Zobrazovací kanál

Róbert Bohdal

robert.bohdal@fmph.uniba.sk

https:\\flurry.dg.fmph.uniba.sk\webog\bohdal-vyucba

Katedra algebry a geometrie
Fakulta matematiky fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave

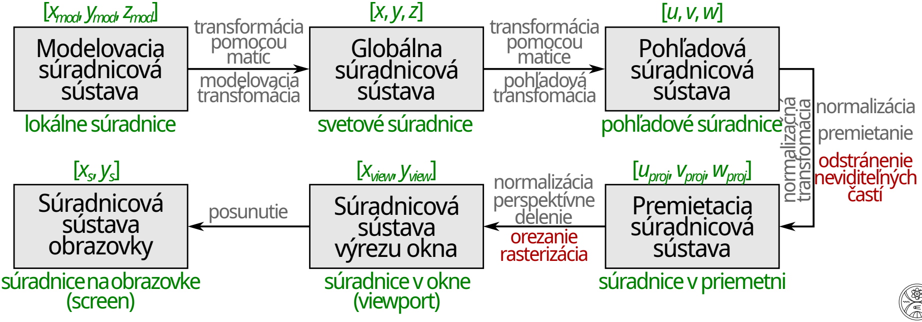
Počítačová grafika (1)
prednáška č. 11

Obsah

1. Zobrazovací kanál v 3D
2. Zobrazovací kanál v 2D
3. Vyjadrenie matíc transformácií a premietania pre 3D zobrazovací kanál
4. Vyjadrenie matíc transformácií pre 2D zobrazovací kanál

Zobrazovací kanál 3D (pipeline)

- Určuje postupnosť krokov (pozri obrázok), ktorá zabezpečuje zobrazenie objektov v okne zobrazovacieho zariadenia, napr. monitora
- Spočíva v aplikovaní rôznych afinných transformácií, premietania, určovaní viditeľnosti, rasterizácie, antialiasingu a prípadne aj ďalších krokov (textúry)
- Transformácie (aj ich zloženie) sú zabezpečované pomocou násobenia matíc a vykonávané na grafickom hardvéri
- Využíva sa transformácia súradnicových sústav, otáčanie, posúvanie, škálovanie, premietanie a prípadne aj skosenie



Modelovacia súradnicová sústava $(x_{mod}, y_{mod}, z_{mod})$

- Každý objekt má vlastnú, **lokálnu** súradnicovú sústavu s počiatkom (origin/pivot) v nejakom vhodnom bode, napr. v strede (guľa) alebo v rohu (kocka) objektu
- Každému objektu je priradená konkrétna lokálna transformácia (škálovanie, otočenie, ...), ktorá slúži na modelovanie jeho tvaru či jeho častí, ktoré sú spájané do celku pomocou booleovských operácií (CSG)
- Všetky objekty sú po vykonaní lokálnej transformácie „vložené“ do jednotnej, globálnej súradnicovej sústavy a vytvárajú tak aktuálnu scénu

Globálna súradnicová sústava (x, y, z)

- Slúži na to, aby každý objekt v scéne mal jednoznačne určenú polohu
- Začiatok globálnej súradnicovej sústavy sa volí v strede scény, alebo v jej rohu, ak sú napr. súčasťou scény aj steny (miestnosti)
- Okrem samotných objektov je v scéne umiestnená aj kamera, ktorá určuje tzv. pohľadový objem, a ďalej rôzne druhy svetiel (bodové, kužeľové, plošné, atď.)
- Prechod od lokálnych súradnicových sústav ku globálnej súradnicovej sústave (zmena súradnicového systému) sa vykonáva pomocou afinných transformácií (posunutie, otočenie), ktoré zachovávajú veľkosť a tvar objektov
- Ak je v scéne definovaná aj kamera, vykonáva sa potom ďalšia zmena súradnicového systému (prostredníctvom afinnej transformácie) do pohľadovej (snímacej) súradnicovej sústavy

Pohľadová súradnicová sústava (u, v, w)

