POČÍTANIE PRIENIKOV

Hľadanie prienikov objektov je veľmi častá operácia v počítačovej grafike. V záujme urýchlenia výpočtov ku každému objektu alebo jeho časti preto priraďujeme ohraničujúce teleso. Je ním nejaké jednoduchšie teleso, ktoré obsahuje celý pôvodný objekt. Ako ohraničujúce telesá sa často používajú axiálny kváder (t.j. taký, ktorého steny sú rovnobežné so súradnicovými rovinami), ďalej ním môže byť guľa prípadne elipsoid, valec, alebo môže ísť o ich kompozíciu, kedy sa pôvodný objekt rozdelí na viacero častí a každá sa uzavrie do zvláštneho telesa. Pri hľadaní prieniku dvoch daných objektov testujeme najprv ich ohraničujúce telesá. Ak tieto majú prázdny prienik, určite to isté platí aj o pôvodných objektoch. Len v prípade, že pomocou ohraničujúcich telies nevieme usúdiť, že prienik je prázdny, pristupujeme k náročnejším výpočtom.

Uvedieme si najprv jednoduchšie prípady hľadania prienikov v rovine, a potom si spomenieme aj niekoľko prípadov v trojrozmernom priestore. Zameriame sa najmä na hľadanie prieniku úsečky (prípadne polpriamky) a iného telesa. Mnohé iné prípady sa potom dajú zredukovať na hľadanie prieniku s úsečkou.

Úsečku budeme pre tento účel takmer vždy parametrizovať. Úsečka môže byť zadaná

- dvoma koncovými bodmi $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$,
- jedným koncovým bodom $A = (a_1, a_2)$ a smerovým vektorom $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, pričom druhý koncový bod je potom bod $A + \mathbf{u}$. Teda ak porovnáme s predchádzajúcim prípadom, tak $u_i = b_i - a_i$, $i = 1, 2$,
- jedným koncovým bodom, smerom a dĺžkou,
- ...

Potom je táto úsečka parametrizovaná nasledovne:

$$x = a_1 + u_1 t$$
$$y = a_2 + u_2 t$$

pričom $t \in \langle 0, 1\rangle$ pre úsečku AB a $t \in \langle 0, \infty)$ pre polpriamku AB. Uvedieme si algoritmy pre úsečku, tie sa však dajú použiť aj na prípad polpriamky.

1. Prienik dvoch úsečiek v rovine

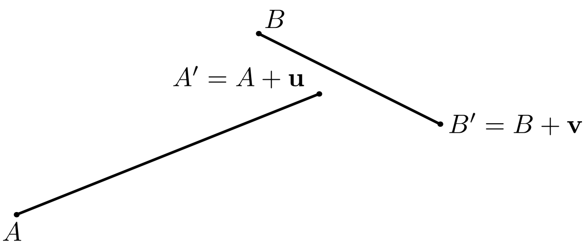
Jedna úsečka nech je zadaná bodom $A = (a_1, a_2)$ a vektorom $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, druhá zas bodom $B = (b_1, b_2)$ a vektorom $v = (v_1, v_2)$. Máme teda obe parametrizované:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + u_1 s & \qquad x &= b_1 + v_1 t \\ y &= a_2 + u_2 s, \quad s \in \langle 0, 1\rangle & \qquad y &= b_2 + v_2 t, \quad t \in \langle 0, 1\rangle \end{aligned}$$

Vyriešime najprv špeciálne prípady, keď úsečky sú rovnobežné. Pre ľubovoľný vektor $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ budeme symbolom $\mathbf{w}^\perp$ označovať vektor, ktorý z vektora $\mathbf{w}$ získame jeho otočením o 90°, teda vektor so súradnicami $(-w_2, w_1)$.

Úsečky $A + \mathbf{u}s$, $B + \mathbf{v}t$ sú rovnobežné, ak ich smerové vektory sú rovnobežné, čo platí, keď vektory $u, v^\perp$ sú navzájom kolmé. To overíme skalárnym súčinom: zistíme, či $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^\perp = 0$. Ak toto platí, overíme ešte, či obe úsečky ležia na spoločnej priamke, t.j. či $B - A \parallel \mathbf{v}$. Ak $(B - A) \cdot \mathbf{v}^\perp \neq 0$, úsečky ležia na rôznych priamkach a teda nemajú žiaden spoločný bod. V opačnom prípade si všetky štyri koncové body zoradíme podľa niektorej súradnice a podľa poradia usúdime, či prienik nastáva, a prípadne ho nájdeme.

