Výpočet prienikov

Róbert Bohdal

robert.bohdal@fmph.uniba.sk

https:\\flurry.dg.fmph.uniba.sk\webog\bohdal-vyucba

Katedra algebry a geometrie
Fakulta matematiky fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave

Počítačová grafika (1)
prednáška č. 7

Obsah

Výpočet prienikov

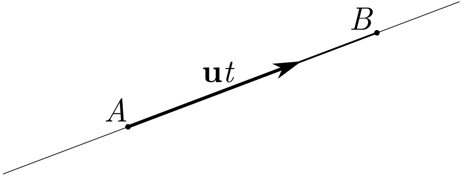
- Výpočet prienikov objektov je veľmi častá operácia v počítačovej grafike
- Pri renderovaní 3D scény zaberá tento výpočet vyše 90% výpočtového času
- Pre urýchlenie výpočtov prieniku sa ku každému objektu alebo jeho časti priradí ohraničujúce teleso (*bounding volume*)
- Výpočet prieniku objektu s ohraničujúcim telesom druhého objektu je rýchlejší ako výpočet prieniku s pôvodným objektom
- Ohraničujúcim telesom býva najčastejšie axiálny kváder, guľa, elipsoid či kapsula (valec + polgule), valec alebo ich kombinácia, ak má objekt jednotlivé časti zvlášť ohraničené
- Pri hľadaní prieniku dvoch daných objektov testujeme najprv prienik ich ohraničujúcich telies
- Ak majú ohraničujúce telesá objektov prázdny prienik, potom sa objekty neprenikajú
- Často (najmä pri reprezentácii objektov mnohouholníkovou sieťou) sa dá zložitý výpočet prieniku dvoch objektov zjednodušiť na hľadanie prieniku úsečky (prípadne polpriamky) s mnohouholníkom

Výpočet prienikov

- Úsečku zadanú dvoma koncovými bodmi $A = (a_x, a_y)$, $B = (b_x, b_y)$ budeme parametrizovať na štandardný tvar $A + \mathbf{u} \cdot t$, kde $\mathbf{u} = B - A$ a $t \in \langle 0, 1 \rangle$:

$$x = a_x + u_x t$$
$$y = a_y + u_y t$$

- V prípade polpriamky je $t \in \langle 0, \infty)$, pre priamku je $t \in (-\infty, \infty)$



Prienik dvoch úsečiek v rovine

Majme úsečku $A + \mathbf{u}s$ danú bodom $A = (a_x, a_y)$ a vektorom $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$, a úsečku $B + \mathbf{v}t$ danú bodom $B = (b_x, b_y)$ a vektorom $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$:

$$
\begin{aligned}
x &= a_x + u_x s & x &= b_x + v_x t \\
y &= a_y + u_y s,\ \ s \in \langle 0, 1 \rangle & y &= b_y + v_y t,\ \ t \in \langle 0, 1 \rangle
\end{aligned}
$$

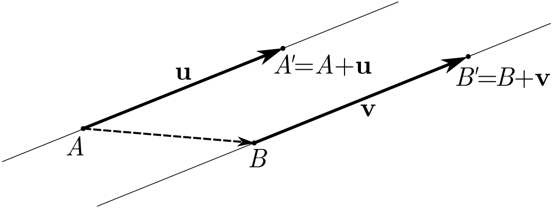
Označme symbolom $\mathbf{w}^\perp$ vektor kolmý na $\mathbf{w} = (w_x, w_y)$, ktorý získame z vektora $\mathbf{w}$ otočením o 90°. Vektor $\mathbf{w}^\perp$ potom bude mať súradnice $(-w_y, w_y)$

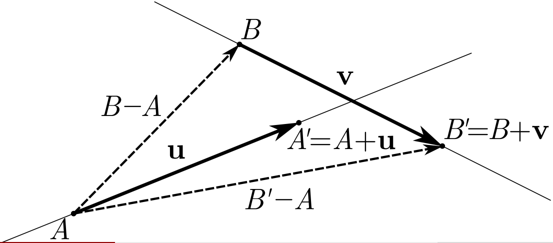
- Úsečky $A + \mathbf{u}s$ a $B + \mathbf{v}t$ sú rovnobežné $\Leftrightarrow$ $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ sú rovnobežné $\Leftrightarrow$ $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}^\perp$ sú navzájom kolmé $\Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^\perp = 0$
  - úsečky ležia na spoločnej priamke $\Leftrightarrow B - A \parallel \mathbf{v} \Leftrightarrow (B - A) \cdot \mathbf{v}^\perp = 0$,
  - úsečky ležia na rôznych priamkach $\Leftrightarrow B - A \nparallel \mathbf{v} \Leftrightarrow (B - A) \cdot \mathbf{v}^\perp \neq 0$

  Ak úsečky ležia na spoločnej priamke, potom treba zoradiť všetky štyri koncové body podľa vhodnej súradnice a z ich poradia sa dá usúdiť, či majú prienik. Ak úsečky ležia na rôznych priamkach, potom prienik nemajú

