

Od zobrazovacej rovnice ku Radiosite

V tomto texte vysvetlíme prechod od všeobecnej zobrazovacej rovnice (Rendering Equation) ku sústave rovníc pre metódu Radiosity (Radiosity Equation), pričom sa využíva predpoklad ideálne difúzných (Lambertovských) povrchov.

Cielom tohto odvodenia je zjednodušiť všeobecnú zobrazovaciu rovnicu pre prípad, kedy sa scéna skladá výlučne z ideálne difúzných povrchov. Výsledkom bude sústava lineárnych rovníc, ktorú vieme vyriešiť algoritmicky.

1 Zobrazovacia rovnica v plošnej formulácii

Začíname so zobrazovacou rovnicou vyjadrenou integrálom cez plochy povrchov v scéne (namiesto priestorového uhla). Pre bod x , prichádzajúci smer $\omega_i : x \rightarrow y \equiv (y - x)$ a smer odchádzajúceho lúča $\omega_o : x \rightarrow z \equiv (z - x)$ platí:

$$L(x, x \rightarrow z) = L_e(x, x \rightarrow z) + \int_S L(y, y \rightarrow x) \cdot f_r(x, (y - x) \rightarrow (z - x)) \cdot G(x, y) \cdot V(x, y) dA_y,$$

kde:

- $L(x, x \rightarrow z)$ je celková **radiancia** odchádzajúca z bodu x v smere ω_o .
- $L_e(x, x \rightarrow z)$ je **emitovaná radiancia** (ak je povrch v bode x zdrojom svetla).
- S je množina všetkých plôch v scéne. Integrujeme cez body y na týchto plochách.
- $L(y, y \rightarrow x)$ je radiancia prichádzajúca z bodu y do bodu x .
- $f_r(x, \cdot)$ je **BRDF**, ktoré určuje, ako sa svetlo odráža.
- $G(x, y)$ je **geometrický člen** (obsahuje kosínusy uhlov normál a vzdialenosť medzi x a y).
- $V(x, y)$ je funkcia **viditeľnosti** (1 ak na seba body x a y „vidia“, inak 0).

2 Zavedenie predpokladu difúzneho povrchu

Pre metódu Radiosity predpokladáme, že všetky povrchy sú **ideálne difúzne (Lambertovské)**. To prináša zásadné zjednodušenia:

1. **Odrazivosť nezávisí od smeru:** BRDF je konštanta úmerná albedu (difúznej odrazivosti) $\rho(x)$. Z definície odrazivosti platí:

$$f_r(x, \cdot) = \frac{\rho(x)}{\pi}$$

2. **Radiancia nezávisí od smeru:** Pre difúzny povrch je odchádzajúca radiancia do všetkých smerov rovnaká. Môžeme vynechať parameter smeru ω_o : $L(x, x \rightarrow z) = L(x)$.

3. **Vzťah medzi Radiositou a Radianciou:** Radiosita $B(x)$ (*radiant exitance*) je celkové množstvo energie vyžiarenej z plochy do celej pologule. Pre difúzny povrch platí jednoduchý vzťah:

$$B(x) = \int_{\Omega} L(x) \cos \theta d\omega = L(x) \cdot \pi \implies L(x) = \frac{B(x)}{\pi}$$

Podobne to platí pre **emitovanú** radiositu (v poznámkach označenú ako $E(x)$):

$$E(x) = L_e(x) \cdot \pi \implies L_e(x) = \frac{E(x)}{\pi}$$

3 Dosadenie do zobrazovacej rovnice a úprava

Dosadíme získané členy $L(x) = \frac{B(x)}{\pi}$, $L_e(x) = \frac{E(x)}{\pi}$, $f_r(x, \cdot) = \frac{\rho(x)}{\pi}$ do pôvodnej zobrazovacej rovnice:

$$\frac{B(x)}{\pi} = \frac{E(x)}{\pi} + \int_S \frac{B(y)}{\pi} \cdot \frac{\rho(x)}{\pi} \cdot G(x, y) \cdot V(x, y) dA_y$$

Všimnite si, že $\rho(x)$ nezávisí od premennej integrálu y , preto ho môžeme dať pred integrál. Teraz celú rovnicu **vynásobíme hodnotou** π , čím sa zbavíme menovateľov na oboch stranách:

$$B(x) = E(x) + \rho(x) \int_S B(y) \cdot \frac{G(x, y) \cdot V(x, y)}{\pi} dA_y$$

Takto sme získali spojitú integrálnu rovnicu s neznámou funkciou $B(x)$ pre Radiositu.