Ak $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^\perp \neq 0$, teda úsečky ležia na navzájom rôznobežných priamkach, overíme ešte, či majú naozaj neprázdny prienik, prv než sa ho pokúsime vypočítať. Aby sa úsečky naozaj pretínali, musia koncové body každej z nich ležať v opačných polrovinách určených priamkou obsahujúcou druhú úsečku. Body $B, B+\mathbf{v}$ ležia na opačných polrovinách od priamky určenej úsečkou $A+\mathbf{u}s$, ak bázy $\mathbf{u}, B-A$ a $\mathbf{u}, (B+\mathbf{v})-A$ (na poradí vektorov záleží!) sú opačne orientované.



OBR. 1. Hľadanie prieniku dvoch úsečiek. Bázy $\mathbf{u}, B-A$ a $\mathbf{u}, B'-A$ sú opačne orientované, ale bázy $\mathbf{v}, A-B$ a $\mathbf{v}, A'-B$ sú zhodne orientované, a preto úsečky nemajú spoločný bod.

Na zisťovanie orientácie bázy nám poslúži nasledovné tvrdenie:

Lema 1.1. *Pre ľubovoľné lineárne nezávislé vektory* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ *je báza* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *(v tomto poradí) kladne orientovaná práve vtedy, keď*

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} > 0.$$

Kladne orientovanou bázou máme na mysli bázu orientovanú súhlasne s bázou tvorenou elementárnymi vektormi $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$.

Dôkaz. Keď si situáciu vnoríme do trojrozmerného priestoru, vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ budú mať súradnice $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)$. Ich vektorovým súčinom bude vektor kolmý na $\mathbf{u}$ aj $\mathbf{v}$, a pri štandardnej orientácii podľa pravidla pravej ruky vidíme, že jeho z-súradnica bude kladná, ak $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ tvoria kladne orientovanú bázu pôvodnej roviny, a naopak z-súradnica vektorového súčinu bude záporná, keď $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ tvoria záporne orientovanú bázu. Nakoniec ešte jednoducho overíme, že

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(0,\ 0,\ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right).$$

□

Predpokladajme, že bázy $\mathbf{u}, B-A$ a $\mathbf{u}, (B+\mathbf{v})-A$ sú opačne orientované a to isté že platí o bázach $\mathbf{v}, A-B$ a $\mathbf{v}, (A+\mathbf{u})-B$, teda úsečky majú naozaj spoločný bod. Aby sme ho našli, potrebujeme vypočítať jeden z parametrov s, t takých, že $A+\mathbf{u}s = B+\mathbf{v}t$. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} A + \mathbf{u}s &= B + \mathbf{v}t \\ \mathbf{u}s - \mathbf{v}t &= B - A \quad | \cdot \mathbf{v}^{\perp} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^{\perp} s &= (B-A) \cdot \mathbf{v}^{\perp} \\ s &= \frac{(B-A) \cdot \mathbf{v}^{\perp}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^{\perp}} \end{aligned}$$

Všimnime si, že po všetkých testoch, ktoré sme už urobili, je výpočet hodnoty parametra s rýchly: hodnotu v menovateli sme už vypočítali, keď sme testovali rovnobežnosť úsečiek, hodnota v čitateli je zas rovná determinantu

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix},$$

a tú tiež poznáme, lebo sme testovali, či úsečky majú spoločný bod.

Podobne môžme vypočítať parameter t pre bod prieniku, ale ak sme už vopred overili, že úsečky sa naozaj pretínajú, stačí nám hodnotu parametra s dosadiť do rovnice pre prvú úsečku a získame tak súradnice hľadaného bodu. Inými slovami, už netreba počítať parameter t a overovať, či je naozaj v intervale $\langle 0, 1\rangle$.