Prienik dvoch úsečiek v rovine

- Úsečky $A + \mathbf{u}s$ a $B + \mathbf{v}t$ sú rôznobežné $\Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^{\perp} \neq 0$
  - úsečky majú prienik, ak koncové body každej z úsečiek ležia v opačných polrovinách určenej priamkou obsahujúcou druhú úsečku,
  - úsečky nemajú prienik, ak koncové body jednej z úsečiek ležia v tej istej polrovine určenej priamkou obsahujúcou druhú úsečku





Prienik dvoch úsečiek v rovine

- Body B a $B' = B + \mathbf{v}$ ležia na opačných polrovinách od priamky určenej úsečkou $A + \mathbf{u}s$, ak bázy $\mathbf{u}$, $B - A$ a $\mathbf{u}$, $B' - A$ (na poradí vektorov záleží!) sú opačne orientované

Na zisťovanie orientácie bázy nám poslúži nasledovná lema:

Lema

Pre ľubovoľné lineárne nezávislé vektory $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ a $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ je báza $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ kladne (záporne) orientovaná práve vtedy, keď:

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} > 0 \; (< 0)$$

Kladne orientovanou bázou máme na mysli bázu orientovanú súhlasne s bázou tvorenou elementárnymi vektormi $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$

Dôkaz predošlej lemy je založený na vektorovom súčine $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(0,\; 0,\; \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}\right)$

Prienik dvoch úsečiek v rovine

Ak úsečky majú spoločný bod, potom bázy $\mathbf{u}$, $B - A$ a $\mathbf{u}$, $B' - A$ sú opačne orientované a súčasne aj bázy $\mathbf{v}, A - B$ a $\mathbf{v}, A' - B$ sú opačne orientované

- Pre výpočet prieniku vypočítame neznámy parameter s alebo t:

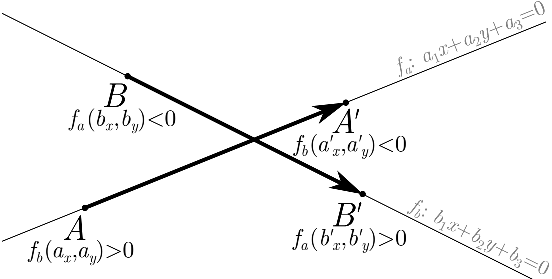
$$\begin{aligned} A + \mathbf{u}s &= B + \mathbf{v}t \\ \mathbf{u}s - \mathbf{v}t &= B - A \quad \mid \cdot \mathbf{v}^{\perp} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^{\perp} s &= (B - A) \cdot \mathbf{v}^{\perp} \\ s &= \frac{(B - A) \cdot \mathbf{v}^{\perp}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^{\perp}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A + \mathbf{u}s &= B + \mathbf{v}t \\ \mathbf{u}s - \mathbf{v}t &= B - A \quad \mid \cdot \mathbf{u}^{\perp} \\ -\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^{\perp} t &= (B - A) \cdot \mathbf{u}^{\perp} \\ t &= \frac{(B - A) \cdot \mathbf{u}^{\perp}}{-\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^{\perp}} = \frac{(B - A) \cdot \mathbf{u}^{\perp}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^{\perp}} \end{aligned}$$

- Výpočet prieniku uskutočňujeme, iba ak predošlý test s bázami ukázal, že sú opačne orientované
- Ak $s, t \in \langle 0, 1 \rangle$, tak úsečky majú prienik. V opačnom prípade prienik nemajú
- Pre výpočet bodu prieniku dosadíme vypočítaný parameter s, resp. t do vyjadrenia úsečky $A + \mathbf{u}s$, resp. $B + \mathbf{v}t$

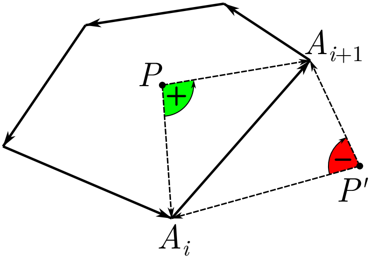
Prienik dvoch úsečiek v rovine

- Body B a B' ležia v opačných polrovinách určenej priamkou obsahujúcou úsečku AA' : $f_a(x,y) = a_1 x + a_2 y + a_3$, ak $f_a(b_x, b_y) \cdot f_a(b'_x, b'_y) < 0$
- Body A a A' ležia v opačných polrovinách určenej priamkou obsahujúcou úsečku BB' : $f_b(x,y) = b_1 x + b_2 y + b_3$, ak $f_b(a_x, a_y) \cdot f_b(a'_x, a'_y) < 0$
- Ak obe nerovnice platia súčasne, potom dané úsečky AA' a BB' majú „vnútorný" prienik



