

Reprezentácie 3D objektov

Róbert Bohdal

`robert.bohdal@fmph.uniba.sk`

`https://flurry.dg.fmph.uniba.sk/webog/bohdal-vyucba`

Katedra algebry a geometrie
Fakulta matematiky fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave

Počítačová grafika (1)
prednáška č. 3 a 4



- 1 Repräsentácie a metódy tvorby objektov
- 2 Mnohouholníkové siete
- 3 Plochy vytvorené zametáním a šablónovaním
- 4 Fraktálne objekty vytvárané Brownovým pohybom
- 5 Objekty vytvorené rekonštrukciou reálnych dát
- 6 Splajny
- 7 CSG
- 8 Rekurzívne prerozdelenie oblasti
- 9 Objekty určené implicitnými funkciami
- 10 Metasféry



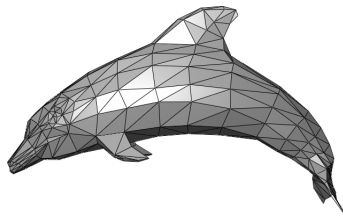
Reprezentácie a metódy tvorby objektov

- Hraničná (Boundary) reprezentácia - objekty sú tvorené hranicou (napr. splajnovou plochou)
- Objemová (Volume) reprezentácia - objekty sú tvorené objemovými prvkami (napr. voxelami)
- Mnohouholníkové siete (Polygonal meshes)
- Splajny (Splines)
- CSG stromy (CSG trees)
- Objekty tvorené zametáním (Sweeping) a šablónovaním (Templates)
- Reprezentácie implicitnými funkciami (F-rep)
- Metaballs (Blobbs)
- Objekty vytvorené procedurálnymi (napr. fraktálnymi) metódami
- Objekty určené oblakmi bodov (Point Cloud)
- Objekty vytvorené pomocou fotogrametrie (Photogrametry)
- Prerozdelenie priestoru (Space subdivision)



Mnohouholníkové siete

- Veľmi jednoduchá reprezentácia, avšak ide len o aproximáciu reálneho povrchu telesa
- V súčasnosti je najpoužívanejšia
- Využíva rýchle a optimalizované algoritmy (HW urýchlenie, paralelizácia)
- Pre detailné zobrazenie (reprezentáciu) potrebuje veľa dát
- Pri modifikácii tvaru je treba zvyčajne prepočítať veľa údajov



[en.wikipedia.org/wiki/Polygon_mesh]



Mnohouholníkové siete

Definícia (Regulárna mnohouholníková sieť)

Mnohouholníková sieť $\mathcal{M}$ pozostáva z vrcholov $\mathcal{B}$ (konečnej množiny bodov), hrán $\mathcal{H}$ ($\mathcal{H} \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{B}$) a stien $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}^n$) takých, že:

$\forall b \in \mathcal{B} \exists h \in \mathcal{H}; b \in h$ (každý vrchol je koncovým bodom hrany)

$\forall h \in \mathcal{H} \exists s \in \mathcal{S}; h \in s$ (každá hrana je súčasťou nejakej steny)

$\forall s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ je $s_1 \cap s_2 \in \mathcal{M}$ (neprázdny prienik je súčasťou prvkov siete)

- Najpoužívanéjšie mnohouholníky sú trojuholníky, keďže každý n -uholník ($n \geq 3$) vieme triangulovať, navyše vrcholy trojuholníka ležia v rovine
- Často sa používa spolu s textúrou

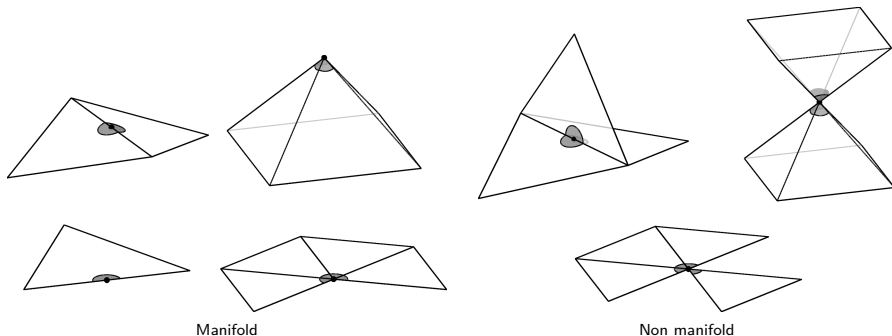
Vlastnosti:

- Mnohouholníková sieť je súvislá, ak je súvislý graf, v ktorom vrcholy grafu sú reprezentované stenami a hrany grafu sú tvorené hranami siete.
- Hranica mnohouholníkovej siete je zjednotenie hrán, ktoré patria iba jednej stene
- Mnohouholníková sieť je uzavretá, ak nemá hranicu



Vlastnosť 2-variety

- Mnolehovníková sieť je 2-varieta (*2-manifold*), ak každá hrana je časťou jednej alebo dvoch stien a steny incidentné s vrcholom tvoria uzavretý alebo otvorený, ale neprerušovaný vejár (*fan*)



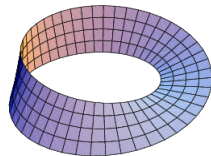
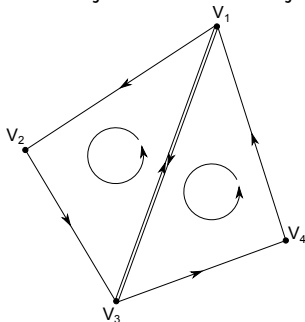
Manifold