2. Bod a mnohouholník v rovine

Pre mnohouholník a bod potrebujeme určiť ich vzájomnú polohu, teda zistiť, či bod leží vnútri mnohouholníka alebo zvonka. Na rozhodnutie, či bod leží vnútri, máme niekoľko testov:

2.1. **Test pomocou súčtu uhlov.** Bod P leží zvonka mnohouholníka $A_1 \dots A_n$, ak súčet *orientovaných* uhlov $\angle A_i P A_{i+1}$ je zhruba 0 stupňov. Pojmom orientovaný uhol máme na mysli, že jeho veľkosť je kladná, ak sa od hrany PA_i k hrane PA_{i+1} dostaneme otočením kladným smerom o uhol menší ako 180°, v opačnom prípade je jeho veľkosť záporná. Pokiaľ použijeme tento test, treba mať na pamäti, že použité trigonometrické funkcie budú len približné, a preto musíme výsledok čítať s nejakou toleranciou (odtiaľ slovko „zhruba" na začiatku).

Použitie tohto kritéria je výpočtovo veľmi náročné, a preto, pokiaľ je to možné, sa používa nasledovné:

2.2. **Test pomocou parity počtu priesečníkov s polpriamkou.** Z bodu P, pre ktorý zisťujeme jeho vzájomnú polohu s mnohouholníkom $A_1 \dots A_n$, si vedieme ľubovoľnú polpriamku. Táto nám v generickom (čiže dostatočne všeobecnom) prípadne pretne hranicu mnohouholníka v konečne veľa bodoch. Pokiaľ je počet týchto priesečníkov párny, nachádza sa bod P zvonka mnohouholníka, a ak je ich počet nepárny, bod je vnútri mnohouholníka.

Pri tomto teste treba starostlivo ošetriť špeciálne prípady, a to keď polpriamka prechádza niektorým vrcholom A_i mnohouholníka. Vtedy ak sa vrcholy A_{i-1} a A_{i+1} nachádzajú v opačných polrovinách určených priamkou PA_i, započítame taký priesečník ako jeden bod. Ak sú však oba vrcholy v tej istej polrovine, bod A_i ako priesečník *nepočítame*. Ak sa navyše aj vrchol A_{i-1} nachádza na polpriamke (čiže leží na nej celá hrana $A_{i-1}A_i$), uvažujeme bod A_{i-2} ako bod, ktorým rozhodneme, či priesečník započítať alebo nie. Presnejšie sformulované, nájdeme najbližší vrchol predchádzajúci vrcholu A_i taký, že neleží na priamke a podobne najbližší nasledujúci, a podľa nich rozhodneme, či A_i započítať medzi priesečníky alebo nie.

2.3. **Test pre konvexný mnohouholník.** Ak je mnohouholník $A_1 \dots A_n$ konvexný a kladne orientovaný, stačí pre každú hranu $A_i A_{i+1}$ overiť, či $A_i - P, A_{i+1} - P$ je kladne orientovaná báza. Môžme pri tom použiť Lemu 1.1

3. Prienik úsečky a mnohouholníka v rovine

Pokiaľ chceme nájsť len prienik úsečky s hranicou mnohouholníka, čiže s lomenou čiarou, vo všeobecnom prípade to znamená niekoľkokrát vyriešiť problém prieniku dvoch úsečiek, a síce zadanej úsečky a každej hrany, ktorá tvorí hranicu mnohouholníka. Ak potrebujeme nájsť prienik s mnohouholníkom, pričom máme na mysli hraničné aj vnútorné body, treba urobiť ešte niekoľko ďalších výpočtov. Úsečka bude hranicou mnohouholníka rozdelená na niekoľko častí a my ešte rozhodneme, ktoré z nich ležia vnútri a ktoré zvonka daného mnohouholníka pomocou niektorého z uvedených testov.

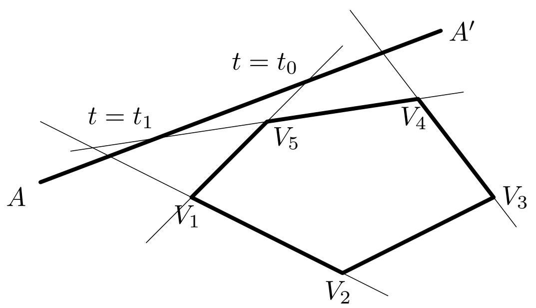
3.1. **Prienik úsečky a konvexného mnohouholníka v rovine.** Ak je mnohouholník konvexný, dá sa jeho prienik s úsečkou nájsť aj rýchlejšie. Konvexný mnohouholník je prienikom konečného počtu polrovín a teda nájsť prienik s takýmto mnohouholníkom znamená nájsť prienik s každou z týchto polrovín.