- Definuje smer pohľadu w a jeho začiatok, t.j. umiestnenie a orientáciu kamery (oka pozorovateľa)
- Smer kamery na určenie pohľadovej súradnicovej sústavy nestačí, treba určiť aj jej orientáciu (smer nahor, natočenie)
- Natočenie kamery sa zadáva pomocou tzv. *up* vektoru, ktorý musí byť kolmý na smer pohľadu (kvôli zachovaniu dĺžok a tvaru objektov)
- Zvolením projekcie kamery (stredové či rovnobežné premietanie) a uhla zorného poľa je určená priemetňa, keďže tá býva kolmá na smer pohľadu
- Ak máme daný normovaný normálový vektor $\mathbf{n}$ priemetne a približne určený *up* vektor $\mathbf{v}^*$, môžeme ho jednoducho opraviť do želaného smeru:
  Nech $\mathbf{n}$ a $\mathbf{v}^*$ určujú rovinu α, potom zostrojíme $\mathbf{v}$ ako lineárnu kombináciu $\mathbf{n}$ a $\mathbf{v}^*$, pričom výsledný *up* vektor $\mathbf{v}$ bude kolmý na normálu priemetne $\mathbf{n}$:

  $$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* + c\mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n} + c(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \Rightarrow 0 = \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n} + c \Rightarrow c = -\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n}$$

  Dostaneme teda:

  $$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* - (\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$$
- Zvyčajne výsledný *up* vektor $\mathbf{v}$ ešte normalizujeme: $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

Pohľadová súradnicová sústava (u, v, w)

- Ku kompletnému určeniu pohľadovej súradnicovej sústavy potrebujeme ešte dopočítať $\mathbf{u}$ vektor, ktorý je kolmý na $\mathbf{v}$ a $\mathbf{n}$, t.j. využijeme vektorový súčin: $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{n}$
- Trojica vektorov $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}$ a počiatok kamery P jednoznačne určuje pohľadovú súradnicovú sústavu $\langle P, \mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w \rangle$
- Výrez na priemetni, ktorý sa v prípade stredového premietania definuje aj zorným poľom (field of view – FOV), určuje tzv. pohľadový objem
- Pri rovnobežnom premietaní tvorí pohľadový objem hranol, pri stredovom premietaní je to zrezaný ihlan
- Pre úplné určenie pohľadového objemu je treba zadať aj prednú a zadnú orezávaciu rovinu
- Keďže je už daný smer pohľadu a pohľadový objem, môžeme pomocou skalárneho súčinu určiť (a prípadne eliminovať) neviditeľné steny objektov
- Kvôli jednoduchším výpočtom pri určovaní, ktoré objekty sa nachádzajú mimo pohľadový objem, alebo pri prípadnom orezávaní, sa normalizuje pohľadový objem na jednotkovú, axiálne zarovnanú kocku
- Prechod od globálnej súradnicovej sústavy do pohľadovej a následnú normalizáciu je možné urobiť pomocou jednej matice, ktorá je súčinom jednotlivých matíc transformácií

Premietacia súradnicová sústava ($u_{proj}, v_{proj}, w_{proj}$)