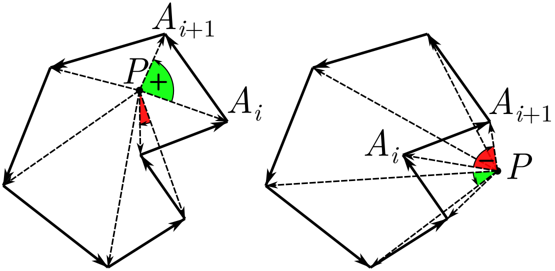
Bod a mnohouholník v rovine

- Pre mnohouholník $A_1 \ldots A_n$ a bod P potrebujeme určiť ich vzájomnú polohu, teda zistiť, či bod P leží vnútri mnohouholníka alebo zvonka. Na rozhodnutie, či bod P leží vnútri, máme niekoľko testov:
  - test pre konvexný mnohouholník,
  - test pomocou súčtu uhlov,
  - test pomocou parity počtu priesečníkov s polpriamkou
- Ak je mnohouholník $A_1 \ldots A_n$ konvexný a kladne orientovaný, stačí pre každú hranu A_iA_{i+1} overiť, či $A_i - P, A_{i+1} - P$ je kladne orientovaná báza. Môžeme pri tom použiť predchádzajúcu lemu o určení orientácie bázy vektorov



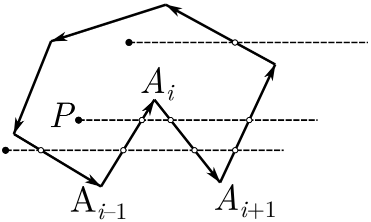
Test pomocou súčtu uhlov

- Bod P leží zvonka mnohouholníka $A_1 \ldots A_n$, ak je súčet **orientovaných** uhlov $\angle A_i P A_{i+1}$ 0 stupňov
- Veľkosť orientovaného uhla je kladná, ak sa od hrany PA_i dostaneme ku hrane PA_{i+1} otočením proti smeru hodinových ručičiek o uhol menší ako 180°, v opačnom prípade je jeho veľkosť záporná
- Použité trigonometrické funkcie v programe (atan) sú vyčíslené len približne, preto súčet nemusí byť presne hodnota 0
- Použitie tohto kritéria je výpočtovo náročné, preto sa nepoužíva



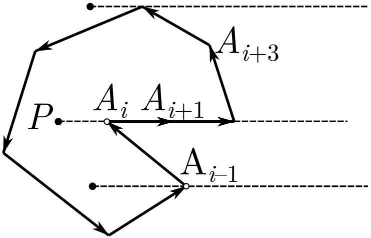
Test pomocou parity počtu priesečníkov s polpriamkou

- Z bodu P vedieme ľubovoľnú polpriamku (zvyčajne vodorovnú alebo zvislú), ktorá nám pretne hranicu mnohouholníka v konečne veľa bodoch
  - ak je počet týchto priesečníkov párny, bod P sa nachádza zvonka mnohouholníka $A_1 \ldots A_n$,
  - ak je počet týchto priesečníkov nepárny, bod P sa nachádza v mnohouholníku



Test pomocou parity počtu priesečníkov s polpriamkou

- Treba ošetriť prípady, keď polpriamka prechádza vrcholom A_i mnohouholníka:
  - ak sa vrcholy A_{i-1} a A_{i+1} nachádzajú v opačných polrovinách určených priamkou PA_i, započítame priesečník ako jeden bod,
  - ak sú vrcholy A_{i-1} a A_{i+1} v tej istej polrovine určených priamkou PA_i, bod A_i ako priesečník nepočítame,
  - ak sa aj vrchol A_{i-1} alebo A_{i+1} nachádza na polpriamke (t.j. hrana mnohouholníka leží na polpriamke), potom nájdeme najbližší vrchol predchádzajúci vrcholu A_i, ktorý neleží na priamke a podobne najbližší nasledujúci. Podľa týchto dvoch vrcholov rozhodneme, či A_i započítať medzi priesečníky alebo nie. Pre ďalšie vrcholy (v aktuálnom slede) ležiace na polpriamke už test nevykonávame, t.j. vyšetrujeme iba prvý vrchol ležiaci na polpriamke



Prienik úsečky a mnohouholníka v rovine

- Ak chceme iba nájsť prienik úsečky s hranicou (lomenou čiarou) mnohouholníka, stačí viackrát vyriešiť problém prieniku dvoch úsečiek, konkrétne zadanej úsečky a každej hrany, ktorá tvorí hranicu mnohouholníka
- Ak potrebujeme nájsť časti úsečky, ktoré ležia vo vnútri mnohouholníka, je treba vykonať ďalšie kroky, v ktorom sa využije usporiadanie prienikov podľa parametra t a princíp prepínania „dovnútra/von“

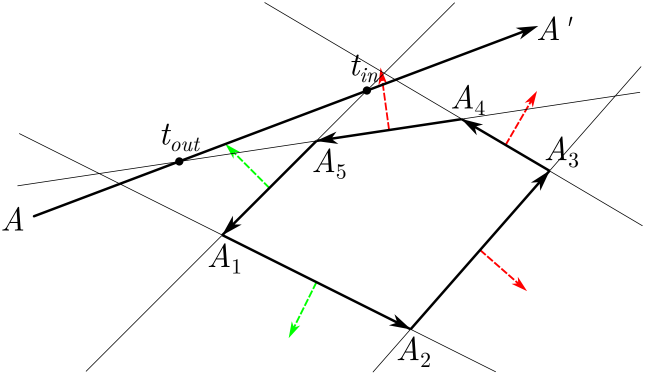
Prienik úsečky a **konvexného** mnohouholníka v rovine