Podobne ako pri algoritmoch viditeľnosti bude každá strana mnohouholníka privrátená alebo odvrátená vzhľadom na smer úsečky AA': strana $V_i V_{i+1}$ bude privrátená, ak orientovaná úsečka priamkou $V_i V_{i+1}$ vstupuje do polroviny obsahujúcej mnohouholník, a je odvrátená, ak úsečka touto priamkou z príslušnej polroviny vystupuje. Pre každú priamku obsahujúcu niektorú stranu mnohouholníka vypočítame parameter na úsečke prislúchajúci priesečníku úsečky a priamky. Skutočné priesečníky úsečky a mnohouholníka vypočítame až na záver. Úsečka bude vstupovať do mnohouholníka v bode posledného priesečníka so všetkými privrátenými priamkami, a vystupovať z mnohouholníka bude v bode prvého priesečníka so všetkými odvrátenými priamkami. Pokiaľ úsečka pretne skôr niektorú odvrátenú priamku ako poslednú privrátenú, nemá s mnohouholníkom žiaden spoločný bod.

Máme teda algoritmus:

$t_0 := 0, t_1 := 1$ // *inicializácia*
pre každú priamku p obsahujúcu niektorú zo strán mnohouholníka
  nech t je parameter zodpovedajúci prieniku úsečky AA' a priamky p,
  ak p je privrátená stena, tak
    $t_0 := \max\{t_0, t\}$
  inak (p je odvrátená stena)
    $t_1 := \min\{t_1, t\}$
ak $t_0 > t_1$
  úsečka a mnohouholník sú navzájom disjunktné
inak
  $B := A + (A' - A)t_0$,
  $B' := A + (A' - A)t_1$,
  prienikom úsečky AA' a mnohouholníka je úsečka BB'.

Príklad 3.1. Ilustrujeme si metódu na príklade úsečky AA' a konvexného mnohouholníka $V_1V_2V_3V_4V_5$. Úsečka AA' vstupuje do mnohouholníka priamkou obsahujúcou hranu V_1V_2 a priam-



Obr. 2. Hľadanie prieniku úsečky a konvexného mnohouholníka.

kou obsahujúcou hranu V_5V_1, pričom priesečník s druhou z nich prislúcha väčšej hodnote parametra t. Máme teda parameter t_0, pri ktorom úsečka vstupuje do mnohouholníka. Zvyšné tri priamky sú odvrátené, teda úsečka AA' nimi vystupuje von. Z nich prienik s priamkou obsahujúcou hranu V_4V_5 prislúcha najmenšiemu parametru $t = t_1$, teda úsečka vystupuje z mnohostena práve v tomto bode. Avšak máme, že $t_0 > t_1$, teda úsečka mnohouholník vôbec nepretína.

4. Prienik úsečky a krivky v rovine

Treba nájsť prienik úsečky zadanej parametricky

$$A + \mathbf{u}t, \quad t \in \langle 0, 1\rangle$$

a implicitnej krivky danej rovnicou

$$f(x, y) = 0,$$

kde f je nejaká funkcia premenných x, y. Bod ktorý leží na úsečke aj na krivke nájdeme tak, že v rovnici pre krivku dosadíme za x a y parametrické vyjadrenie úsečky, čím získame rovnicu pre parameter t:

$$g(t) = f(a_1 + u_1 t, a_2 + u_2 t) = 0. \tag{1}$$

Riešenia tejto rovnice, ktoré sa nachádzajú na intervale $\langle 0, 1\rangle$, zodpovedajú bodom úsečky, ktoré ležia aj na krivke. Voľba metódy hľadania koreňov rovnice s neznámou t už závisí od druhu funkcie $f(x, y)$ pre krivku. Uvedieme si niekoľko základných postupov.

4.1. **Úsečka a kvadratická krivka.** Ak f je kvadratický polynóm s premennými x, y, čiže daná krivka je kužeľosečka, výpočet je jednoduchý a presný. Postup si budeme ilustrovať na prieniku úsečky s kružnicou, ostatné krivky sa riešia analogicky.