Non manifold

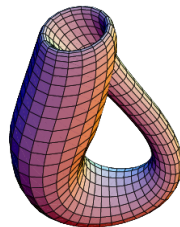


Mnohouholníkové siete a orientácia

- Nech je mnohouholníková sieť 2-varieta, potom je orientovateľná, ak môžeme v každom mnohouholníku zvoliť orientáciu tak, že všetky dvojice susedných mnohouholníkov sú orientované konzistentne (hrany spájajúce susedné steny sú v týchto stenách orientované opačne)
- Möbiov pás a Kleinova fľaša sú príklady neorientovateľnej mnohouholníkovej siete



sk.wikipedia.org/wiki/Möbiov_list



sk.wikipedia.org/wiki/Kleinova_fľaša



Eulerova charakteristika χ

- Je to číslo, ktoré popisuje tvar alebo štruktúru objektu tvoreného mnohouholníkovou sieťou bez ohľadu na spôsob jej „deformácie“
- $\chi = V - E + F$, kde V je počet vrcholov (vertices), E - počet hrán (edges) a F - počet stien (faces)
- Pre konvexné mnohosteny (kocka, štvorsten, ...) v $\mathbb{E}^3$ je toto číslo vždy 2
- Pre orientovateľné mnohouholníkové siete s G dierami a prípadne aj B hranicami (t.j. neuzavreté) platí $\chi = 2(1 - G) - B$
- Torus (mnohouholníková sieť s jednou dierou) má $G = 1$, a preto jeho $\chi = 0$
- Möbiov list a Kleinova fľaša (neorientovateľné mnohouholníkové siete) majú $\chi = 0$



Dátové štruktúry pre reprezentáciu mnohouholníkových siete

- Jednoduchá (klasická) reprezentácia
- Reprezentácia pomocou okrídlených hrán (Winged Edge)
- Reprezentácia pomocou polhrán (Half-edge, DCEL - Doubly Connected Edge List)



Jednoduchá reprezentácia

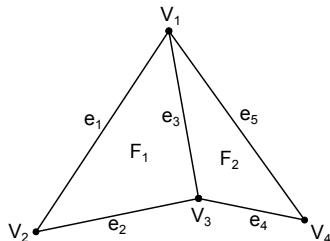
- Používa tabuľky:

vrcholov $\mathbb{V} = \{V_i; V_i = (x_i, y_i, z_i)\},$

hrán $\mathbb{E} = \{e_j; e_j = (V_{j_1}, V_{j_2}); i \neq j\}$

stien $\mathbb{F} = \{F_k; F_k = (e_{k_1}, \dots, e_{k_m}), k_1 \neq \dots \neq k_m\}$

- V tabuľke stien $\mathbb{F}$ môže byť namiesto zoznamu hrán zoznam vrcholov



Tabuľka vrcholov

V_1	x_1	y_1	z_1
V_2	x_2	y_2	z_2
V_3	x_3	y_3	z_3
V_4	x_4	y_4	z_4

Tabuľka hrán

e_1	V_1	V_2
e_2	V_2	V_3
e_3	V_3	V_1
e_4	V_3	V_4
e_5	V_4	V_1

Tabuľka stien

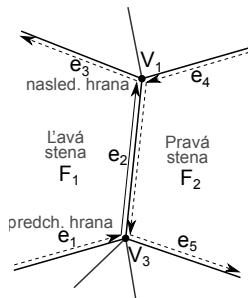
F_1	e_1	e_2	e_3
F_2	e_3	e_4	e_5

- $\oplus$: Jednoduchá implementácia
- $\ominus$: Komplikované vyhľadávanie okolí, susedných stien, incidentných hrán vrcholu, ...
Modifikácia siete vyžadujúca zložitejšie zmeny je ťažkopádna, kvôli chýbajúcim informáciám o okoliach
Pre tabuľku stien je nutné použiť dynamickú štruktúru (nemá pevný počet prvkov)



Reprezentácia pomocou okrídlených hrán

- Využíva tabuľku vrcholov s ich súradnicami a jednou incidentnou hranou
- Zoznam hrán obsahuje pre každú hranu 8 položiek. Odkaz na začiatkový a koncový vrchol hrany, odkaz na ľavú a pravú stenu, predošlú a nasledujúcu hranu (ľavý traverz) v ľavej ako i v pravej stene (pravý traverz)
- Zoznam stien obsahuje pre každú stenu iba odkaz na jednu incidentnú hranu
- Každá hrana je v tabuľke uložená ako orientovaná úsečka, pričom táto orientácia nesúvisí s orientáciou hrany v danej časti siete (mnohouholníku)

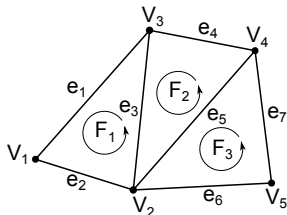


Tabuľka hrán

hrana	vrchol		stena		l. traverz		p. traverz	
meno	zač.	konc.	ľavá	pravá	pred. nasl.		pred. nasl.	
e_2	V_3	V_1	F_1	F_2	e_1	e_3	e_4	e_5



Reprezentácia pomocou okrídlených hrán



Tabuľka vrcholov

V_1	x_1	y_1	z_1	e_2
V_2	x_2	y_2	z_2	e_6
V_3	x_3	y_3	z_3	e_3
V_4	x_4	y_4	z_4	e_4
V_5	x_5	y_5	z_5	e_7

