AFINNÉ TRANSFORMÁCIE

Definícia 0.1. Zobrazenie $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sa nazýva *afinné*, ak

- zachováva kolinearitu t.j. priamka sa zobrazí buď na priamku alebo na jeden bod),
- zachováva deliaci pomer t.j. ak pre kolineárne body A, B, C platí $C - A = \lambda(B - A)$ pre nejaké $\lambda \in \mathbb{R}$, potom aj $f(C) - f(A) = \lambda(f(B) - f(A)))$.

Afinné zobrazenie $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sa nazýva *transformáciou priestoru* $\mathbb{R}^n$, ak je invertibilné.

Tvrdenie 0.2. *Zobrazenie* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x'_1, \dots, x'_m)$ *je afinné, ak existujú také konštanty* $c_{ij} \in \mathbb{R}$*, že pre všetky body platí*

$$\begin{aligned}
x'_1 &= c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n + c_{10}\\
x'_2 &= c_{21}x_1 + \cdots + c_{2n}x_n + c_{20}\\
&\dots\\
x'_m &= c_{m1}x_1 + \cdots + c_{mn}x_n + c_{m0}.
\end{aligned}$$

Pre $m = n$ *je takéto zobrazenie transformáciou, ak determinant* $|c_{ij}|_{i,j=1}^n \neq 0$.

1. Transformácie v $\mathbb{R}^2$

Podľa predchádzajúceho sa každá afinná transformácia dá popísať rovnicami

$$\begin{aligned}
x' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{10}\\
y' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{20},
\end{aligned}\qquad \text{kde} \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{vmatrix} \neq 0.$$

Reálne čísla c_{ij} jednoznačne popisujú túto afinnú transformáciu.

Posunutie o vektor (t_x, t_y) je afinná transformácia, možno ju popísať lineárnymi rovnicami

$$\begin{aligned}
x' &= x + t_x\\
y' &= y + t_y.
\end{aligned}$$

Škálovanie (v smere súradnicových osí) je popísané rovnicami

$$\begin{aligned}
x' &= s_x x\\
y' &= s_y y, \qquad \text{pričom } s_x, s_y \neq 0.
\end{aligned}$$

Ide o škálovanie so stredom $(0, 0)$.

Príklad 1.1. Ak by sme chceli popísať transformáciu škálovania so stredom (a, b), ktorý nie je počiatkom súradnicovej sústavy, je možné túto transformáciu získať zložením troch známych:

(1) $T_{(-a,-b)}$ – posunutie o vektor $(-a, -b)$, ktorým stred škálovania posunieme do začiatku súradníc,
(2) S_{s_x,s_y} – škálovanie s požadovanými škálovacími faktormi s_x, s_y,
(3) $T_{(a,b)}$ – posunutie naspäť.

Výsledkom je teda transformácia $T_{(a,b)} \circ S_{s_x,s_y} \circ T_{(-a,-b)}$. Jej rovnice sa dajú získať postupným dosadzovaním transformovaných súradníc do jednotlivých rovníc, ale pre potreby implementácie je vhodné prepísať rovnice týchto zobrazení pomocou matíc.

Užitočným sa ukazuje používanie rozšírených súradníc. Bod so súradnicami (a, b) resp. vektor so súradnicami (u, v) budeme reprezentovať 3×1 maticou

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Potom posunutie o vektor (t_x, t_y) sa sa zapíše

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

škálovanie zas vyzerá nasledovne

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Každá z týchto transformácii je teda jednoznačne popísaná svojou maticou s rozmermi 3×3. Ak v predchádzajúcom príklade označíme maticu posunutia o $(-a, -b)$ ako M_1, maticu škálovania ako M_2 a maticu posunutia o (a, b) ako M_3, máme nasledovný zápis:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = T_{(a,b)} \circ S_{s_x,s_y} \circ T_{(-a,-b)}(\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}) = T_{(a,b)}(S_{s_x,s_y}(T_{(-a,-b)}(\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}))) =$$

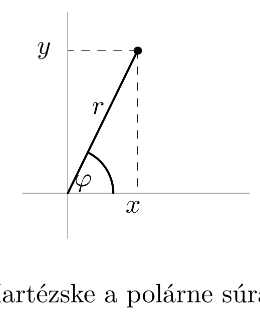
$$= T_{(a,b)}(S_{s_x,s_y}(M_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix})) = T_{(a,b)}(M_2 M_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}) = M_3 M_2 M_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Takže výsledná transformácia škálovania so stredom (a, b) je tiež popísaná 3×3 maticou, a síce maticou $M_3 M_2 M_1$. Vidíme, že skladanie zobrazení zodpovedá násobeniu matíc.