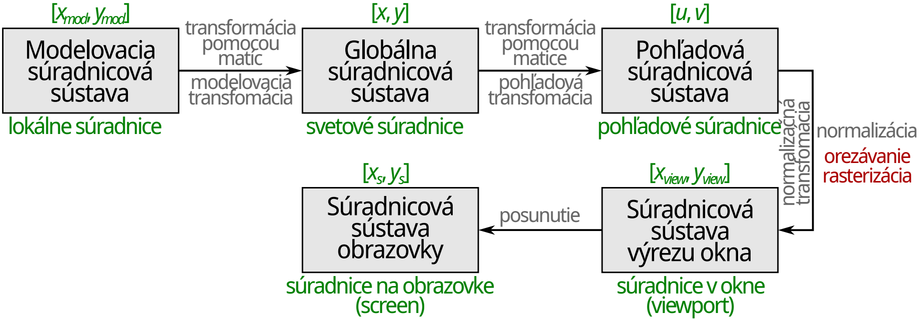
- V prípade, že sme v pohľadovej súradnicovej sústave využili normalizáciu na jednotkovú kocku, tak premietanie na priemetňu (aj v prípade stredového premietania) je iba „vynechanie“ tretej, hĺbkovej súradnice w_{proj}
- Po premietnutí objektov na 2D priemetňu už budú objekty reprezentované iba dvoma súradnicami $[u_{proj}, v_{proj}]$, avšak hĺbkové súradnice w_{proj} bodov (vrcholov polygónov) objektov je nutné si ďalej pamätať, aby bolo možné pri rasterizácii určiť, ktorý bod je v zobrazovanom pixli najbližší ku kamere
- Pri hľadaní najbližšieho bodu sa štandardne používa z-buffer
- V premietacej súradnicovej sústave sa ešte orezávajú časti objektov, ktoré sú mimo priemetňu. Aj tu je možné, ešte pred orezávaním, využiť normalizáciu na jednotkový štvorec

Súradnicová sústava výrezu okna (x_{view}, y_{view}) a súradnicová sústava obrazovky (x_s, y_s)

- Súradnicová sústava výrezu okna (*viewport*) už obsahuje iba pixle s **celočíselnými** súradnicami rasterizovaných viditeľných častí objektov
- Nakoniec sa poslednou transformáciou, obyčajne posunutím, zobrazí rasterizovaný obrázok na konkrétnom mieste obrazovky, t.j. v súradnicovej sústave obrazovky (*screen*)

Zobrazovací kanál 2D

- Je oveľa jednoduchší, keďže odpadávajú niektoré procesy (premietanie, pohľadový objem, atď.), ktoré sa vykonávajú v 3D



Matica prechodu od globálnej súrad. sústavy ku pohľadovej

- Prechod od modelovacej súradnicovej sústavy ku globálnej vyjadruje podobná matica ako prechod od globálnej súradnicovej sústavy ku pohľadovej
- Pôjde o súčin matice posunutia a otáčania, pričom maticu otáčania vyjadríme ako ortogonálnu maticu, ktorej inverzná matica sa rovná transponovanej matici

Majme bod $X = [x, y, z]$ v globálnej súradnicovej sústave $\langle O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z \rangle$, ktorý zobrazíme na bod $U = [u, v, w]$ v pohľadovej súradnicovej sústave $\langle P, \mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w \rangle$. Potom toto zobrazenie môžeme pomocou matíc vyjadriť v tvare:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{ux} & e_{uy} & e_{uz} & p_x \\ e_{vx} & e_{vy} & e_{vz} & p_y \\ e_{wx} & e_{wy} & e_{wz} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{ux} & e_{uy} & e_{uz} & p_x \\ e_{vx} & e_{vy} & e_{vz} & p_y \\ e_{wx} & e_{wy} & e_{wz} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prostredná matica typu 4×4 je zložená z matice posunutia a otáčania, preto ju môžeme zapísať ako súčin dvoch matíc $\mathbf{M}_{trans} \cdot \mathbf{M}_{rot}$

Matica prechodu od globálnej súrad. sústavy ku pohľadovej

$$\begin{pmatrix} e_{ux} & e_{uy} & e_{uz} & p_x \\ e_{vx} & e_{vy} & e_{vz} & p_y \\ e_{wx} & e_{wy} & e_{wz} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathbf{M}_{trans}} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} e_{ux} & e_{uy} & e_{uz} & 0 \\ e_{vx} & e_{vy} & e_{vz} & 0 \\ e_{wx} & e_{wy} & e_{wz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathbf{M}_{rot}}$$