- Ak je mnohouholník $A_1 \dots A_n$ **konvexný** (tak je prienikom konečného počtu polrovín), je možné nájsť prienik úsečky AA' s mnohouholníkom pomocou prieniku úsečky s každou určujúcou polrovinou mnohouholníka
- Podobne ako pri algoritmoch viditeľnosti, je každá strana mnohouholníka vzhľadom na smer úsečky AA' privrátená alebo odvrátená:
  - strana A_iA_{i+1} je privrátená, ak orientovaná úsečka AA' vstupuje do polroviny mnohouholníka určenej priamkou A_iA_{i+1}
  - strana A_iA_{i+1} je odvrátená, ak orientovaná úsečka AA' vystupuje z polroviny mnohouholníka určenej priamkou A_iA_{i+1}
- Pre každdú priamku A_iA_{i+1} s ktorou má úsečka AA' prienik, vypočítame hodnotu parametera t, ktorý určuje bod priesečníku úsečky a priamky. Samotné body prieniku úsečky a mnohouholníka vypočítame až po nasledujúcom teste
- Úsečka AA' vstupuje do $A_1 \dots A_n$ mnohouholníka v bode *posledného* priesečníka so všetkými privrátenými priamkami, a vystupuje z mnohouholníka v bode *prvého* priesečníka so všetkými odvrátenými priamkami
- Ak úsečka pretne niektorú odvrátenú priamku skôr ako poslednú privrátenú priamku, potom nemá s mnohouholníkom prienik

Algoritmus prieniku úsečky a konv. mnohouholníka v rovine

// inicializácia parametrov vstupu a výstupu
$t_{in} := 0, t_{out} := 1$
pre každú priamku p obsahujúcu niektorú stranu $A_i A_{i+1}$ mnohouholníka $A_1 \dots A_n$
  nech je t parameter prieniku úsečky AA' a priamky p
  ak p je privrátená strana, tak
    $t_{in} := \max\{t_{in}, t\}$
  inak *// p je odvrátená strana*
    $t_{out} := \min\{t_{out}, t\}$
ak $t_{in} > t_{out}$
  úsečka AA' nemá prienik s mnohouholníkom $A_1 \dots A_n$
inak
  $B \ := A + (A' - A)t_{in}$
  $B' := A + (A' - A)t_{out}$
  prienik úsečky AA' a mnohouholníka $A_1 \dots A_n$ je úsečka BB'

Príklad prieniku úsečky a konv. mnohouholníka v rovine



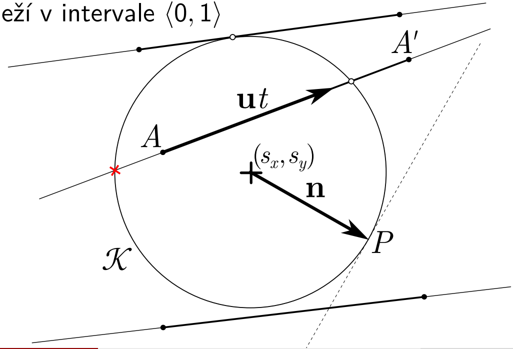
Úsečka AA' vstupuje do mnohouholníka priamkou obsahujúcou hranu A_1A_2 a priamkou obsahujúcou hranu A_5A_1, pričom priesečník s A_5A_1 má väčšiu hodnotu parametra t. Získali sme teda parameter t_{in}, pri ktorom úsečka vstupuje do mnohouholníka. Zvyšné tri priamky sú odvrátené, t.j. úsečka AA' nimi vystupuje von. Prienik s priamkou obsahujúcou hranu A_4A_5 prislúcha najmenšiemu parametru $t = t_{out}$, pri ktorom úsečka vystupuje z mnohostena. Keďže $t_{in} > t_{out}$, úsečka mnohouholník nepretína.

Prienik úsečky a krivky v rovine

- Treba nájsť prienik úsečky zadanej parametricky $A + \mathbf{u}t,\ t \in \langle 0, 1\rangle$ a krivky $\mathcal{K}$ danej implicitnou rovnicou $f(x, y) = 0$
- Spoločný bod úsečky a krivky nájdeme dosadením parametrického vyjadrenia úsečky za premenné x a y v rovnici pre krivku, čím získame rovnicu pre parameter t:
$$g(t) = f(a_x + u_x t, a_y + u_y t) = 0$$
pričom musí byť $t \in \langle 0, 1\rangle$, inak bod prieniku neleží na úsečke
- Voľba metódy hľadania koreňov rovnice $g(t) = 0$ s neznámou t závisí od druhu funkcie $f(x, y)$, ktorá vyjadruje danú krivku

Úsečka a kvadratická krivka

- Implicitná funkcia $f(x, y)$ danej kvadratickej krivky $\mathcal{K}$ je kvadratický polynóm
- Rovnica $g(t) = 0$ predstavuje kvadratickú rovnicu s neznámou t
- Podľa diskriminantu D kvadratickej rovnice je možné určiť, či priamka reprezentujúca úsečku má s kvadratickou krivkou prienik:
  - ak $D > 0$, tak priamka pretína krivku v dvoch bodoch,
  - ak $D = 0$, tak sa priamka dotýka krivky v jednom bode,
  - ak $D < 0$, tak priamka nemá s krivkou žiadny prienik
- Po vypočítaní hodnôt t_1,t_2 z kvadratickej rovnice $g(t) = 0$ treba otestovať, ktoré z nich leží v intervale $\langle 0, 1\rangle$