Tabuľka hrán

e_1	V_1	V_3	F_1			e_3	e_2
e_2	V_1	V_2	F_1		e_1	e_3	
e_3	V_2	V_3	F_1	F_2	e_2	e_1	e_4
e_4	V_3	V_4		F_2			e_5
e_5	V_2	V_4	F_2	F_3	e_3	e_4	e_7
e_6	V_2	V_5	F_3		e_5	e_7	
e_7	V_4	V_5		F_3			e_6

Tab. stien

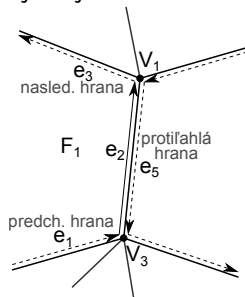
F_1	e_1
F_2	e_3
F_3	e_5

- $\oplus$: Umožňuje rýchly prístup k okoliarom (susedom), napr. nájsť incidentné hrany daného vrchola, či všetky steny, ktoré daný vrchol obsahujú
Tabuľka hrán má pevný počet položiek



Reprezentácia pomocou polhrán (DCEL - Double Connected Edge List)

- Obsahuje tabuľku vrcholov, pričom každý vrchol obsahuje hodnoty jeho súradníc a odkaz na niektorú z polhrán, ktorá z neho vychádza
- Tabuľku polhrán tvoria odkazy na začiatkový vrchol aktuálnej polhrany, ďalej odkaz na stenu naľavo od polhrany, smerník na jej protiľahlú (opačnú) polhranu a odkazy na predošlú a nasledujúcu hranu v ľavej stene
- Každá polhrana prislúcha iba jednej stene

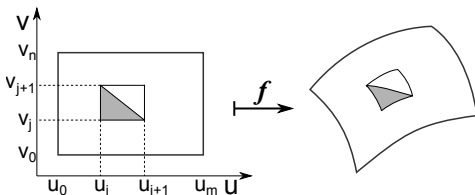


- $\oplus$: Poskytuje rýchly prístup k okoliam
Umožňuje efektívnu reprezentáciu dynamických sietí, keď sa v čase mení aj topológia siete
- $\ominus$: Pomocou tejto štruktúry môžeme reprezentovať iba orientovateľné plochy



Plochy vytvorené zametáním a šablónovaním

- Zvyčajne sú to parametrické plochy určené vektorovou funkciou $\mathbf{f}(u, v) = [f_x(u, v), f_y(u, v), f_z(u, v)] \in \mathbb{R}^3$ s parametrami u a v , pričom $u \in \langle u_0, u_m \rangle$ a $v \in \langle v_0, v_n \rangle$
- Vrcholy polygonálnej siete prislúchajúce parametrickej tejto ploche sú určené konkrétnymi hodnotami $\mathbf{f}(u_i, v_j)$
- Jednotlivé steny sú tvorené trojuholníkmi $\mathbf{f}(u_i, v_j), \mathbf{f}(u_{i+1}, v_j), \mathbf{f}(u_i, v_{j+1})$, alebo štvoruholníkmi $\mathbf{f}(u_i, v_j), \mathbf{f}(u_{i+1}, v_j), \mathbf{f}(u_{i+1}, v_{j+1}), \mathbf{f}(u_i, v_{j+1})$



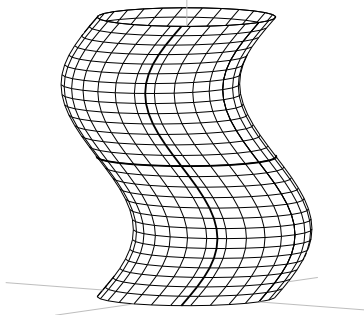
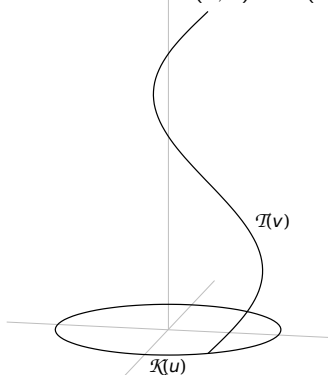
Translačné plochy

- Sú tvorené generujúcou krivkou $\mathcal{K}(u) = [k_x(u), k_y(u), k_z(u)]$, ktorá sa posúva po translačnej krivke $\mathcal{T}(v) = [t_x(v), t_y(v), t_z(v)]$. $\mathcal{T}(v)$ udáva vektor posunutia generujúcej krivky $\mathcal{K}(u)$
- Výsledná translačná plocha $f(u, v)$ má vyjadrenie:

$$f_x(u, v) = k_x(u) + (t_x(v) - t_x(v_0))$$

$$f_y(u, v) = k_y(u) + (t_y(v) - t_y(v_0))$$

$$f_z(u, v) = k_z(u) + (t_z(v) - t_z(v_0))$$



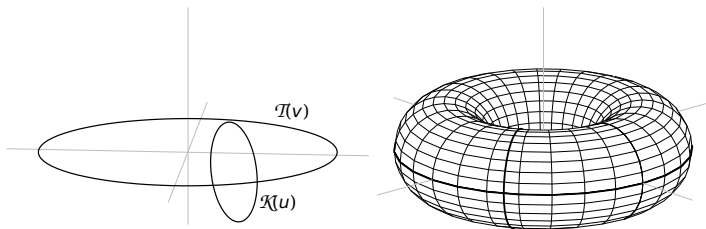
Rotačné plochy

- Najčastejšie vznikajú otáčaním krivky $\mathcal{K}(u) = [k_x(u), k_y(u), k_z(u)]$ okolo danej osi. Zvyčajne sa otáča krivka ležiaca v rovine xz , t.j. $k_y(u) = 0$ okolo z -ovej osi pre uhol $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$
- Rotačná plocha $f(u, v)$ má potom vyjadrenie:

$$f_x(u, v) = k_x(u) \cdot \cos(v)$$

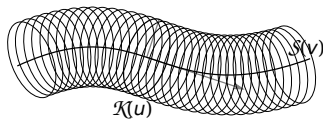
$$f_y(u, v) = k_y(u) \cdot \sin(v)$$

$$f_z(u, v) = k_z(u)$$



Plochy vznikajúce zametáním (sweepingom) všeobecne

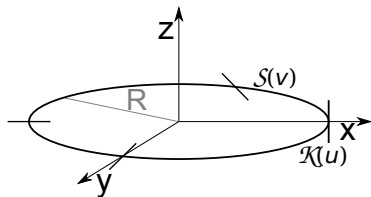
- Tieto plochy vznikajú ťahaním generujúcej krivky $\mathcal{K}(u)$ po zametacej krivke $\mathcal{S}(v)$ tak, že generujúca krivka je v aktuálnom bode „kolmá“ na dotyčnicu trajektórie zametacej krivky



- $\ominus$: Problém výpočtu rotácie $\mathcal{K}(u)$ počas jej pohybu po $\mathcal{S}(v)$

Möbiiov pás

- Vzniká postupným otáčaním úsečky $\mathcal{K}(u) = [R, 0, u]$ okolo osi rovnobežnej s osou y , prechádzajúcou cez stred úsečky o uhol $v/2$ a súčasným posúvaním po kružnici $\mathcal{S}(v)$, t.j. rotáciou okolo osi z -ovej o uhol v . Uhol otáčania v je z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$
- Parametrické rovnice tohto útvaru môžeme vyjadriť pomocou násobenia matíc $R_z(v) \cdot T_x(R)^{-1} \cdot R_y(v/2) \cdot T_x(R) \cdot X$, pričom za súradnice bodu $X[x, y, z]$ dosadíme rovnice úsečky $\mathcal{K}(u)$. $R_y()$ predstavuje maticu otáčania okolo osi y , $R_z()$ maticu otáčania okolo osi z a $T_x()$ je matica posunutia v smere osi x



Príklad: odvodenie parametrických rovníc pre Möbiiov pás

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} &= \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & R \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{T_x(R)^{-1}} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} \cos(v/2) & 0 & -\sin(v/2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(v/2) & 0 & \cos(v/2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{R_y(v/2)} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -R \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{T_x(R)} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}}^x \\
 &= \begin{pmatrix} -\sin(v/2)z + \cos(v/2)(x - R) + R \\ y \\ \cos(v/2)z + \sin(v/2)(x - R) \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} R - u \sin(v/2) \\ 0 \\ u \cos(v/2) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{dosadili sme } x = R, y = 0, z = u)
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ 1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \cos(v) & \sin(v) & 0 & 0 \\ -\sin(v) & \cos(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{R_z(v)} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R - u \sin(v/2)) \cos(v) \\ -(R - u \sin(v/2)) \sin(v) \\ u \cos(v/2) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Möbiiov pás teda môžeme zapísať v tvare:

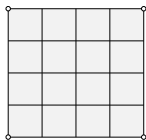
$$f(u, v) = ((R - u \sin(v/2)) \cos(v), -(R - u \sin(v/2)) \sin(v), u \cos(v/2))^T,$$

kde $u \in \langle -a, a \rangle$ a $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$

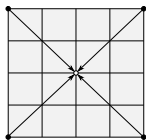


Fraktálne objekty vytvárané Brownovým pohybom

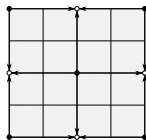
- Zvyčajne sú vytvorené pomocou postupu nazývaného Diamant-štvorec
- V diamantovom kroku je pre každý štvorec vypočítaná výška jeho prostredného bodu ako priemer štyroch rohových bodov štvorca plus náhodná hodnota
- Pre každý diamant je výška jeho prostredného bodu opäť určená ako priemer jeho rohových bodov a k nemu pripočítaná náhodná hodnota



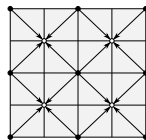
inicializácia



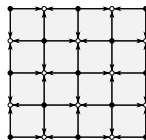
1. diamantový krok



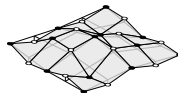
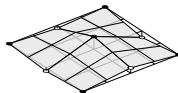
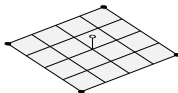
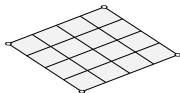
1. štvorcový krok



2. diamantový krok



2. štvorcový krok



- Pri každej iterácii sa veľkosť náhodnej hodnoty vynásobí $\left(\frac{1}{2-h}\right)^{i \cdot s}$, kde h je hodnota drsnosti z intervalu $\langle -1, 0.1 \rangle$, $s \in \langle 1, 1.5 \rangle$ a i je poradové číslo iterácie



