Rovnobežné a stredové premietanie

Róbert Bohdal

robert.bohdal@fmph.uniba.sk

https:\\flurry.dg.fmph.uniba.sk\webog\bohdal-vyucba

Katedra algebry a geometrie
Fakulta matematiky fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave

Počítačová grafika (1)
prednáška č. 6

Obsah

Premietanie

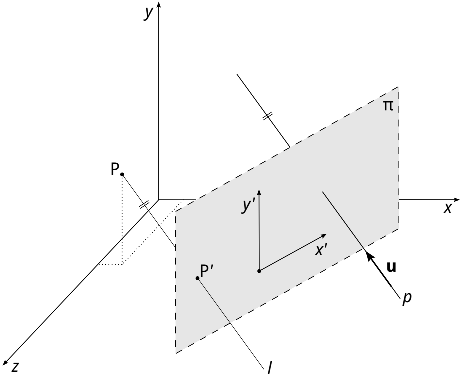
- Premietanie je zobrazenie $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ z priestoru dimenzie m do priestoru dimenzie n, kde $n < m$
- V počítačovej grafike najčastejšie premietame objekty z troj-rozmerného (3D) do dvoj-rozmerného (2D) priestoru, avšak pri viacrozmerných objektoch, ako sú napr. 4D fraktály, je nutné použiť buď jedno premietanie priamo do 2D, alebo dve za sebou, najskôr do 3D a potom z 3D do 2D
- Pri premietaní z 3D do 2D je treba v 3D priestore zvoliť priemetňu (rovinu) a spôsob, ako sa trojrozmerný bod premieta do zvolenej priemetne
- Pre špecifikovanie polohy priemetne a polohy bodu v 3D priestore a aj v 2D priemetni, potrebujeme mať definovanú globálnu (O, x, y, z) a lokálnu (O', x', y') súradnicovú sústavu. Premietanie potom zobrazí bod so súradnicami (x, y, z) do priemetne, v ktorej bude mať tento bod súradnice (x', y')

Premietanie

- Najčastejšie sa používa rovnobežné a stredové (perspektívne) premietanie, pričom rovnobežné sa dá chápať aj ako stredové premietanie, ktorého priemetňa je nekonečne vzdialená od začiatku O globálneho súradnicového systému
- Je určené buď geometricky (priemetňou a smerom) alebo analyticky (rovnicami, maticami)
- Každé z dvoch druhov premietaní má svoje výhody aj zápory
- Rovnobežné premietanie (parallel projection):
  - + vhodné na meranie vzdialeností (ak sa nepoužíva skrátenie na osi z)
  - – nevyzerá realisticky
  - – nezachováva uhly
- Stredové premietanie (perspective projection):
  - + zobrazuje vzdialené objekty menšie, čo sa viac podobá tomu, ako človek vníma objekty v priestore
  - – vo všeobecnosti nezachováva vzdialenosti a uhly a rovnobežné úsečky sa nezobrazujú ako rovnobežné

Rovnobežné premietanie

- Je určené priemetňou (2D rovinou) a smerom premietania (3D vektorom alebo priamkou). Ak je smer premietania kolmý na priemetňu, hovoríme o kolmom (ortografickom) premietaní, inak je premietanie šikmé (voľné). Smer premietania **nemôže** byť rovnobežný s priemetňou (prečo?)
- Obrazom bodu P je bod P' v priemetni π, ktorý dostaneme ako prienik premietacej priamky l (rovnobežnej s p) s priemetňou π



Rovnobežné premietanie

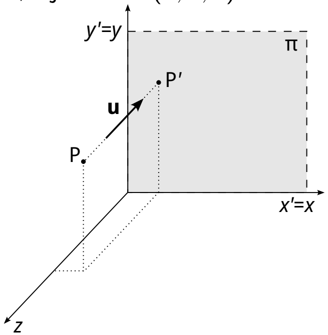
- Pri praktickom použití sa používa najčastejšie maticové (3×4) vyjadrenie, ktoré je konkrétnym predpisom nejakého afinného zobrazenia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Medzi najznámejšie druhy kolmého premietania patrí izometria, dimetria, trimetria a Mongeova projekcia (nárys, pôdorys, bokorys). V šikmom zobrazení poznáme zasa kabinetnú, kavaliernu a vojenskú projekciu