Nech krivka je teda kružnica s polomerom r, ktorej stred má súradnice c_1, c_2), je preto popísaná rovnicou

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 - r^2 = 0.$$

Pre nájdenie prieniku dosadíme parametrické vyjadrenie úsečky do rovnice kružnice a dostávame

$$((a_1 + u_1 t) - c_1)^2 + ((a_2 + u_2 t) - c_2)^2 - r^2 = 0.$$

Po roznásobení tak získame kvadratickú rovnicu pre parameter t, jej diskriminant si označíme D. Máme tri prípady:

- $D < 0$, priamka obsahujúca úsečku nemá s kružnicou spoločný bod, a to isté potom platí aj pre vzájomnú polohu kružnice a úsečky.
- $D = 0$, priamka obsahujúca úsečku je dotyčnicou kružnice. Rovnica pre t má jediné riešenie t_0. Ak $t_0 \in \langle 0, 1\rangle$, bod dotyku $A + \mathbf{u}t_0$ je jediným spoločným bodom kružnice a úsečky.
- $D > 0$, priamka obsahujúca úsečku je sečnicou kružnice. Rovnica pre t má dve reálne riešenia, t_1 a t_2. Pre každé t_i, pre ktoré platí $t_i \in \langle 0, 1\rangle$, je bod $A + \mathbf{u}t_i$ spoločným bodom kružnice a úsečky.

Okrem nájdenia priesečníka je často užitočné aj vedieť nájsť smer normály krivky v tomto bode, teda smer vektora kolmého na dotyčnicu v bode. Toto sa často využíva pri rôznych renderovacích algoritmoch, keď treba napríklad zistiť, pod akým uhlom sa dopadajúci lúč od telesa odrazí (tieňovanie, odraz v zrkadle...).

Normálu ku kružnici nájdeme jednoducho, keď si uvedomíme, že dotyčnica je v každom bode kolmá na polomer. Ak máme na kružnici

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 - r^2 = 0$$

bod $P = (p_1, p_2)$, normála kružnice v tomto bode má potom smer $(p_1 - c_1, p_2 - c_2)$. Normálu k ľubovoľnej krivke nájdeme pomocou nasledujúcej Lemy bez dôkazu).

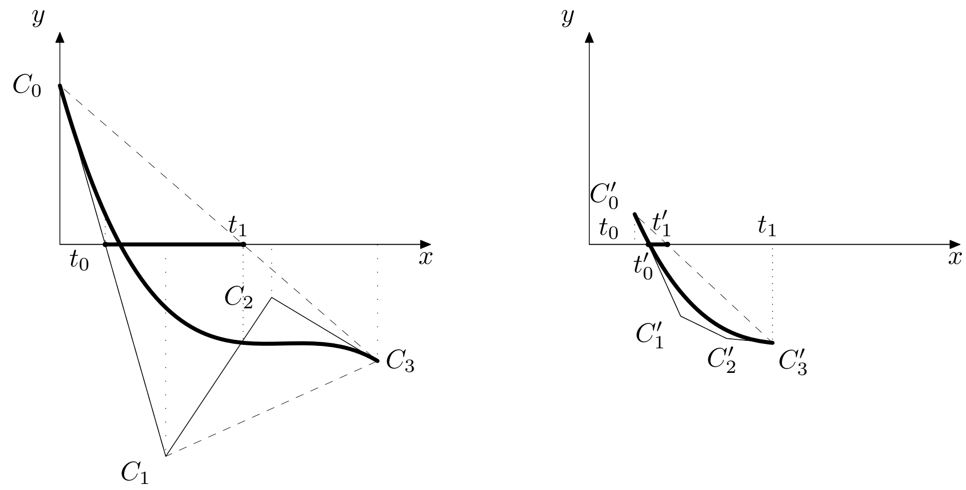
Lema 4.1. *Nech $f(x, y) = 0$ je rovnica krivky a $P = (p_1, p_2)$ je bod ležiaci na tejto krivke, teda $f(p_1, p_2) = 0$. Ak $\frac{\partial f}{\partial x}(p_1, p_2) \neq 0$ alebo $\frac{\partial f}{\partial y}(p_1, p_2) \neq 0$, tak normála krivky v bode P má smer*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_1, p_2), \frac{\partial f}{\partial y}(p_1, p_2)\right).$$

4.2. **Úsečka a polynomická krivka: Beziérovo orezávanie.** Ak je krivka daná polynomickou rovnicou $f(x, y) = 0$, potom po dosadení parametrizácie úsečky bude funkcia (1) tiež polynomická. Ak je stupeň tohto polynómu väčší ako 2, spravidla sa pre nájdenie koreňa používajú numerické metódy. My si uvedieme veľmi rýchlu metódu nazvanú *Beziérovo orezávanie.* Táto metóda nájde všetky korene polynomickej rovnice na danom intervale.