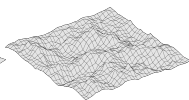
Fraktálne objekty vytvárané Brownovým pohybom



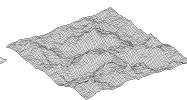
1. iterácia



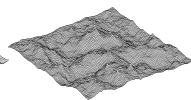
2. iterácia



3. iterácia

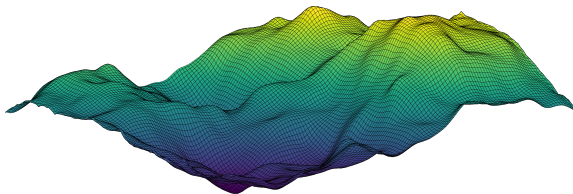


4. iterácia



5. iterácia

- Tvar objektu je možné ovplyvňovať aj pomocou „modulačnej“ funkcie $f(x, y)$, ktorá násobením ovplyvňuje náhodnú hodnotu výšky
- Inicializačný krok môže začínať aj z inej plochy ako je rovina
- Výsledný tvar objektu je možné vyhladiť napr. pomocou Gaussovského filtra



Model terénu vytvorený metódou diamant-štvorec a vyhladený Gaussovským filtrom



Objekty vytvorené pomocou rekonštrukcie reálnych dát

- Tieto objekty sú vytvorené snímaním povrchu reálnych 3D objektov
- Zosnímaný povrch sa najčastejšie reprezentuje oblakom 3D bodov (*point cloud*)
- Výsledný 3D objekt je často určený mnohouholníkovou sieťou, ktorá vznikne triangulovaním tohto oblaku bodov
- Oblak bodov sa získa pomocou 3D skenera alebo nejakou fotogrametrickou metódou
- Fotogrametria používa na rekonštrukciu 3D objektu 2 a viac snímok, odfotografovaných z rôznych uhlov pohľadu, pričom sa rieši tzv. *Perspective-n-Point* (PnP) problém. V tejto metóde sa hľadajú dvojice význačných bodov a z nich sa napr. pomocou epipolárnej geometrie určia ich 3D súradnice



Oblak bodov získaný pomocou fotogrametrickej metódy [Wessex Archaeology]



Splajny

- Používajú sa najmä na vytvorenie hladkých kriviek a plôch
- Sú tvorené segmentami (napr. polynom. funkciami), ktoré na seba hladko naväzujú
- Tvar splajnu je určený tzv. *riadiacimi bodmi*. Okrem nich je možné meniť jeho tvar zvolením stupňa polynomických funkcií, násobnosťou vrcholov, uzlami, váhami, atď.
- Podľa typu ich delíme na interpolačné (prechádzajú cez riadiace body) a aproximačné (ležia v konvexnom obale riadiacich bodov)
- Splajnová krivka $\mathcal{K}(t)$ je definovaná na dopredu danom intervale $\langle a, b \rangle$ a je zložená z viacerých (daný počtom riadiacich bodov) hladko spojených segmentov. Každý segment $P_i(t)$ je v 3D priestore určený trojicou $[f_x(t), f_y(t), f_z(t)]$ polynomických funkcií s parametrom t :

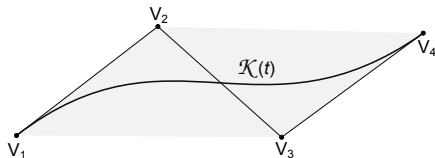
$$\mathcal{K}(t) = \begin{cases} P_0(t), & a = t_0 \leq t < t_1, \\ P_1(t), & t_1 \leq t < t_2, \\ \vdots & \\ P_{k-1}(t), & t_{k-1} \leq t \leq t_k = b \end{cases}$$

- Splajnová plocha $\mathcal{S}(u, v)$ je definovaná na dvojrozmernom intervale $\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ a jej segmenty sú polynomicke funkcie $P_{ij}(u, v)$ s parametrami u a v

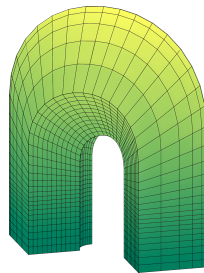


Splajny

- Pre riadiace body umiestnené v pravouhlej mriežke sa zvyčajne používajú Coonsove záplaty (interpoláčné) či NURBS (aproximačné). Ak sú riadiace body rozmiestnené nepravidelne, používajú sa RBF alebo sa aproximujú metódou najmenších štvorcov
- Splajny sa využívajú najmä v CAD (Computer Aided Design) modelovacích softvéroch a vytvárajú sa nimi povrchy karosérií aut, lietadiel, atď., kde záleží nielen na tvare plochy ale i hladkosti jej povrchu
- V súčasnosti sú súčasťou takmer každého 3D modelovacieho softvéru



Krivkový splajn, ležiaci v konvexnom obale riadiacich bodov



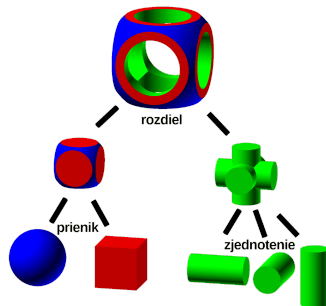
3D objekt vymodelovaný pomocou NURBS plochy

- $\oplus$: Jednoduchá implementácia a malá spotreba pamäte, presná reprezentácia hladkých plôch, jednoduchá a intuitívna modifikácia výsledného tvaru
- $\ominus$: Náročné na výpočet bodov prieniku lúča s plochou (pri renderovaní)