Príklad prieniku úsečky a kvadratickej krivky

Majme danú kružnicu s polomerom r, ktorej stred má súradnice (s_x, s_y), zapísanú pomocou implicitnej funkcie:

$$(x - s_x)^2 + (y - s_y)^2 - r^2 = 0$$

Pre nájdenie prieniku dosadíme parametrické vyjadrenie úsečky do rovnice kružnice a dostávame:

$$((a_x + u_x t) - s_x)^2 + ((a_y + u_y t) - s_y)^2 - r^2 = 0$$

Po roznásobení získame kvadratickú rovnicu s neznámou t a diskriminantom D, pre ktorý máme 3 možnosti:

- $D < 0$, priamka obsahujúca úsečku nemá s kružnicou spoločný bod
- $D = 0$, priamka obsahujúca úsečku je dotyčnicou kružnice. Rovnica pre t má jediné riešenie t_0. Ak $t_0 \in \langle 0, 1 \rangle$, bod dotyku $A + \mathbf{u}t_0$ je jediným spoločným bodom kružnice a úsečky
- $D > 0$, priamka obsahujúca úsečku je sečnicou kružnice. Rovnica pre t má dve reálne riešenia, t_1 a t_2. Pre každé t_i, pre ktoré platí $t_i \in \langle 0, 1 \rangle$, je bod $A + \mathbf{u}t_i$ spoločným bodom kružnice a úsečky

Úsečka a kvadratická krivka

- Okrem nájdenia priesečníka je často potrebné nájsť smer normály **n** krivky $f(x,y)=0$ v tomto bode, t.j. smer vektora kolmého na dotyčnicu v bode prieniku úsečky s krivkou
- Normála ku kružnici $(x-s_x)^2+(y-s_y)^2-r^2=0$ v bode $P=(p_x,p_y)$ prechádza cez stred kružnice $\Rightarrow \mathbf{n}=(p_x-s_x, p_y-s_y)$. Normálu ku ľubovoľnej krivke nájdeme pomocou lemy:

Lema

Nech $f(x,y)=0$ je rovnica krivky a $P=(p_x,p_y)$ je bod ležiaci na tejto krivke, teda $f(p_x,p_y)=0$. Ak $\frac{\partial f}{\partial x}(p_x,p_y)\neq 0$ alebo $\frac{\partial f}{\partial y}(p_x,p_y)\neq 0$, tak normála krivky v bode P má smer

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_x,p_y), \frac{\partial f}{\partial y}(p_x,p_y)\right)$$

Úsečka a hladká krivka: Newtonova metóda

- Ak krivka $\mathcal{K}$ **nie je** daná **polynomickou** rovnicou $f(x, y) = 0$, tak po dosadení všeobecného bodu úsečky nebude (vo všeobecnosti) ani funkcia $g(t) = f(a_x + u_x t, a_y + u_y t) = 0$ polynomická
- V prípade, že je funkcia $g(t)$ diferencovateľná, môžeme na hľadanie koreňa rovnice $g(t) = 0$ použiť *Newtonovu metódu*:
  1. odhadneme koreň rovnice $g(t) = 0$ a označíme ho t_0,
  2. ak t_i je aproximácia koreňa rovnice po i-tej iterácii, nájdeme aproximáciu koreňa pre $(i + 1)$-vú iteráciu pomocou vzťahu:

$$t_{i+1} = t_i - \frac{g(t_i)}{g'(t_i)}$$

  3. v iteráciach pokračujeme, až kým sme nenašli dostatočne presné riešenie, t.j. $|g(t_{i+1})| < \varepsilon$ alebo kým interval $\langle t_i, t_{i+1} \rangle$ nie je menší ako vopred zvolená prípustná odchýlka, t.j. $|t_{i+1} - t_i| < \varepsilon$

Úsečka a hladká krivka: Newtonova metóda

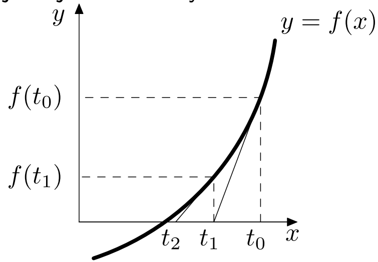
- Aproximáciu koreňa rovnice pri i-tej iterácii počítame ako prienik osi x a dotyčnice ku grafu funkcie $g(t)$ v bode $(t_i, g(t_i))$. Dotyčnica je priamka, ktorá má sklon $g'(t_i)$, prechádza bodom $(t_i, g(t_i))$ a je vyjadrená predpisom:

  $$y = g'(t_i)x + g(t_i) - g'(t_i)t_i$$

  bod prieniku t_{i+1} je potom možné vyjadriť zo vzťahu:

  $$0 = g'(t_i)t_{i+1} + g(t_i) - g'(t_i)t_i$$

- Metódu je vhodná na hľadanie koreňov ľubovoľnej diferencovateľnej funkcie
- Nevýhodou je nutnosť dostatočne presne odhadnúť riešenie v prvom kroku
- Ďalším problémom je nájdenie všetkých koreňov