Ďalšou dôležitou afinnou transformáciou roviny je *otočenie* okolo bodu $(0, 0)$. Pre odvodenie rovníc si pripomenieme polárne súradnice bodu. Každý bod X v $\mathbb{R}^2$ je reprezentovaný dvoma číslami r a φ, kde $r \geq 0$ vyjadruje vzdialenosť bodu od začiatku súradníc O a $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ je orientovaný uhol, ktorý zviera polpriamka $\overrightarrow{OX}$ s kladným smerom x-osi. Medzi kartézskymi a polárnymi súradnicami máme vzťah

$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi.$$

Po otočení o uhol α budú polárne súradnice transformovaného bodu $r, \varphi + \alpha$. Teda pre kartézske



Obr. 1. Kartézske a polárne súradnice bodu

súradnice máme

$$x' = r \cos(\varphi + \alpha) = r \cos \varphi \cos \alpha - r \sin \varphi \sin \alpha = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$
$$y' = r \sin(\varphi + \alpha) = r \cos \varphi \sin \alpha + r \sin \varphi \cos \alpha = x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

Takže dostávame nasledovný maticový zápis otočenia okolo $(0,0)$ o uhol α:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Spomedzi špeciálnych afinných transformácií si ešte spomeňme zrkadlenie a skosenie. *Zrkadlenie* je len alternatívne meno pre osovú súmernosť: zrkadlenie podľa osi x je popísané maticou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a podobne zrkadlenie podľa osi y maticou

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pri každom zrkadlení je potrebné si uvedomiť, že ide o transformáciu, ktorá mení orientáciu roviny.

Keď hovoríme o *orientácii roviny*, máme na mysli orientáciu objektov v rovine a tiež orientáciu súradnicovej sústavy. Hovoríme, že sústava súradníc je *kladne orientovaná*, ak kladná y-poloos je otočením kladnej x-poloosi o pravý uhol proti smeru pohybu hodinových ručičiek, v opačnom prípade je súradnicová sústava orientovaná *záporne*. Ak pripúšťame, že súradnicové osi na seba nemusia byť kolmé, je súradnicová sústava kladne orientovaná, ak je kladná y-poloos otočením x-ovej o uhol v intervale $(0,\pi)$ proti smeru hodinových ručičiek.

Orientáciu ďalej spájame aj s mnohouholníkmi. Vravíme napríklad, že trojuholník ABC je kladne orientovaný, ak jeho vrcholy sú vymenované proti smeru hodinových ručičiek. Podobne orientujeme ostatné mnohouholníky bez samopriesekov.

Taktiež hrá orientácia rolu pri meraní a určovaní uhlov. Napríklad pri otáčaní o daný uhol otáčame vždy v smere sústavy súradníc, čiže pri kladnej orientácii je to proti smeru hodinových ručičiek.

Tým, že nejaká transformácia mení orientáciu, máme na mysli, že obrazom kladne orientovanej sústavy súradníc je záporne orientovaná súradnicová sústava a naopak. Po prevedení transformácie zvyčajne zavádzame novú súradnicovú sústavu, ktorá má pôvodnú (spravidla kladnú) orientáciu. Nové súradnice bodu (x',y') sú súradnice vzhľadom na túto novú sústavu. Avšak treba mať na pamäti, že orientácia objektov v rovine (napr. trojuholníkov) sa zmenila.

Nakoniec *skosenie* v smere x je transformácia, ktorá zachováva y-súradnicu bodu, a x-súradnica sa modifikuje lineárne v závislosti od vzdialenosti od x-osi. Zodpovedajúca matica je

$$\begin{pmatrix} 1 & s_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podobne máme skosenie v smere osi y popísané maticou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vo všeobecnosti, každá afinná transformácia roviny sa dá zapísať pomocou 3×3 matice, ktorá má 6 stupňov voľnosti:

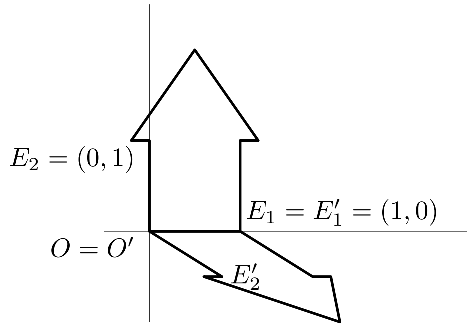
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{10} \\ c_{21} & c_{22} & c_{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Táto matica je regulárna, keďže jej ľavá horná 2×2 podmatica je regulárna. Opačná transformácia je potom popísaná maticou inverznou k 3×3 matici v rovnici (1).