4 Diskretizácia (rozdelenie na plôšky)

Aby sme vedeli rovnicu vyriešiť, musíme spojitú plochu scény rozdeliť na konečný počet menších elementov (plôšok) $A_1, A_2, \dots, A_n$. Predpokladáme, že na každej plôške A_j je **radiosita** $B_j(y)$ **konštantná**.

Integrál cez celú scénu S nahradíme sumou integrálov cez jednotlivé plôšky A_j :

$$B(x) = E(x) + \rho(x) \sum_{j=1}^n \int_{A_j} B_j(y) \cdot \frac{G(x, y) \cdot V(x, y)}{\pi} dA_{j,y}$$

Kedže $B_j(y)$ je na ploche A_j konštanta, môžeme ju vyňať pred integrál:

$$B(x) = E(x) + \rho(x) \sum_{j=1}^n B_j(y) \int_{A_j} \frac{G(x, y) \cdot V(x, y)}{\pi} dA_{j,y}.$$

5 Výpočet priemernej radiosity pre plôšku A_i

Ak teraz obe strany rovnice zintegrujeme cez plôšku $dA_{i,x}$ a predelíme ju obsahom $|A_i|$ dostaneme:

$$\frac{1}{|A_i|} \int_{A_i} B(x) dA_{i,x} = \frac{1}{|A_i|} \int_{A_i} E(x) dA_{i,x} + \frac{1}{|A_i|} \int_{A_i} \left[\rho(x) \sum_{j=1}^n B_j(y) \int_{A_j} \frac{G(x, y) \cdot V(x, y)}{\pi} dA_{j,y} \right] dA_{i,x}$$

Zavedieme označenia pre priemerné hodnoty na plôške $A_{i,x}$:

- **Priemerná radiosita:** $B_i = \frac{1}{|A_i|} \int_{A_i} B(x) dA_{i,x}$

- **Priemerná emitovaná radiosita:** $E_i = \frac{1}{|A_i|} \int_{A_i} E(x) dA_{i,x}$

Taktiež predpokladáme, že **odrazivosť** $\rho(x)$ **je na ploche** A_i **konštantná** (označíme ju ρ_i), a preto ju spolu so sumou môžeme vytiahnuť pred vonkajší integrál. Dostávame:

$$B_i = E_i + \rho_i \sum_{j=1}^n B_j \left[\frac{1}{|A_i|} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{G(x,y) \cdot V(x,y)}{\pi} dA_{j,y} dA_{i,x} \right].$$

6 Form factor (konfiguračný faktor) a výsledná sústava

Dvojitý integrál v hranatej zátvorke závisí čisto od geometrie scény (tvar, vzájomná poloha a viditeľnosť plôšok A_i a A_j). Tento člen sa nazýva **Form factor** (v slovenčine aj konfiguračný alebo tvarový faktor) a označuje sa F_{ij} .

$$F_{ij} = \frac{1}{|A_i|} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{G(x,y) \cdot V(x,y)}{\pi} dA_{j,y} dA_{i,x}.$$

Po nahradení tohto integrálu symbolom F_{ij} dostávame finálnu rovnicu:

$$B_i = E_i + \rho_i \sum_{j=1}^n B_j \cdot F_{ij} \quad \text{pre } i = 1, \dots, n.$$

V tomto označení člen $B_j F_{ij}$ predstavuje príspevok plôšky A_j k radiosite plôšky A_i . Z tvaru sústavy teda vidíme, že koeficient F_{ij} v našom zápise zodpovedá prenosu energie z A_j na A_i .

Táto rovnica platí pre každú jednu plôšku v scéne. Výsledkom je teda **sústava n lineárnych rovníc o n neznámych** (neznámymi sú radiosity $B_1, B_2, \dots, B_n$). Vyriešením tejto maticovej sústavy získame osvetlenie celej scény včítane viacnásobných odrazov svetla.