Keďže je $\mathbf{M}_{rot}$ ortogonálna (prečo?), môžeme využiť vzťah $(\mathbf{M}_{trans} \cdot \mathbf{M}_{rot})^{-1} = \mathbf{M}_{rot}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{M}_{trans}^{-1}$ a dostaneme:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{rot}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{M}_{trans}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{ux} & e_{vx} & e_{wx} & -e_{ux}p_x - e_{vx}p_y - e_{wx}p_z \\ e_{uy} & e_{vy} & e_{wy} & -e_{uy}p_x - e_{vy}p_y - e_{wy}p_z \\ e_{uz} & e_{vz} & e_{wz} & -e_{uz}p_x - e_{vz}p_y - e_{wz}p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Pomocou tohto vyjadrenia môžeme vypočítať, aké bude mať súradnice bod $X = [x, y, z]$ v pohľadovej súradnicovej sústave

Kolmé premietanie

- Pri premietaní treba rozlíšiť, či použijeme stredové alebo rovnobežné premietanie
- Z rovnobežných premietaní sú najjednoduchšie ortogonálne, pričom smer premietania $\mathbf{n}_{proj}$ sa často volí rovnobežný s osou w. Priemetňa π sa umiestňuje do bodu $[0, 0, 0]$, rovnobežne s rovinou uv
- Pre rovnice jednoduchého kolmého premietania bodu $U = [u, v, w]$ do priemetne potom dostávame vzťah:

$$\begin{pmatrix} u_{proj} \\ v_{proj} \\ w_{proj} \\ 1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathbf{M}_{sortp}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Aktuálnu hĺbkovú súradnicu w bodu U je treba ešte uchovať, keďže je potrebná pre určenie jeho viditeľnosti v scéne

Kolmé premietanie – transform. snímacích súradníc na NSZ

- Nech je pohľadový objem tvorený kvádrom so stenami $u = l$ (ľavá, *left*), $u = r$ (pravá, *right*), $v = b$ (dolná, *bottom*), $v = t$ (horná, *top*), $w = -n$ (predná, *near*), $w = -f$ (zadná, *far*). Záporné znamienka sú potrebné, keďže kamera smeruje v zápornom smere hĺbkovej osi w
- Transformácia snímacích súradníc (normalizácia) na **normalizované súradnice zariadenia** (NZC) sa dá rozložiť na dva kroky:
  1. Posunutie stredu pohľadového objemu do začiatku súradnicového systému o vektor $\left(-\frac{r+l}{2}, -\frac{t+b}{2}, \frac{n+f}{2}\right)$
  2. Preškálovanie pohľadového objemu na kocku so stranami dĺžky 2: $s_u = \frac{2}{r-l}$, $s_v = \frac{2}{t-b}$, $s_w = \frac{-2}{f-n}$
- Transformáciu pohľadových súradníc na NSZ je potom možné vykonať pomocou zloženia posunutia a škálovania:

$$\mathbf{M}_{ortp} = \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{n-f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathbf{S}} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{r+l}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{t+b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{n+f}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Šikmé premietanie

- Smer šikmého premietania $\mathbf{n}_{proj}$ často definujeme pomocou dvojice uhlov $\theta = \angle \mathbf{n}_{proj}, u$ (odklon od osi u) a $\phi = \angle \mathbf{n}_{proj}, v$ (odklon od osi v). Priemetňu π umiestňujeme do bodu $[0,0,0]$, rovnobežne s rovinou uv
- Keďže šikmé premietanie je možné vytvoriť pomocou skosenia a jednoduchého kolmého premietania a rovnice skosenia môžeme vyjadriť predpisom:

$$
\begin{aligned}
u' &= u + k_u \cdot w = u - \Delta u \cdot w = u - \cot\theta \cdot w \\
v' &= v + k_v \cdot w = v - \Delta v \cdot w = v - \cot\phi \cdot w \\
w' &= w
\end{aligned}
$$

dostaneme pre šikmé premietanie bodu $U = [u, v, w]$ do priemetne π vzťah:

$$
\begin{pmatrix} u_{proj} \\ v_{proj} \\ w_{proj} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{sortp} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\cot\theta & 0 \\ 0 & 1 & -\cot\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathbf{H}_{\theta,\phi}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\cot\theta & 0 \\ 0 & 1 & -\cot\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - \cot\theta \cdot w \\ v - \cot\phi \cdot w \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