Úsečka a polynomická krivka: Beziérovo orezávanie

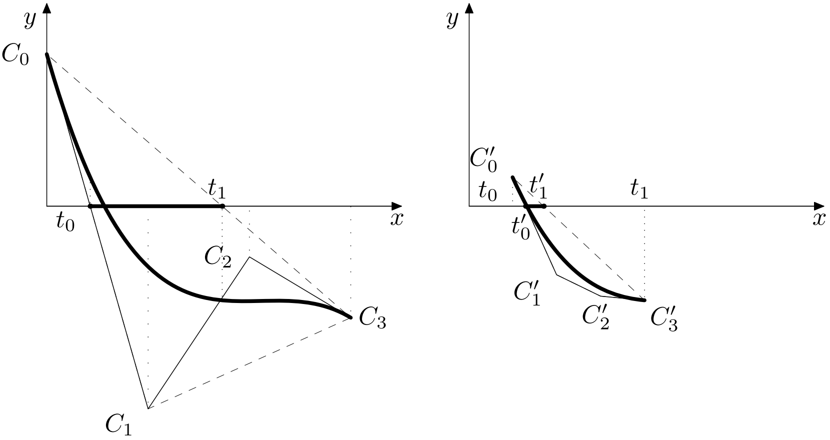
- Ak **je** krivka $\mathcal{K}$ daná **polynomickou** rovnicou $f(x, y) = 0$, potom po dosadení všeobecného bodu úsečky bude funkcia $g(t) = f(a_x + u_x t, a_y + u_y t) = 0$ tiež polynomická
- Ak je stupeň polynómu $g(t)$ väčší ako 2, používajú sa pre výpočet jeho koreňov numerické metódy
- Rýchla, numericky stabilná metóda s názvom *Beziérovo orezávanie* nájde všetky korene polynomickej rovnice $g(t) = 0$ na intervale $\langle 0, 1\rangle$ tak, že nahradí polynóm $g(t)$ Beziérovou krivkou

Algoritmus Beziérovho orezávania

1. Nahraďme (napr. s využitím polárnej formy) graf funkcie $g(t)$, t.j. body $(t, g(t))$ pre $t \in \langle 0, 1\rangle$ Beziérovou krivkou stupňa d, pričom nech x-ové súradnice riadiacich vrcholov Beziérovej krivky budú $0, 1/d, 2/d, \ldots, 1$
2. Keďže Beziérova krivka leží v konvexnom obale svojho riadiaceho polygónu, bude prienikom riadiaceho polygónu a osi x interval $\langle t_0, t_1\rangle$, pričom všetky korene rovnice $g(t) = 0$ na intervale $\langle 0, 1\rangle$ budú ležať v intervale $\langle t_0, t_1\rangle$
3. Iteratívne prepíšme graf funkcie $g(t)$ na novom (kratšom) intervale $\langle t_0, t_1\rangle$ ako Beziérovu krivku. Potom x-ové súradnice riadiacich vrcholov budú $t_0, t_0 + (t_1 - t_0)/d, t_0 + 2(t_1 - t_0)/d, \ldots, t_1$ a znovu hľadáme prienik riadiaceho polygónu a osi x, pričom dostaneme interval $\langle t'_0, t'_1\rangle$
4. Takto pokračujeme, až kým interval $\langle t'_0, t'_1\rangle$ nie je menší ako vopred zvolená prípustná odchýlka, t.j. $|t'_1 - t'_0| < \varepsilon$

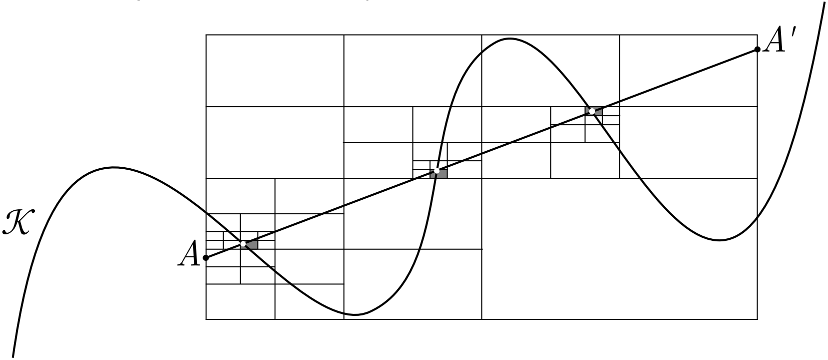
Algoritmus Beziéroveho orezávania

- Ak má rovnica $g(t) = 0$ na skúmanom intervale viac riešení, tak sa pri iterovaní predchádzajúcim postupom interval $\langle t_0', t_1' \rangle$ prestane zmenšovať. Potom rozdelíme interval na dva $\left\langle t_0', \frac{t_1'+t_0'}{2} \right\rangle$, $\left\langle \frac{t_1'+t_0'}{2}, t_1' \right\rangle$ a každý riešime samostatne