CSG (Constructive Solid Geometry)

- Predstavujú príklad objemovej reprezentácie 3D objektov
- Vstup: množina *primitívov* – jednoduché, dopredu dané geometrické objekty (kužeľ, guľa, valec, kocka, torus, atď.)
- Procedúra: Kombinovanie primitívov použitím množiny regularizovaných binárnych operácií a geometrických transformácií (posunutie, škálovanie, rotácia, skosenie)
- Výstup: Finálny objekt reprezentovaný napr. binárnym stromom

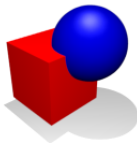


CSG – množina regularizovaných binárných operácií

- Množina jednoduchých regularizovaných operácií:

- zjednotenie:

$$O_1 \cup^* O_2$$



- prienik:

$$O_1 \cap^* O_2$$



- rozdiel:

$$O_1 \setminus^* O_2$$



en.wikipedia.org/wiki/Constructive_solid_geometry

- Regularizovaná operácia = zachovanie rozmeru:

- pre každý objekt:

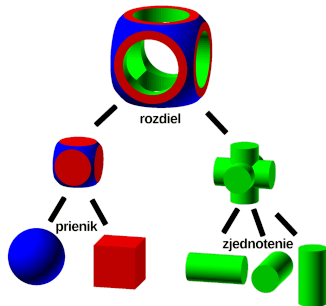
$$O := \partial O \cup \text{int } O$$

- pre každú binárnu operáciu $\circ$:

$$O_1 \circ^* O_2 := \text{cl}(\text{int}(O_1 \circ O_2))$$

CSG – binárny strom

- Kombinovanie geometrických primitívov použitím množiny regularizovaných binárnych operácií
- Finálny objekt je reprezentovaný pomocou binárneho stromu, kde listy sú vstupné primitívy a uzly sú jednotlivé binárne operácie
- Používajú sa najmä pri tvorbe strojárskych súčiastok (binárne operácie napodobňujú výrobný proces), v CAD systémoch, procedurálnom modelovaní, atď.
- $\oplus$: Nízka pamäťová náročnosť, presná/exaktná reprezentácia komplexných objektov, jednoduchá tvorba záznamu výrobného procesu – CNC programovanie (G-code, M-code)
- $\ominus$: Ohraničená množina vstupných primitívov, nejednoznačná reprezentácia, porovnanie dvoch objektov nie je vždy možné/jednoduché



CSG – prienik s lúčom (renderovanie povrchu)

- Pri prieniku lúča ℓ s objektom vytvoreným pomocou CSG je pre určenie prieniku nutné postupne prechádzať celý strom, t.j. používať na lúči rovnaké operácie ako pri vytváraní finálneho objektu:

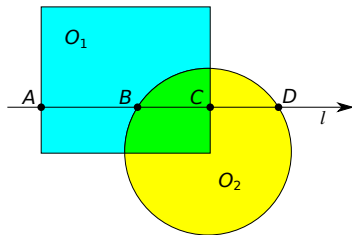
$$\ell \cap (O_1 \circ^* O_2) = (\ell \cap O_1) \circ^* (\ell \cap O_2)$$

- Prechod stromom:
 - pre listy: prienik lúča s jednotlivými primitívmi
 - pre uzly: vykonanie binárnych operácií na jednotlivých prienikoch lúča s listami
- Príklad:

$$\begin{aligned} \ell \cap (O_1 \cup^* O_2) &= (\ell \cap O_1) \cup^* (\ell \cap O_2) = \\ &= |AC| \cup^* |BD| = |AD| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell \cap (O_1 \cap^* O_2) &= (\ell \cap O_1) \cap^* (\ell \cap O_2) = \\ &= |AC| \cap^* |BD| = |BC| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell \cap (O_1 \setminus^* O_2) &= (\ell \cap O_1) \setminus^* (\ell \cap O_2) = \\ &= |AC| \setminus^* |BD| = |AB| \end{aligned}$$



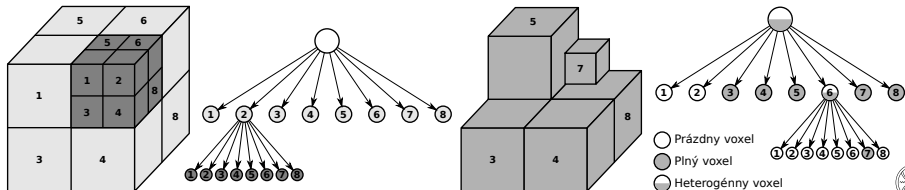
Rekurzívne prerozdelenie oblasti

- Je to typická objemová reprezentácia 3D objektov, známa aj ako bunkový rozklad, resp. delenie (rozklad) priestoru
- Priestor môže byť rozdelený na bunky s rovnakou veľkosťou (voxelová reprezentácia), alebo s rôznou veľkosťou (oktálne stromy, kd-stromy, BSP stromy)
- 3D objekt (teleso) je potom tvorený zjednotením neprázdnych buniek, resp. ich obsahom
- Úlohou je na konci rozdelenia získať bunky čo „najhomogénnejšie“, t.j. v jednej bunke je iba jeden (či pár) objekt(ov), alebo iba jeho (ich) časť
- Pri volumetrických dátach, akými sú napr. medicínske dáta z CT či MR, sa najčastejšie používa voxelová reprezentácia, t.j. akási 3D obdoba pixelov
- Voxelová reprezentácia je pri malej veľkosti voxelu (veľké rozlíšenie) pamäťovo veľmi náročná a neumožňuje jednoduchú modifikáciu takto reprezentovaného objektu