Príklad č. 1, kolmé rovnobežné premietanie

Priemetňa je rovina xy so súradnicovými osami totožnými s osami x a y. Smer premietania je v smere osi z, t.j. vektor $(0, 0, 1)$

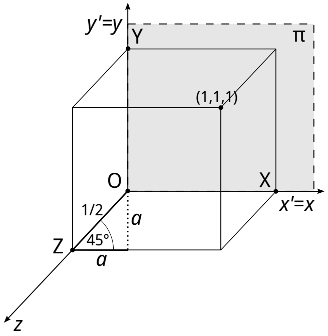


Toto kolmé premietanie môžeme pomocou rovníc vyjadriť:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Príklad č. 2, šikmé rovnobežné premietanie – kabinetné

Priemetňa je rovina xy so súradnicovými osami totožnými s osami x a y avšak smer premietania je $(1/(2\sqrt{2}), 1/(2\sqrt{2}), -1)$. Navyše v smere osi z dochádza k skráteniu s faktorom $1/2$. Ak skrátenie nie je, ide o kavalierne premietanie



Najskôr vypočítame dĺžku a a potom túto hodnotu odpočítame od súradnice x a aj od súradnice y. Toto zobrazenie sa podobá na skosenie v oboch smeroch naraz

Príklad č. 2, šikmé rovnobežné premietanie – kabinetné

Odvodenie veľkosti a:

$$a^2 + a^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow 2a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Rovnice premietania potom majú tvar:

$$x' = x - \frac{1}{2\sqrt{2}}z$$

$$y' = y - \frac{1}{2\sqrt{2}}z$$

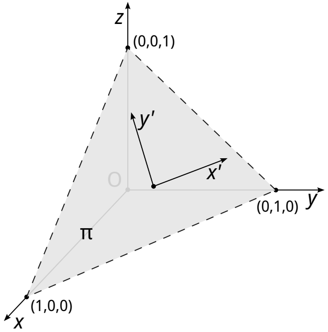
Premietanie vyjadrené pomocou maticového zápisu:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Toto premietanie je možné odvodiť pomocou sústavy rovníc z podmienok:
$(0,0,0) \mapsto (0,0)$, $(1,0,0) \mapsto (1,0)$, $(0,1,0) \mapsto (0,1)$, $(0,0,1) \mapsto (-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}})$

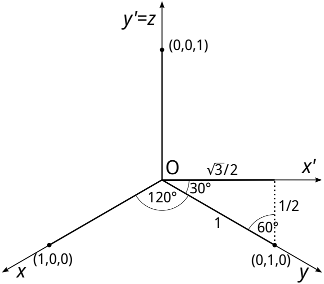
Príklad č. 3, kolmé rovnobežné premietanie – izometria

- Kolmé premietanie do roviny prechádzajúcej cez body $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$
- Je určené priemetňou $\pi : x + y + z = 1$ a smerom $(1, 1, 1)$
- Priemety súradnicových osí x a y sú navzájom kolmé, navyše priemet osi x je rovnobežný s rovinou xy



Príklad č. 3, kolmé rovnobežné premietanie – izometria

Rovnice premietania určíme z podmienok: $(0,0,0) \mapsto (0,0)$, $(1,0,0) \mapsto (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $(0,1,0) \mapsto (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $(0,0,1) \mapsto (0,1)$