Nech (1) je polynomická rovnica stupňa d. Nás zaujímajú korene na intervale $\langle 0, 1\rangle$, preto si graf funkcie $g(t)$ na tomto intervale, čiže body $(t, g(t))$ pre $t \in \langle 0, 1\rangle$ napíšeme ako Beziérovu krivku stupňa d. Vtedy x-ové súradnice riadiacich vrcholov budú $0, 1/d, 2/d, \ldots, 1$. Využijeme vlastnosť Beziérovej krivky, že celá leží v konvexnom obale svojho riadiaceho polygónu. Ak teda prienikom riadiaceho polygónu a osi x je interval $\langle t_0, t_1\rangle$, tak všetky korene funkcie $f(t)$ z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ sú v intervale $\langle t_0, t_1\rangle$. Stačí preto hľadať korene v tomto menšom intervale. Iteratívne si prepíšeme graf funkcie na kratšom intervale ako Beziérovu krivku, teda x-ové súradnice riadiacich vrcholov budú $t_0, t_0 + (t_1 - t_0)/d, t_0 + 2(t_1 - t_0)/d, \ldots, t_1$ a znovu hľadáme prienik riadiaceho polygónu a osi x. Takto pokračujeme, až kým interval $\langle t_0, t_1\rangle$ nie je menší ako vopred zvolená prípustná odchýlka od presného riešenia.

To, že funkcia $f(t)$ má na skúmanom intervale viac riešení, sa prejaví tým, že interval $\langle t_0, t_1\rangle$ sa prestane zmenšovať. Vtedy ho len rozdelíme na dve polovice a každú spracúvame samostatne.



Obr. 3. Hľadanie koreňa polynomickej rovnice Beziérovým orezávaním.

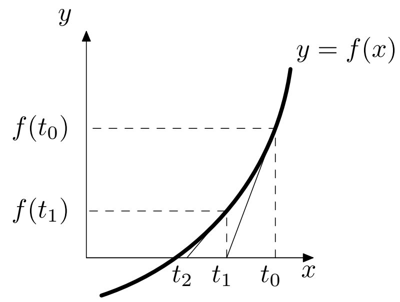
Beziérovo orezávanie je veľmi rýchla a numericky stabilná metóda hľadania koreňov. Jej nevýhodou je to, že funkcia, ktorej korene hľadáme, musí byť polynomická.

4.3. **Úsečka a hladká krivka: Newtonova metóda.** Ak funkcia $f(x, y)$ popisujúca krivku nie je polynomická, musíme pristúpiť k všeobecnejším metódam hľadania koreňov. Keď po dosadení (1) bude funkcia $g(t)$ diferencovateľná, možno na hľadanie koreňa použiť *Newtonovu metódu.* Najprv hrubo odhadneme koreň rovnice (1), označme si ho t_0. Následne iteratívne spresňujeme riešenie: ak t_i je aproximácia koreňa rovnice po i-tej iterácii, $(i+1)$-vú nájdeme ako prienik osi x a dotyčnice ku grafu funkcie v bode $(t_i, g(t_i))$. Dotyčnica je priamka so sklonom $g'(t_i)$ prechádzajúca bodom $(t_i, g(t_i))$, čiže jej rovnica je

$$y = g'(t_i)x + g(t_i) - g'(t_i)t_i.$$

Hodnota t_{i+1} je prvá súradnica prieniku tejto priamky a x-osi, máme teda, že

$$t_{i+1} = t_i - \frac{g(t_i)}{g'(t_i)}.$$



Obr. 4. Hľadanie koreňa rovnice $y = g(x)$ Newtonovou metódou.

Výhodou Newtonovej metódy je, že ju možno použiť na hľadanie koreňov akejkoľvek diferencovateľnej funkcie. Na druhej strane jej nevýhodou je, že je potrebné na začiatku dostatočne presne odhadnúť riešenie.

4.4. **Iné metódy.** Ak sa nedá použiť žiadna z doteraz uvedených metód, dá sa postupovať aj tak, že buď funkcia $g(t)$ alebo priamo krivka $f(x, y) = 0$ sa dostatočne jemne aproximuje lomenou čiarou a hľadá sa prienik úsečky a lomenej čiary.