Tvrdenie 1.2. *Afinná transformácia $\mathbb{R}^2$ je určená obrazmi troch nekolineárnych bodov.*

Teda ak chceme nájsť maticu nešpecifickej afinnej transformácie (čiže nejde o jednoduchú kombináciu posunutí, rotácií a podobne), môžme postupovať aj tak, že si zvolíme tri nekolineárne body a popíšeme ich obrazy. Potom je už možné dopočítať všetky potrebné konštanty c_{ij}.

Príklad 1.3. Nájdime rovnice afinnej transformácie, ktorá domček na obrázku zobrazí na jeho tieň.



Obr. 2. Afinná transformácia

Riešenie. Body O a E_1 necháva transformácia pevné, bod E_2 sa zobrazí na E_2' so súradnicami $(0.8, -0.5)$. Bod O a jeho obraz nám dávajú lineárne podmienky na konštanty c_{ij}:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{10} \\ c_{21} & c_{22} & c_{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a teda dostávame $c_{10} = c_{20} = 0$. Podobne si do (1) dosadíme súradnice bodu E_1 a jeho obrazu E_1' a zistíme, že $c_{11} = 1$ a $c_{21} = 0$. Napokon zo súradníc bodu E_2 a jeho obrazu E_3 máme, že $c_{12} = 0.8$ a $c_{22} = -0.5$. Výsledná matica hľadaného zobrazenia je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Dôležitou podmaticou matice v (1) je ľavá horná 2×2 podmatica

$$A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Z definície už máme, že $\det A \neq 0$. Pre túto maticu ďalej platí

Tvrdenie 1.4. *Afinná transformácia (1) mení orientáciu roviny práve vtedy, keď* $\det A < 0$.

Tvrdenie 1.5. *Afinná transformácia (1) je euklidovská (zachováva vzdialenosti) práve vtedy, keď $AA^T = I_2$.*

2. Transformácie v $\mathbb{R}^3$

Podobne ako v rovine máme afinnú transformáciu $\mathbb{R}^3$ popísanú lineárnymi rovnicami

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{10} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{20} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{30} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tvrdenie 2.1. *Afinná transformácia $\mathbb{R}^3$ je úplne určená obrazmi štyroch nekoplanárnych bodov.*

Keď si znovu 3×3 podmaticu $(c_{ij})_{i,j=1}^3$ označíme ako A, môžme popísať podobné vlastnosti ako pri transformáciách roviny:

Tvrdenie 2.2. *Afinná transformácia (2) je euklidovská (zachováva vzdialenosti) práve vtedy, keď* $AA^T = I_3$.

Tvrdenie 2.3. *Afinná transformácia (2) mení orientáciu priestoru práve vtedy, keď* $\det A < 0$.

Pre nás kladne orientovaný priestor (kladne orientovaná súradnicová sústava) je určený pravidlom pravej ruky: prsty (okrem palca) naznačujú smer otočenia od x-osi k y-osi a palec potom ukazuje smer osi z. Hovoríme tiež o pravotočivej orientácii. V opačnom prípade hovoríme o ľavotočivej alebo zápornej orientácii.

Posunutie a *škálovanie* v priestore je popísané analogickým spôsobom ako v rovine a nemalo by spôsobovať žiadne ťažkosti. Základné *zrkadlenia* máme v priestore tri, vždy podľa jednej zo súradnicových rovín a tiež by nemalo byť problematické napísať maticu žiadneho z nich.

Afinných transformácií *skosenia* máme v priestore 6 základných druhov. Pri každom si určíme, ktorá zo súradnicových rovín bude pevná vzhľadom na transformáciu, a tiež v smere ktorej osi sa bude skosenie prevádzať. Napríklad, skosenie v smere y-osi s pevnou yz-rovinou je popísané maticou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pod *otáčaním* v priestore sa myslí otáčanie okolo zvolenej osi. Navyše os rotácie chápeme ako orientovanú priamku. Vtedy v pravotočivej súradnicovej sústave určíme smer otáčania zase podľa pravidla pravej ruky: nech palec ukazuje orientáciu osi rotácie, potom ostatné prsty naznačujú smer rotácie. Špeciálne v prípade rotácií okolo súradnicových osí si toto pravidlo môžme interpretovať nasledovne: pri rotácii okolo z-osi sa otáča v smere od x-osi ku y, pri rotácii okolo x-osi sa otáča v smere od y-osi ku z a napokon pri rotácii okolo y-osi sa otáča v smere od z-osi ku x.