- Aktuálnu hĺbkovú súradnicu w bodu U je treba ešte uchovať, keďže je potrebná pre určenie jeho viditeľnosti v scéne

Šikmé premietanie – transform. snímacích súradníc na NSZ

- Pohľadový objem v šikmom premietaní je reprezentovaný skoseným kvádrom, ktorý sa po transformácii skosením $\mathbf{H}_{\theta,\phi}$ „narovná“ na axiálny kváder
- Na axiálny kváder ešte aplikujeme transformáciu posunutia **T** a škálovania **S**, čím pre transformáciu snímacích súradníc na NSZ pre šikmé premietanie dostávame predpis:

$$\mathbf{M}_{oblp} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{H}_{\theta,\phi} = \begin{pmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & -\frac{2\cot\theta}{r-l} & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & -\frac{2\cot\phi}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jednoduché stredové (perspektívne) premietanie

- V prípade stredových premietaní sa zvyčajne zvolí stred premietania v začiatku pohľadovej súradnicovej sústavy a priemetňa π sa umiestňuje do bodu $[0, 0, d]$, rovnobežne s rovinou uv, pričom $d < 0$
- V prvom kroku odvodíme rovnice jednoduchého stredového premietania s priemetňou $\pi: w = d$ pre $d = -1$, čím máme určenú šírku zorného poľa 90°
- Neskôr vyjadríme všeobecnejšie stredové premietanie, ktoré pomocou skosenia a škálovania prevedieme na jednoduché stredové premietanie
- Pre rovnice jednoduchého stredového premietania bodu $U = [u, v, w]$ do priemetne π máme vzťah:

$$\begin{pmatrix} u_{proj} \\ v_{proj} \\ w_{proj} \\ 1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}^{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ -w \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{u}{w} \\ -\frac{v}{w} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- V tomto premietaní je tiež treba uchovávať hĺbkovú súradnicu w bodu U

Stredové (perspektívne) premietanie

- Pohľadový objem v stredovom premietaní je tvorený zrezaným štvorbokým ihlanom, ktorého vrchol je v strede snímacej súradnicovej sústavy. Jeho bočné steny určuje výrez v priemetni π, ktorý môže byť určený aj zorným poľom (*field of view* – FOV). Prednú a zadnú stenu zrezaného ihlanu tvorí predná (*near*) a zadná (*far*) orezávacia rovina, pričom sa obe zvolia tak, aby boli navzájom rovnobežné
- Priemetňa $\pi : w = -n$ je určená prednou stenou zrezaného ihlanu
- Keďže zorné pole má pre výšku iný uhol ako pre šírku, definuje sa niekedy hodnotou *fovy* (uhol na výšku) a pomerom *aspect* šírky výrezu ku jeho výške
- Pre jednoduché stredové premietanie, dostaneme pre bočné steny pohľadového ihlanu vyjadrenia: $u = w$ (ľavá), $u = -w$ (pravá), $v = w$ (dolná), $v = -w$ (horná), $w = -n$ (predná), $w = -f$ (zadná)
- Znamienkovo opačné vyjadrenie $u, v = \pm w$ namiesto $u, v = \mp w$ (ľavá/pravá, dolná/horná) je spôsobené ľavotočivou (*right handed*) orientáciou súradnicovej sústavy

Stredové premietanie – transf. snímacích súradníc na NSZ

- Nahraďme singulárnu maticu **M** všeobecnejšou regulárnou maticou s nenulovými (zatiaľ neznámymi) hodnotami α a β, potom pre zobrazenie bodu $U = [u, v, w]$ dostávame vzťah:

$$\begin{pmatrix} u_{proj} \\ v_{proj} \\ w_{proj} \\ 1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}^{\mathbf{M}_{sperp}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \alpha w + \beta \\ -w \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{u}{w} \\ -\frac{v}{w} \\ -\left(\alpha + \frac{\beta}{w}\right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Takto sme získali rovnaký predpis pre zobrazenie bodu U, ako pri jednoduchom stredovom premietaní, až na hĺbkovú súradnicu w_{proj}
- Po tomto stredovom zobrazení aplikujeme jednoduché kolmé premietanie a dostaneme vyjadrenie pre jednoduché stredové premietanie:

$$\begin{pmatrix} u_{proj} \\ v_{proj} \\ w_{proj} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{sortp} \cdot \mathbf{M}_{sperp} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \\ -w \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{u}{w} \\ -\frac{v}{w} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stredové premietanie – transf. snímacích súradníc na NSZ