Iné metódy

- Ak sa nedá použiť žiadna z doteraz uvedených metód, dá sa postupovať aj tak, že sa funkcia $g(t)$ alebo priamo krivka $f(x, y) = 0$ aproximuje lomenou čiarou a hľadá sa prienik úsečky a lomenej čiary
- Je možné použiť aj metódu delenia okna. Obdĺžnikové okno sa zvislo a vodorovne rozdelí na štyri menšie. Prienik sa potom hľadá len v tých podoknách, do ktorých zasahuje úsečka aj krivka. Takto sa pokračuje v delení, až kým veľkosť okna nie je menšia ako požadovaná presnosť riešenia



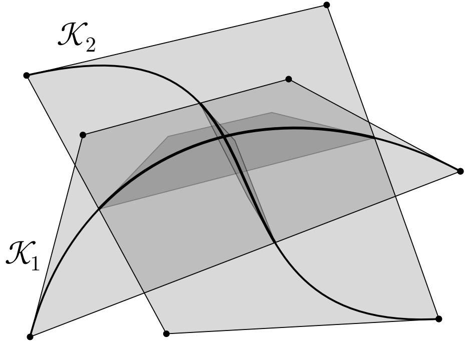
Dve kvadratické krivky

- Majme dané dve kvadratické krivky $f_1(x,y)=0$ a $f_2(x,y)=0$, potom ich prienik môžeme vypočítať pomocou nasledujúceho postupu:
  1a) Ak niektorá z rovníc neobsahuje člen s y^2, dá sa prepísať na tvar $f(x,y)=y\cdot q(x)-p(x)=0 \Rightarrow y=p(x)/q(x)$, kde $p(x)$ je nanajvýš polynóm stupňa 2 a $q(x)$ nanajvýš stupňa 1
  1b) Ak obe rovnice obsahujú kvadratický člen s y^2, prepíšeme ich na tvar:
  $$c_1y^2+\bar{f}_1(x,y)=0$$
  $$c_2y^2+\bar{f}_2(x,y)=0,$$
  kde $\bar{f}_1(x,y)$ a $\bar{f}_2(x,y)$ obsahujú z kvadratických členov už len x^2 a xy. Prenásobením prvej rovnice hodnotou c_2 a druhej hodnotou c_1 a ich odčítaní, vyjadríme y ako racionálnu funkciu $y=p(x)/q(x)$, t.j. prípad 1a)
  2) Dosadíme $y=p(x)/q(x)$ do druhej, neupravenej rovnice za premennú y, $f(x,p(x)/q(x))=0$ a dostaneme racionálnu rovnicu premennej x:
  $$\frac{r(x)}{s(x)}=0,$$
  čo platí práve vtedy, keď $r(x)=0$. Ďalej vyriešime polynomickú rovnicu pre $r(x)=0$ a každé riešenie potom dosadíme do vyjadrenia $y=p(x)/q(x)$ a vyjadríme neznámu y

Beziérove krivky

- Pre dve Beziérove krivky $\mathcal{K}_1$ a $\mathcal{K}_2$ môžeme opäť použiť metódu Beziérovho orezávania
- Ak majú krivky spoločný bod, bude ležať v prieniku konvexných obalov riadiacich polygónov Beziérovych kriviek
- Postup nájdenia prieniku je podobný ako hľadanie koreňov polynomickej krivky:
    1. Nájdi prienik krivky $\mathcal{K}_1$ s konvexným obalom riadiaceho polygónu krivky $\mathcal{K}_2$. Hľadá sa teda prienik niekoľkých úsečiek s Beziérovou krivkou
    2. Orež krivku $\mathcal{K}_1$ tak, že jej počiatočný bod bude v mieste, kde pôvodná krivka $\mathcal{K}_1$ vstupovala do konvexného obalu riadiaceho polygónu krivky $\mathcal{K}_2$. Jej koncový bod bude tam, kde z neho vystupovala. Treba potom nájsť riadiaci polygón už takto orezanej krivky
    3. Ak riadiaci polygón (novej) krivky $\mathcal{K}_1$ je menší ako prípustná odchýlka od presného riešenia, našli sme priesečník kriviek. Inak opakuj algoritmus od začiatku, pričom navzájom vymeň krivky $\mathcal{K}_1$ a $\mathcal{K}_2$.
- Ak sa riadiace polygóny kriviek nezmenšujú, majú krivky viac spoločných bodov. V takom prípade obe krivky rozdelíme na dve polovice a pokračujeme spracovávaním každej prípustnej dvojice podkriviek

Iné postupy



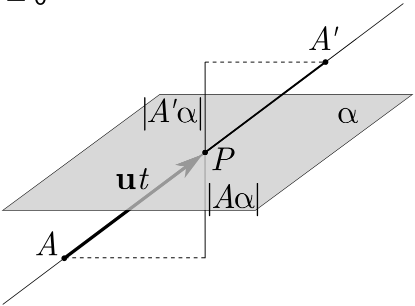
- Ak nie sú krivky polynomické, môžeme postupovať tak, že ich aproximujeme lomenými čiarami a hľadáme prienik lomených čiar
- Aj v tomto prípade, podobne ako pri hľadaní prieniku krivky a úsečky, môžeme použiť algoritmus delenia okna na 4 podokná