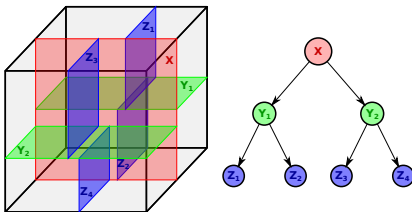
Oktálne stromy

- Používajú variabilnú veľkosť bunky (voxelu). Priestor je rozdelený v jeho strede na 8 rovnakých buniek tromi rovinami, ktoré sú kolmé na súradnicové osi
- Ak bunka obsahuje viac ako jeden objekt, je opätovne rozdelená. Tento proces sa opakuje, až kým každá bunka obsahuje jeden alebo žiadny objekt
- Proces delenia sa môže ukončiť aj skôr, ak je dosiahnutá minimálna veľkosť bunky, alebo bunka obsahuje menej ako dopredu zvolený max. počet objektov. Takto sa šetrí pamäť, keďže sú pamäťovo náročné, zároveň sa urýchlí proces delenia
- Postup delenia sa zaznamenáva do oktálneho stromu, v ktorom vnútorné uzly reprezentujú bunky, ktoré sa ďalej delia a majú 8 potomkov. Koncovým listom zodpovedajú bunky, ktoré sú prázdne, alebo obsahujú jeden objekt
- Dajú sa dobre využiť pri riešení viditeľnosti, urýchlujú hľadanie prieniku lúča s objektami v scéne, keďže v liste je len jeden objekt alebo jeho časť



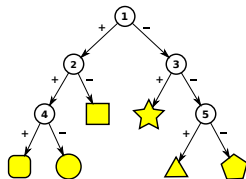
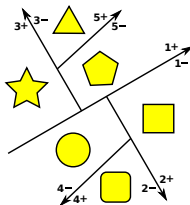
kd-stromy

- Predstavujú zovšeobecnenie oktálnych stromov (resp. špeciálny prípad BSP stromu), pričom veľkosti buniek na jednotlivých úrovniach delenia nie sú rovnako veľké, keďže deliace roviny neprechádzajú cez stred delenej bunky
- Deliace roviny sa zvolia tak, aby bol výsledný binárny strom čo najlepšie vyvážený
- Bunka je na každej úrovni stromu rozdelená iba jednou rovinou, pričom jej smer je na každej úrovni iný. Postupne sa rozdelí bunka na predný a zadný polpriestor (deliace roviny **X**), v ďalšej úrovni na horný a dolný (deliace roviny **Y**), nakoniec na pravý a ľavý (deliace roviny **Z**)
- Proces delenia sa opakuje pre každú vzniknutú bunku rekurzívne, kritérium ukončenia je rovnaké ako u oktálnych stromov
- Algoritmicke je proces delenia pomocou kd-stromu náročnejší, avšak delenie priestoru je optimálnejšie ako u oktálneho stromu



BSP stromy

- Je to najvšeobecnejší spôsob delenia priestoru rovinami, ktoré môžu mať ľubovoľnú smer. Každá rovina rozdeľuje priestor na „kladný a záporný“ polpriestor
- Ak polpriestor obsahuje viac ako jeden objekt, rozdelí sa ďalšou rovinou. Tento polpriestor sa rekurzívne rozdeľuje, kým je splnené obdobné kritérium ako u kd-stromov
- Postup delenia sa opäť zaznamenáva do binárneho stromu, v ktorom vnútorné uzly predstavujú deliace roviny a listy konvexné časti priestoru obsahujúce jeden objekt alebo jeho časť
- Vhodná voľba deliacich rovín zabezpečí optimálne rozdelenie priestoru a vyvážený binárny strom s malým počtom úrovní
- Algoritmicke je proces delenia pomocou BSP stromu najnáročnejší, avšak delenie priestoru je najoptimálnejšie
- Najčastejšie sa využívajú pri riešení viditeľnosti a urýchľujú hľadanie prieniku lúča s objektami v scéne



Objekty určené implicitnými funkciami (F-rep)

- 3D objekt je určený implicitnou funkciou $f = f(x, y, z)$. Hranica (povrch) objektu je definovaná ako $f(x, y, z) = 0$, jeho vnútro vzťahom $f(x, y, z) > 0$ a oblasť mimo objektu (doplnok, komplement) $f(x, y, z) < 0$
- Zložitejšie objekty môžeme vytvárať pomocou geometrických transformácií a binárnych operácií $\cup, \cap, \setminus$:

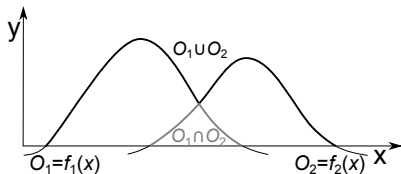
$$f_1 \cup_{\alpha} f_2 := \frac{1}{1+\alpha} (f_1 + f_2 + \sqrt{f_1^2 + f_2^2 - 2\alpha f_1 f_2}) \quad (\text{zjednotenie})$$

$$f_1 \cap_{\alpha} f_2 := \frac{1}{1+\alpha} (f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2 - 2\alpha f_1 f_2}) \quad (\text{priemik})$$

$$f_1 \setminus_{\alpha} f_2 := f_1 \cap_{\alpha} (-f_2) \quad (\text{rozdiel}),$$