Tiež sa používa metóda delenia okna. Obdĺžnikové okno sa zvislo a vodorovne rozdelí na štyri menšie podobná. Prienik sa potom hľadá len v tých podoknách, do ktorých zasahuje úsečka aj krivka. Takto pokračujeme v delení, až kým veľkosť okna nie je menšia ako požadovaná presnosť riešenia.

5. Prienik dvoch kriviek

5.1. **Kvadratické krivky.** Nech rovnice

$$f_1(x, y) = 0 \quad \text{a} \quad f_2(x, y) = 0$$

sú kvadratické, teda každá popisuje kvadratickú krivku. Popíšeme si postup hľadania spoločných bodov týchto dvoch kriviek.

Predpokladajme, že niektorá z rovníc neobsahuje člen s y^2, nech je to rovnica $f_1(x, y) = 0$. Dá sa v nej preto jednoducho vyjadriť premenná y:

$$y = g(x), \tag{2}$$

kde $g(x)$ je racionálna funkcia, v ktorej čitateľ je najviac kvadratický a menovateľ lineárny polynóm v premennej x. Toto vyjadrenie dosadíme do druhej rovnice, čím dostaneme racionálnu rovnicu pre x:

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)} = 0,$$

čo platí práve vtedy, keď $g_1(x) = 0$. Potrebujeme teda vyriešiť polynomickú rovnicu a každé riešenie potom dosadiť do vyjadrenia (2) pre y.

Ak obe rovnice f_1 aj f_2 obsahujú člen s y^2, máme rovnice tvaru

$$c_1 y^2 + \bar{f}_1(x, y) = 0$$
$$c_2 y^2 + \bar{f}_2(x, y) = 0,$$

kde $\bar{f}_1(x, y)$ a $\bar{f}_2(x, y)$ obsahujú z kvadratických členov už len x^2 a xy. Prenásobíme prvú rovnicu c_2, druhú c_1, odčítame, a z výsledku vyjadríme y ako racionálnu funkciu x. Ďalej pokračujeme ako v predošlom prípade.

5.2. **Beziérove krivky.** Pre dve Beziérove krivky C_1 a C_2 sa dá znovu použiť metóda Beziérovho orezávania. Podobne ako pri hľadaní koreňov sa využíva vlastnosť, že krivka leží v konvexnom obale svojho riadiaceho polygónu. Ak majú teda krivky spoločný bod, bude ležať v prieniku konvexných obalov riadiacich polygónov. Postup je analogický s hľadaním koreňov:

(1) Nájdi prienik krivky C_1 s konvexným obalom riadiaceho polygónu krivky C_2. V tomto kroku treba hľadať prienik niekoľkých úsečiek s Beziérovou krivkou.
(2) Orež krivku C_1 tak, že jej počiatočný bod bude v mieste, kde pôvodná krivka C_1 vstupovala do konvexného obalu riadiaceho polygónu krivky C_2, a jej koncový bod bude tam, kde z neho vystupovala. Treba nájsť riadiaci polygón takto orezanej krivky.
(3) Ak riadiaci polygón (novej) krivky C_1 je menší ako prípustná odchýlka od presného riešenia, máme priesečník kriviek. Inak opakuj algoritmus od začiatku, pričom vymeň úlohy kriviek C_1 a C_2.

Ak sa riadiace polygóny kriviek nezmenšujú, pravdepodobne majú krivky viac spoločných bodov. V takom prípade obe krivky rozdelíme na dve polovice a pokračujeme spracovávaním každej prípustnej dvojice podkriviek.

5.3. **Iné postupy.** Ak nie sú krivky polynomické, môžeme postupovať tak, že ich aproximujeme lomenými čiarami a hľadáme prienik lomených čiar.

Taktiež, podobne ako pri hľadaní prieniku krivky a úsečky, sa niekedy používa aj algoritmus delenia okna.