- Transformáciou $\mathbf{M}_{sperp}$ sa bočné steny ihlanu pretransformujú na $u_{proj} = -1$ (ľavá), $u_{proj} = 1$ (pravá), $v_{proj} = -1$ (dolná) $v_{proj} = 1$ (horná)
- Predná stena sa zobrazí na $w_{proj} = -\left(\alpha - \frac{\beta}{n}\right)$ a zadná na $w_{proj} = -\left(\alpha - \frac{\beta}{f}\right)$
- Ak zvolíme $\alpha = -\frac{n+f}{f-n}$ a $\beta = -\frac{2nf}{f-n}$, predná stena sa zobrazí na $w_{proj} = -1$ a zadná stena na $w_{proj} = 1$, čím dostaneme axiálnu kocku
- Aj keď je zobrazenie hĺbkovej súradnice $w \mapsto -\left(\alpha + \frac{\beta}{w}\right)$ nelineárne, zachováva usporiadanie hĺbok, t.j. ak $w_1 > w_2$, tak pre kladné α a β platí, že $-\left(\alpha + \frac{\beta}{w_1}\right) > -\left(\alpha + \frac{\beta}{w_2}\right)$

Po dosadení za α a β dostaneme nasledujúcu perpektívno-normalizačnú maticu:

$$\mathbf{M}_{sperp} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{n+f}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Všeobecné stredové premietanie

- V tomto prípade sa neobmedzíme na symetrický zrezaný ihlan s FOV $= 90^\circ$
- Bočné steny ihlanu určíme buď výrezom na priemetni, t.j. zadaním súradníc vrcholov prednej steny, alebo zorným poľom tak, že sa definuje vertikálny uhol $fovy = \theta$ a pomer strán výrezu na priemetni $aspect = width/height$.
- Pomocou uhla θ môžeme odvodiť súradnice vrcholov prednej steny:

$$t = \frac{n}{f_{ov}}, \qquad b = -\frac{n}{f_{ov}} \tag{1}$$

$$r = aspect \cdot \frac{n}{f_{ov}}, \quad l = -aspect \cdot \frac{n}{f_{ov}}, \tag{2}$$

kde $f_{ov} = \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2}$

- Všeobecný pohľadový ihlan prevedieme na „normovaný“ pohľadový ihlan jednoduchého stredového premietania:
  1. aplikovaním skosenia
  2. použitím škálovania

Všeobecné stredové premietanie – transf. súradníc na NSZ

- Použitím skosenia chceme zabezpečiť, aby:
  $[(l+r)/2, v, -n] \mapsto [0, v, -n]$ (vodorovné centrovanie v smere u) a
  $[u, (t+b)/2, -n] \mapsto [u, 0, -n]$ (zvislé centrovanie v smere v)
- Docielime to pomocou skosenia

$$\begin{aligned} u' &= u + \frac{l+r}{2n} z \\ v' &= v + \frac{t+b}{2n} z \\ w' &= w, \end{aligned}$$

ktorému zodpovedá matica $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{l+r}{2n} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{t+b}{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Všeobecné stredové premietanie – transf. súradníc na NSZ

- Škálovaním chceme zabezpečiť, aby výsledný pohľadový objem zodpovedal pohľadovému objemu jednoduchého stredového premietania $[-\frac{r-l}{2}, v, -n] \mapsto [-n, v', -n]$, $[\frac{r-l}{2}, v, -n] \mapsto [n, v', -n]$ (vodorov. škálovanie) $[u, -\frac{t-b}{2}, -n] \mapsto [u', -n, -n]$, $[u, \frac{t-b}{2}, -n] \mapsto [u', n, -n]$ (zvislé škálovanie)
- Docielime to pomocou škálovania

$$\begin{aligned} u' &= \frac{2n}{r-l} u \\ v' &= \frac{2n}{t-b} v \\ w' &= w, \end{aligned}$$

ktorému zodpovedá matica $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Všeobecné stredové premietanie – výsledná matica