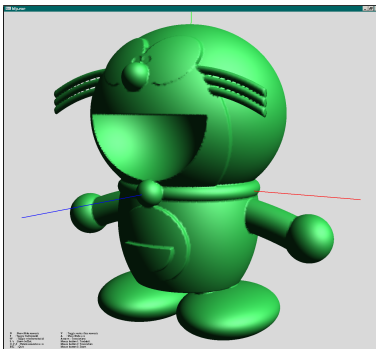
kde $\alpha = \alpha(f_1, f_2)$ je ľubovoľná spojitá (aj konštantná) funkcia vyhovujúca podmienke $-1 < \alpha(f_1, f_2) < 1$. Štandardne je $\alpha = 0$

- Pre $\alpha = 1$ je $f_1 \cup_1 f_2 = \max(f_1, f_2)$, $f_1 \cap_1 f_2 = \min(f_1, f_2)$, $f_1 \setminus_1 f_2 = \min(f_1, -f_2)$



Objekty určené implicitnými funkciami (F-rep)

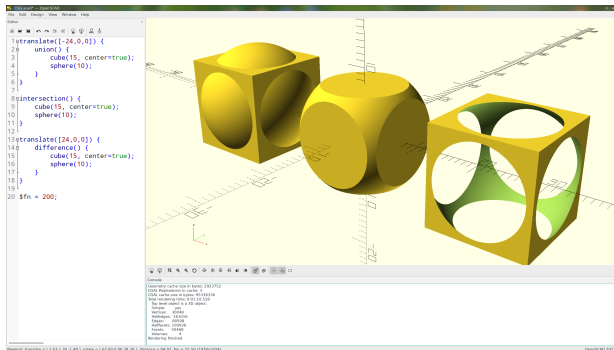
- Komplexný objekt je možné zapísať pomocou stromu, podobne ako u CSG
- Výsledkom je jedna „zložitá“ implicitná funkcia, na ktorú je možné použiť ďalšie operácie, ako napr. *morfovanie*: $M(t) = f_1 \cdot t + f_2(1 - t)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, či simulovanie rastu: $F(t) = f \cdot t$ a podobne



Objekt vytvorený jedinou implicitnou funkciou v aplikácii Hyperfun

Objekty určené implicitnými funkciami (F-rep)

- Prienik lúča s objektom často predstavuje riešenie zložitej rovnice, preto sa pri vizualizácii výsledného objektu používa vhodné vzorkovanie po jednotlivých súradniciach, čím sa prevedie objekt na mnohouholníkovú sieť
- Pomocou tejto reprezentácie je možné vytvoriť zaujímavé objekty, ktoré sa dajú vytlačiť na 3D tlačiarňi. Pri modelovaní takýchto objektov je možné využiť napr. bezplatnú aplikáciu OpenSCAD



Objekty vytvorené pomocou zjednotenia, prieniku a rozdielu v programe OpenSCAD



Metasféry (Metaballs/Blobbs)

- Predstavujú objekty s „neurčitým“ povrchom, ktoré sú určené pomocou klesajúcej funkcie hustoty $f(d)$, kde $d = d(x, y, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ je tzv. vzdialenostná funkcia a $[x_0, y_0, z_0]$ je stred *blobb* objektu
- Dajú sa predstaviť ako častice obklopené poľom, ktorého hustota (vplyv) klesá so vzdialenosťou d od stredu častice
- Pri vizualizácii je treba zvoliť prah T , aby sa dal jednoznačne zobrazit/definovať povrch objektu
- Funkciu hustoty $f(d)$ je možné zvoliť ľubovoľne, avšak musí byť klesajúca (napr. exponenciálne) a ohraničená intervalom $\langle 0, 1 \rangle$
- Pri spojení 2 a viac objektov sa začnú v mieste dotyku „zlievať“, keďže polia, ktoré obklopujú ich stredy sa sčítavajú
- Typická funkcia definujúca objekt F zložený z metasfér môže byť napr.:

$$F(x, y, z) = \sum_{i \in \text{kostra}} f_i(d_i) = T, \text{ kde } f(d) = -3 \left(\frac{d}{R} \right)^2 + 2 \left(\frac{d}{R} \right)^3 + 1, \text{ pre } d \leq R$$

- Konštanta R ohraničuje pôsobenie poľa blobb objektu a kostru tvoria body zodpovedajúce stredom jednotlivých objektov



Metasféry (Metaballs/Blobbs)

- Ďalšie zaujímavé funkcie $f(d)$ hustoty sú napr.:
 - 1) $f(d) = e^{-ad^2}$ (Gaussova krivka)
 - 2) $f(d) = \left(1 - \left(\frac{d}{R}\right)^2\right)^2$ pre $d \leq R$
 - 3) $f(d) = 1 - \frac{1}{9} \left(22 \left(\frac{d}{R}\right)^2 - 17 \left(\frac{d}{R}\right)^4 + 4 \left(\frac{d}{R}\right)^6\right)$ pre $d \leq R$
- Namiesto klasického výpočtu prieniku lúča s blobb objektami sa používa na jeho vyhľadanie tzv. funkcia odhadu vzdialenosti



Jednoduchý model vytvorený pomocou metaobjektov v programe Blender