6. Prienik úsečky a roviny v priestore

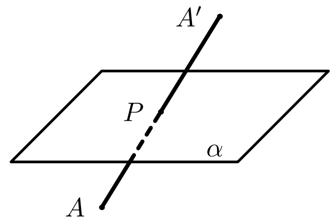
Ide o najzákladnejšiu situáciu hľadania prieniku v priestore. Podobne ako v rovine máme úsečku zadanú parametricky ako $X = A + \mathbf{u}t$, pre $t \in \langle 0, 1\rangle$, čo po rozpísaní do súradníc vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + u_1 t \\ y &= a_2 + u_2 t \\ z &= a_3 + u_3 t, \end{aligned}$$

Nech A, A' sú koncové body úsečky, čiže $A' = A + \mathbf{u}$. Rovina, označme si ju α, nech je zadaná implicitne lineárnou rovnicou

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \text{presnejšie} \qquad ax + by + cz + d = 0.$$

Najprv si overíme, či úsečka naozaj pretína rovinu, čiže či body A, A' ležia v opačných polpriestoroch určených touto rovinou. To platí, ak hodnoty $f(A)$ a $f(A')$ majú opačné znamienka. Ak prienik existuje, nájdeme ho nasledovnou lineárnou interpoláciou.



Obr. 5. Prienik úsečky a roviny.

Označme si prienik úsečky a roviny ako P. Keďže úsečka je parametrizovaná lineárne, platí, že parameter t zodpovedajúci bodu P na úsečke AA' (t.j. také t, že $P = A + (A' - A)t$) je rovný pomeru vzdialeností $|PA|$ a $|A'A|$:

$$t = \frac{|PA|}{|A'A|}.$$

Tento pomer vypočítame pomocou vzdialeností bodov A, A' od roviny α:

$$\frac{|PA|}{|A'A|} = \frac{|A\alpha|}{|A'\alpha| + |A\alpha|} = \frac{\frac{|f(A)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}{\frac{|f(A')|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \frac{|f(A)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}} = \frac{|f(A)|}{|f(A')| + |f(A)|},$$

teda pre priesečník máme

$$P = A + \frac{|f(A)|}{|f(A')| + |f(A)|}(A' - A).$$

7. Prienik úsečky a mnohouholníka v priestore

Úlohu rozložíme na dve podúlohy:

(1) nájsť prienik úsečky a roviny obsahujúcej mnohouholník,
(2) zistiť, či prienik úsečky a roviny leží vnútri mnohouholníka.

Prvú úlohu vyriešime ako bolo popísané v predchádzajúcom odseku. Hľadanie roviny obsahujúcej daný mnohouholník bolo popísané v kapitole o algoritmoch viditeľnosti. Pre druhú úlohu použijeme testy spomenuté v odseku 2, avšak najprv je však nutné transformovať situáciu z trojrozmernej na dvojrozmernú. To urobíme jednoduchou projekciou do niektorej súradnicovej roviny, čiže „zabudnutím” niektorej súradnice. Volíme pritom tú projekciu, aby priemet mnohouholníka mal čo najväčší obsah. Ktorá projekcia to je, rozhodneme podľa normálového vektora (a, b, c) roviny $ax + by + cz + d = 0$ obsahujúcej daný mnohouholník. Projekcia bude vynechávať tú súradnicu, ktorá zodpovedá maximálnej absolútnej hodnote súradníc normálového vektora roviny. Napríklad, keď $|a| \geq |b|$ a $|a| \geq |c|$, vhodná projekcia je $(x, y, z) \mapsto (y, z)$.

8. Prienik úsečky a mnohouholníkovej siete

Vo všeobecnosti nájsť spoločné body úsečky a siete znamená, že treba hľadať prienik úsečky s každým mnohouholníkom tejto siete. Pre špeciálny prípad, keď sieť je povrchom konvexného mnohostena, môžme použiť špeciálny algoritmus, analogický algoritmu pre hľadanie prieniku úsečky a konvexného mnohouholníka v rovine.

9. Prienik úsečky a implicitnej plochy

Postupujeme úplne analogicky ako v prípade hľadania prieniku úsečky a krivky v rovine: plocha je zadaná implicitne ako množina bodov v priestore spĺňajúca rovnicu $f(x, y, z) = 0$. Dosadením parametrického vyjadrenia úsečky získame rovnicu pre parameter t a hľadáme riešenie na intervale $\langle 0, 1\rangle$. Dodajme len, že ak chceme nájsť smer normály plochy v nejakom jej bode $P = (p_1, p_2, p_3)$, môžme tento vypočítať ako

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_1, p_2, p_3), \frac{\partial f}{\partial y}(p_1, p_2, p_3), \frac{\partial f}{\partial z}(p_1, p_2, p_3)\right)$$

KAGDM FMFI UK Bratislava
Email address: jana.pilnikova@fmph.uniba.sk