- Po vynásobení matice jednoduchého stredového premietania $\mathbf{M}_{sperp}$ maticou skosenia $\mathbf{H}$ a potom maticou škálovania $\mathbf{S}$, dostaneme výslednú maticu $\mathbf{M}_{perp}$ všeobecného stredového premietania

$$\mathbf{M}_{perp} = \mathbf{M}_{sperp} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- V prípade, že máme dané symetrické stredové premietanie pomocou uhla zorného poľa $fovy = \theta$ a pomeru $aspect = width/height$, dostávame využitím rovníc (1) a (2) pre maticu stredového premietania

$$\mathbf{M}_{perp} = \mathbf{M}_{sperp} \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{f_{ov}}{aspect} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{ov} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

kde $f_{ov} = \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}}$

Rovnice prechodu od NSZ na výrez okna (viewport)

- Viewport určuje časť (výrez) okna, do ktorej sa bude vykresľovať obraz premietnutých objektov
- Je určený začiatkom $[x_v, y_v]$ a šírkou a výškou $[width, height]$ okna
- Prechod od normalizovaných súr. zariadenia na viewport zabezpečujú rovnice:

$$\begin{aligned} x_{view} &= \frac{u_{proj}+1}{2} width + x_v \\ y_{view} &= \frac{v_{proj}+1}{2} height + y_v, \end{aligned}$$

ktoré sa dajú vyjadriť aj v maticovom tvare

$$\begin{pmatrix} x_{view} \\ y_{view} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{width}{2} & 0 & \frac{width}{2} + x_v \\ 0 & \frac{height}{2} & \frac{height}{2} + y_v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{proj} \\ v_{proj} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matica prechodu od globálnej súrad. sústavy ku pohľadovej

- Matica prechodu od lokálnych (modelovacích) súradnicových sústavy ku globálnej súradnicovej sústave a podobne od globálnej súradnicovej sústavy ku pohľadovej je v 2D zobrazovacom kanáli vytvorená rovnako ako v 3D, t.j. vynásobením matice posunutia a matice otáčania:

$$\begin{pmatrix} e_{ux} & e_{uy} & p_x \\ e_{vx} & e_{vy} & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathbf{M}_{trans}} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathbf{M}_{rot}}$$

Ak opäť využijeme vzťah $(\mathbf{M}_{trans} \cdot \mathbf{M}_{rot})^{-1} = \mathbf{M}_{rot}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{M}_{trans}^{-1}$ dostaneme:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{rot}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{M}_{trans}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & -p_x\cos\phi - p_y\sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi & p_x\sin\phi - p_y\cos\phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalizácia a transformácia na výrez okna (viewport)

- V pohľadovej súradnicovej sústave sa zvolí výrez, ktorý definuje tzv. orezávajúce okno (*clipping window*), ktorého strany sú rovnobežné s osami u, v pohľadovej súradnicovej sústavy
- Orezávajúce okno býva zadané podobne ako výrez určujúci pohľadový objem pri jednoduchom kolmom premietaní v 3D, t.j. stranami $u = l$ (ľavá, *left*), $u = r$ (pravá, *right*), $v = b$ (dolná, *bottom*), $v = t$ (horná, *top*)
- Transformáciu pohľadových súradníc na NSZ je potom možné vykonať pomocou zloženia posunutia a škálovania:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathbf{S}} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{r+l}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{t+b}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Rovnice prechodu od NSZ na výrez okna (viewport) sú potom úplne rovnaké ako v 3D zobrazovacom kanáli

$$\begin{pmatrix} x_{view} \\ y_{view} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{width}{2} & 0 & \frac{width}{2} + x_v \\ 0 & \frac{height}{2} & \frac{height}{2} + y_v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix}$$