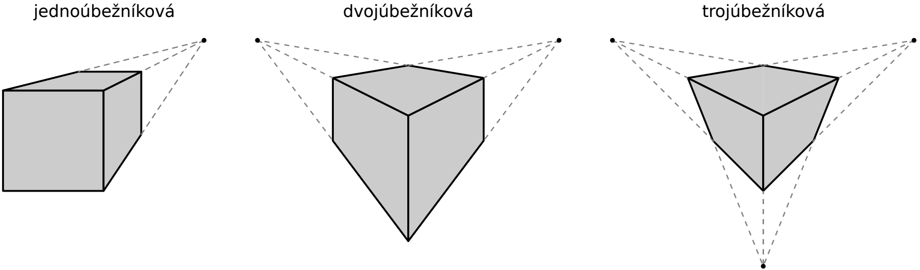


Izometria vyjadrená pomocou maticového zápisu:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

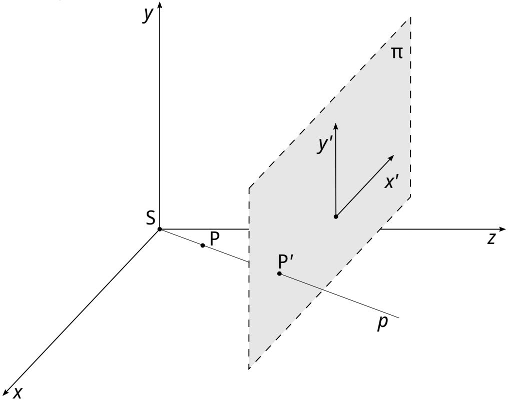
Stredové premietanie

- Nazýva sa aj perspektívne premietanie a najčastejšie sa používa na názorné zobrazovanie veľkých objektov objektov v architektúre
- Na rozdiel od rovnobežného premietania nie sú premietacie priamky navzájom rovnobežné ale vyhádzajú z jedného bodu (stredu)
- Podľa polohy zobrazovaného predmetu vzhľadom na priemetňu sa používa jednoúbežníková, dvojúbežníková alebo trojúbežníková perspektíva



Stredové premietanie

- Je určené stredom premietania S (bod v 3D) a priemetňou π (rovina a súradnicová sústava), pričom stred premietania nesmie ležať v priemetni
- Obrazom bodu P v $\mathbb{R}^3$ je bod v priemetni, ktorý dostaneme ako prienik premietacej priamky p s priemetňou π
- Toto premietanie nie je afinné zobrazenie ale iba projektívne, keďže existuje celá rovina (ktorá?) bodov, ktoré nevieme zobraziť



Projektívny priestor (rovina)

- Ak afinný priestor obohatíme o tzv. nevlastné body (vektory), budeme používať pre vyjadrenie bodov a vektorov rozšírené (homogénne) súradnice. Bod (x, y, z) je reprezentovaný nekonečne veľa n-ticami $(wx : wy : wz : w)$, kde $w \neq 0$
- Prechod z rozšíreného (4D) do „štandardného" 3D priestoru je možné urobiť projektívnou transformáciou $(wx : wy : wz : w) \mapsto (x, y, z)$
- Stredové premietanie je špeciálny prípad projektívnej transformácie

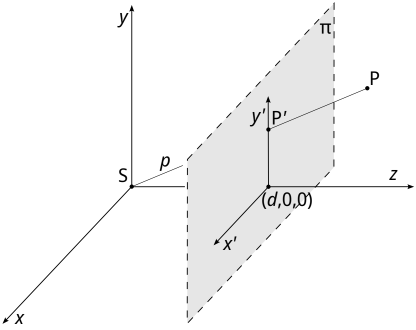
Príklad č. 1, stredové premietanie

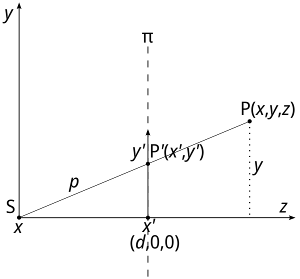
Stred premietania S ma súradnice $(0, 0, 0)$, priemetňa je daná rovnicou $z = d$, kde $d \neq 0$. Z podobnosti trojuholníkov pre body $P(x, y, z)$ a $P'(x', y')$ dostávame pre vyjadrenie y' vzťah:

$$y/z = y'/d \Rightarrow y' = d\frac{y}{z}$$

podobne pre x':

$$x/z = x'/d \Rightarrow x' = d\frac{x}{z}$$





Príklad č. 1, stredové premietanie

Pre maticové vyjadrenie (ako u rovnobežného premietania) potrebujeme bod $P(x, y, z)$, kde $z \neq 0$ (t.j. neleží v nevlastnej rovine) a $P'(x', y')$ zapísať v homogénnych súradniciach:

$$(x, y, z) = (x : y : z : 1) \mapsto (dx : dy : z) = (d\,x/z, d\,y/z) = (x', y')$$

podobne pre všeobecný bod $(x : y : z : w)$, kde $w \neq 0$:

$$(x : y : z : w) = (x/w : y/w : z/w : 1) \mapsto (d\,x/w : d\,y/w : z/w) = (d\,x : d\,y : z)$$

V maticovom tvare:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

Toto vyjadrenie môžeme použiť aj pre body, ktoré ležia v rovine xy, potom ich obrazy budú nevlastné body. Ak je stred S či priemetňa v inej polohe, stačí použiť posunutie, aby sa stred dostal do bodu $(0, 0, 0)$ a potom otočenie, aby bola priemetňa π kolmá na os z

Súvis rovnobežného a stredového premietania

- Rovnobežné premietanie je v podstate stredové premietanie, v ktorom je stred premietania S posunutý do nekonečna, pričom priemetňa π ostáva na mieste
- V tomto prípade sa z ihlana určeného bodom S a rovinou π stane hranol, inak povedané, stredové premietanie sa „pretransformuje“ na rovnobežné

Stredové premietanie so stredom v nevlastnom bode (∞)

Každý bod bude mať po transformácii rovnaké x', y', w' súradnice, ako by mal po stredovom premietaní. Treba nám dopočítať novú z'-ovú súradnicu, lebo sa nám stred posunul v smere osi z do nekonečna. Použijeme kolmé premietanie s priemetňou v rovine xy a smerom $(0, 0, 1)$, t.j. $(x : y : z : 1) \mapsto (x' : y' : 1)$. Matica nového zobrazenia (stredového so stredom v ∞) bude mať tvar:

$$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ A & B & C & D \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Využijeme podmienku, že sa stred $S(0 : 0 : 0 : 1)$ zobrazí na nevlastný bod $S'(0 : 0 : 1 : 0)$ a dostaneme $C \neq 0$. Ďalej sa zvislé priamky zobrazia do zvislých priamok (smer ostáva zachovaný, dĺžka ale nie), t.j. $(0 : 1 : 0 : 0) \mapsto (0 : \lambda : 0 : 0)$. Z toho dostaneme $B = 0$. Podobne, nech sa vodorovné priamky zobrazia na vodorovné, t.j. $(1 : 0 : 0 : 0) \mapsto (\lambda : 0 : 0 : 0)$. Dostávame $A = 0$. Nakoniec, nech sa priemetňa zobrazí do roviny xy, t.j. $(0 : 0 : d : 1) \mapsto (0 : 0 : 0 : \lambda)$. Z toho dostaneme vzťah $d \cdot C + D = 0 \Rightarrow D = -d \cdot C$

Stredové premietanie so stredom v nevlastnom bode (∞)

Výsledný vzťah pre stredové premietanie so stredom v nekonečne na osi z je:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & -dC \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

- V počítačovej grafike sa často používa myšlienka, kde možno v takomto nezvyčajnom stredovom premietaní použiť aj iné grafické algoritmy:
  - z-buffer pri odstraňovaní neviditeľných plôch používa rovnobežné premietanie, avšak chceme využiť stredové premietanie, aby sme získali realistickejšiu vizualizáciu (hĺbka sa zachováva, $z_1 < z_2 \Rightarrow z_1' < z_2'$)
  - pri orezávaní na viditeľný priestor sa jednoduchšie sa orezáva na axiálny kváder ako na ihlan

Porovnanie grafických projekcií – premietania