation by radial and related functions, (Eds. Chui C.K., Schumaker L.L. and Ward J.D.), Academic Press, New York, str. 211–234.
- [9] FOGEL, D., TINNEY, L., 1996. Image Registration using Multiquadric Functions, the Finite Element Method, Bivariate Mapping Polynomials and the Thin Plate Spline. *National Center for Geographic Information and Analysis*, str. 1–63.
- [10] FRANKE, R., Nielson, G., 1980. Smooth interpolation of large sets of scattered data. *Intern. Journal for Numerical Methods in Engineering* (15), str. 1691–1704.
- [11] FRANKE, R. 1982. Scattered data interpolation: Test of some methods. *Mathematics of Computation* 38(157), str. 181–200.
- [12] HARDY, R., 1971. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. In: *Journal Geophysical Research* U(76), str. 1905–1915.
- [13] HOSCHEK, J., LASSER, D., 1993. *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. A K Peters, Wellesley, MA, str. 388–421.
- [14] ISKE, A., 2003. Radial basis functions: basics, advanced topics and meshfree methods for Transport Problem. *Seminar of Mathematics*, str. 247–274.
- [15] LÁTEČKOVÁ, J. 2013. Škálovanie intenzít krátkodobých dažďov v jednotlivých mesiacoch a sezónach na Slovensku. Dizertačná práca, SvF STU v Bratislave, 126s.
- [16] LÁTEČKOVÁ, J., KOHNOVÁ, S., GAÁL, L., SZOLGAY, J. 2011. Odvodenie škálovacích exponentov intenzít dažďov pre jednotlivé mesiace teplého polroku vo vybraných staniách oblasti severovýchodného Slovenska. In: *Acta Hydrologica Slovaca*, špeciálne číslo, 12, 47–54.
- [17] MENABDE, M., SEED, A., PEGRAM, G. 1999. A simple scaling model for extreme rainfall. *Water Resour. Res.*, 35 (1), 1999, s. 335–339

- [18] POWELL, M.J.D.,1992. The theory of radial basis function approximation in 1990.  
In:Advances in numerical analysis II: wavelets, subdivision and radial basis functions,  
(Ed. Light W.A.), Clarendon Press, Oxford, str. 105–210.

**Adresa autorov:**

Róbert Bohdal, RNDr. PhD.  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Univerzity Komenského  
Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava  
Robert.bohdal@fmph.uniba.sk

Mária Bohdalová, doc., RNDr., PhD.  
Fakulta managementu  
Univerzity Komenského  
Odbojárov 10, 820 05 Bratislava  
maria.bohdalova@fm.uniba.sk