Prienik úsečky a roviny v priestore

- Podobne ako v rovine, budeme využívať parametricky vyjadrenú úsečku $AA' : A + \mathbf{u}t$, pre $t \in \langle 0, 1 \rangle$, kde $A' = A + \mathbf{u}$:

$$x = a_x + u_x t$$
$$y = a_y + u_y t$$
$$z = a_z + u_z t$$

  a rovinu α zadanú implicitnou lineárnou rovnicou $f(x, y, z) = 0$, t.j. rovnicou $ax + by + cz + d = 0$



Prienik úsečky a roviny v priestore

- Najskôr overíme, či úsečka AA' pretína rovinu α, t.j. či body A, A' ležia v opačných polpriestoroch určených touto rovinou
- Body A, A' ležia v opačných polpriestoroch určených rovinou α $\Leftrightarrow f(A) \cdot f(A') < 0$
- Ak prienik P existuje, vypočítame bod P pomocou parametrického vyjadrenia $P = A + (A' - A)t$
- Hodnotu parametra t určíme zo vzťahu $t = \frac{|PA|}{|A'A|}$, ktorý vypočítame pomocou vzdialeností bodov A, A' od roviny α:

$$t = \frac{|PA|}{|A'A|} = \frac{|A\alpha|}{|A'\alpha| + |A\alpha|} = \frac{\frac{|f(A)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}{\frac{|f(A')|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \frac{|f(A)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}} = \frac{|f(A)|}{|f(A')| + |f(A)|}$$

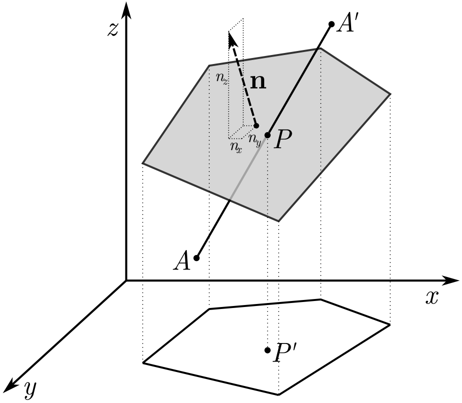
- Vo výsledku dostávame pre výpočet bodu prieniku P vzťah:

$$P = A + \frac{|f(A)|}{|f(A')| + |f(A)|}(A' - A)$$

Prienik úsečky a mnohouholníka v priestore

- Pre prienik úsečky a mnohouholníka v priestore treba vyriešiť dve úlohy:
  1. nájsť prienik úsečky a roviny obsahujúcej mnohouholník,
  2. zistiť, či prienik úsečky a roviny leží vnútri mnohouholníka
- Prvú úlohu vyriešime už známym postupom
- V druhej úlohe je najskôr nutné premietnuť scénu z 3D do 2D jednoduchým kolmým premietaním. Zvolíme takú projekciu, v ktorej má priemet mnohouholníka najväčší obsah:
  1. vypočítame normálový vektor $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ roviny $n_x x + n_y y + n_z z + d = 0$ obsahujúcej daný mnohouholník
  2. vypočítame maximálnu absolútnu hodnotu súradníc normálového vektora roviny $\max\{|n_x|, |n_y|, |n_z|\}$
  3. zvolíme kolmé premietanie do súradnicovej roviny, v smere osi zodpovedajúcej maximálnej absolútnej hodnote súradnice normálového vektora roviny. Napríklad, keď $\max\{|n_x|, |n_y|, |n_z|\} = |n_z|$, vhodná projekcia je v smere osi z do súradnicovej roviny xy: $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ (pozri obrázok)

Prienik úsečky a mnohouholníkovej siete



- Nájsť spoločné body úsečky a mnohouholníkovej siete znamená, že treba hľadať prienik úsečky s každým mnohouholníkom tejto siete
- Pre špeciálny prípad, keď mnohouholníkovej sieť je povrchom konvexného mnohostena, môžeme použiť postup analogický algoritmu pre hľadanie prieniku úsečky a konvexného mnohouholníka v rovine

Prienik úsečky a implicitnej plochy

- V tomto prípade je plocha zadaná implicitnou funkciou $f(x, y, z)$, pričom je tvorená bodmi v priestore, ktoré spĺňajú rovnicu $f(x, y, z) = 0$
- Postupujeme podobne ako v prípade hľadania prieniku úsečky a implicitnej krivky v rovine
- Dosadením parametrického vyjadrenia úsečky získame rovnicu $g(t) = 0$ pre parameter t a hľadáme riešenie na intervale $\langle 0, 1 \rangle$. Ak je funkcia $g(t)$ kvadratická, dajú sa korene vypočítať presne, v inom prípade môžeme použiť nejakú numerickú metódu na hľadanie koreňov
- Ďalšou možnosťou je aproximovať implicitnú plochu mnohouholníkovou sieťou a využiť postup pre nájdenie prieniku úsečky a mnohouholníkovej siete
- Ak chceme nájsť smer normály plochy v nejakom jej bode $P = (p_x, p_y, p_z)$, môžeme ho vypočítať pomocou vzťahu:

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_x, p_y, p_z), \frac{\partial f}{\partial y}(p_x, p_y, p_z), \frac{\partial f}{\partial z}(p_x, p_y, p_z) \right)$$