Uveďme si teraz rovnice otáčania okolo osi z o uhol α. Ak sa obmedzíme iba na xy-rovinu prípadne ktorúkoľvek inú rovinu s ňou rovnobežnú, ide vlastne o otáčanie v rovine okolo počiatku $(0, 0)$. Teda máme rovnice

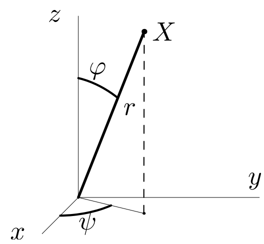
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Otáčanie okolo zvyšných dvoch osí osí dostaneme cyklickou zámenou súradníc $x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z \rightsquigarrow x$. Napríklad matica rotácie okolo osi x je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Skúsme teraz nájsť maticu rotácie okolo ľubovoľnej osi, ktorá nech zatiaľ prechádza začiatkom súradníc. Podobne ako pri transformáciách roviny sa pokúsime previesť úlohu na známy prípad. Skúsime najprv aplikovať na scénu známe otočenia tak, aby os rotácie splynula s niektorou z osí.

Keďže podľa predpokladu os rotácie prechádza bodom $(0, 0, 0)$, je os jednoznačne určená ďalším svojím bodom $X = (x, y, z)$. Nech tento bod (presnejšie polohový vektor tohoto bodu) určuje aj orientáciu osi. Nájdeme si najprv sférické súradnice r, φ, ψ bodu X. Máme vzťah medzi



Obr. 3. Sférické súradnice bodu

sférickými a kartézskymi súradnicami:

$$x' = r\sin\varphi\cos\psi$$
$$y' = r\sin\varphi\sin\psi$$
$$z' = r\cos\varphi.$$

Potom otáčanie okolo osi OX o uhol α môžme zložiť napríklad z nasledovných transformácií:

(1) otočenie o uhol $-\psi$ okolo osi z (os rotácie sa dostane do roviny xy),
(2) otočenie o uhol $-\varphi$ okolo osi y (os rotácie splynie s osou z),
(3) otočenie o uhol α okolo osi z,
(4) otočenie o uhol φ okolo osi y,
(5) otočenie o uhol ψ okolo osi z,

Nakoniec, nech osou rotácie je ľubovoľná orientovaná priamka. Túto úlohu zase zredukujeme na postupnosť už známych transformácií tak, že posunieme os rotácie, aby prechádzala počiatkom súradníc. Nech P je bod ležiaci na osi otáčania. Potrebné transformácie sú

(1) posunutie o $O - P$,
(2) otočenie o uhol α okolo osi, ktorá prechádza bodom $O = (0, 0, 0)$,
(3) posunutie o $P - O$.

3. Otáčanie v priestore pomocou kvaterniónov

Množina kvaterniónov je množina $\mathbb{H}$ prvkov tvaru

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k, \quad c_i \in \mathbb{R},$$

kde i, j, k nazývame *imaginárnymi jednotkami*. Každý kvaternión vieme vynásobiť reálnym číslom r:

$$r(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) = rq_0 + rq_1 i + rq_2 j + rq_3 k.$$

Ďalej na tejto množine definujeme operácie sčítavania a násobenia. Sčítavanie je prevádzané po zložkách:

$$(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) + (q_0' + q_1' i + q_2' j + q_3' k) = (q_0 + q_0') + (q_1 + q_1')i + (q_2 + q_2')j + (q_3 + q_3')k.$$

Vidíme tak, že $\mathbb{H}$ je štvorrozmerný vektorový priestor nad $\mathbb{R}$. Násobenie kvaterniónov bude definované súčinmi imaginárnych jednotiek. Zadefinujeme si

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Dá sa overiť (napríklad preverením na všetkých trojiciach imaginárnych jednotiek), že toto násobenie je asociatívne. Násobenie kvaterniónov ale nie je komutatívne! Jednotkovým prvkom (neutrálnym vzhľadom na násobenie) je 1 ($= 1 + 0i + 0j + 0k$). Napokon pre každý kvaternión $q \neq 0$ existuje inverzný prvok $q^{-1} \in \mathbb{H}$, takže platí $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$. Ak si nevšímame operáciu násobenia reálnym číslom, tak jediná vlastnosť, ktorou sa $\mathbb{H}$ líši od poľa, je práve spomenutá nekomutatívnosť násobenia.

Pod *dĺžkou kvaterniónu* $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ rozumieme reálne číslo

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}.$$

Pri kvaternióne $q \in \mathbb{H}$, $q = s + v_1 i + v_2 j + v_3 k$, $s, v_i \in \mathbb{R}$ budeme hovoriť, že s je jeho *skalárna* a $\mathbf{v} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ jeho *vektorová zložka.* Píšeme aj $q = s + \mathbf{v}$, prípadne skrátene $q = (s, \mathbf{v})$. Ak skalárna zložka s je nulová, hovoríme, že q je *rýdzoimaginárny* kvaternión.

Každý bod priestoru $\mathbb{R}^3$ „zakódujeme" do kvaterniónu tak, že bod P so súradnicami (p_1, p_2, p_3) bude reprezentovaný kvaterniónom $q_P = p_1 i + p_2 j + p_3 k$. Máme teda zobrazenie $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}$. Ide o bijektívne zobrazenie medzi $\mathbb{R}^3$ a všetkými rýdzoimaginárnymi kvaterniónmi: ku každému kvaterniónu s nulovou skalárnou zložkou vieme nájsť presne jeden bod v $\mathbb{R}^3$, ktorý je týmto kvaterniónom reprezentovaný.

Taktiež si zavedieme bijektívne zobrazenie medzi všetkými rotáciami okolo ľubovoľnej osi prechádzajúcej bodom $(0, 0, 0)$ a všetkými kvaterniónmi s dĺžkou 1. Nech (u_1, u_2, u_3) je jednotkový vektor určujúci os rotácie a nech α je uhol otáčania. Túto transformáciu potom reprezentujeme kvaterniónom

$$q_{\mathbf{u},\alpha} = \cos\frac{\alpha}{2} + (\sin\frac{\alpha}{2})(u_1 i + u_2 j + u_3 k).$$

Naozaj, ku každému kvaterniónu s jednotkovou dĺžkou existuje presne jeden uhol α a v prípade, že $\alpha \neq 0$, aj jediný jednotkový vektor $\mathbf{u}$ tak, že príslušná rotácia je reprezentovaná daným kvaterniónom.

Veta 3.1. *Bod $P \in \mathbb{R}^3$ (reprezentovaný kvaterniónom q_P) sa otočením okolo osi určenej počiatkom súradníc a jednotkovým vektorom $\mathbf{u}$ zobrazí na bod reprezentovaný kvaterniónom*

$$q_{\mathbf{u},\alpha} q_P q_{\mathbf{u},\alpha}^{-1}.$$

Násobenie vo vete si prepíšeme tak, že budeme používať len známe násobenia vektorov: skalárny súčin, vektorový súčin a násobenie vektora skalárom. Nech q, q' sú rýdzoimaginárne kvaternióny, čiže $q = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ a podobne $q' = q'_1 i + q'_2 j + q'_3 k$. Vtedy tieto kvaternióny môžme chápať aj ako vektory v $\mathbb{R}^3$ so súradnicami (q_1, q_2, q_3) resp. (q'_1, q'_2, q'_3). Pre skalárny súčin vektorov budeme používať symbol $\langle \cdot, \cdot \rangle$, pre vektorový zas štandardne $\times$, čiže

$$\begin{aligned} \langle q, q' \rangle &= q_1 q'_1 + q_2 q'_2 + q_3 q'_3, \\ q \times q' &= (q_2 q'_3 - q_3 q'_2, q_3 q'_1 - q_1 q'_3, q_1 q'_2 - q_2 q'_1). \end{aligned}$$

Zápisom qq' pre $q, q' \in \mathbb{H}$ rozumieme stále asociatívne násobenie kvaterniónov.

Nasledujúce vlastnosti sa ukážu jednoducho rozpísaním súradníc:

Lema 3.2. *Ak $|q| = 1$ a $q = s + \mathbf{v}$ (s je skalárna, $\mathbf{v}$ je vektorová zložka), potom $q^{-1} = s - \mathbf{v}$.*

Lema 3.3. *Ak q, q' sú rýdzoimaginárne kvaternióny, potom*

$$qq' = -\langle q, q' \rangle + q \times q'.$$

Takže máme

$$q_{\mathbf{u},\alpha} q_P q_{\mathbf{u},\alpha}^{-1} = (s + \mathbf{v}) q_P (s - \mathbf{v}) = \cdots = s^2 q_P + 2s\mathbf{v} \times q_P + \langle q_P, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times q_P).$$

Výhodou použitia kvaterniónov pre rotácie v $\mathbb{R}^3$ je, že sa vyhneme pomalým výpočtom hodnôt trigonometrických funkcií. Namiesto nich sa používajú operácie násobenia vektorov, ktoré často bývajú efektívne implementované.

KAGDM FMFI UK Bratislava
Email address: jana.pilnikova@fmph.uniba.sk