

B.6 Generovanie kvázi-náhodných čísel

Niektoré praktické aplikácie (ekonomické, fyzikálne) vyžadujú generovanie vzoriek, ktoré sú len málo odlišné (low discrepancy sequences, ďalej LD postupnosti)². V tých prípadoch je vhodné nahradiť generovanie množiny pseudo-náhodných čísel množinou kvázi-náhodných čísel³. V skutočnosti sú postupnosti kvázi-náhodných čísel úplne deterministické, čiže ich obľúbený názov je zavádzajúci. Používanie generátora kvázi-náhodných čísel môže viesť k zvýšeniu výkonnosti Monte Carlo simulácií v tom zmysle, že sa zníži čas a/alebo sa zvýši presnosť výpočtu. Podstatou algoritmov pre generovanie

-
- 1 Poznamenajme, že ak $F_{uniform}$ označuje distribučnú funkciu náhodnej premennej U , ktorá je rovnomerne rozložená na intervale $\langle 0, 1 \rangle$, dostaneme $F_{uniform} = u$
 - 2 Definíciu LD postupností nájdeme napr. v LEVY, G.: *An Introduction to quasi-random numbers*. Numerical Algorithms Group Ltd. http://www.nag.com/IndustryArticles/Introduction_to_quasi_random_numbers.pdf
 - 3 <http://www.puc-rio.br/marco.ind/quasi-Monte> Carlo Simulation

kvázi-náhodných čísel je jednorozmerná kvázi-náhodná van der Corputova postupnosť¹.

B.7 Van der Corputova kvázi-náhodná jedno-rozmerná postupnosť

Majme dané prvočíslo $b, b \geq 2$. Ľubovoľné celé číslo n vieme zapísať v báze b . Číslo

$\frac{1}{n}$ z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ zapíšeme v báze b nasledujúcim algoritmom:

1. číslo n vyjadríme v báze b :

$$n = \sum_{j=0}^m a_j(n) \cdot b^j. \quad (\text{B.19})$$

Napríklad nech $n=4$ a $b=2$. Číslo 4 zapísané v dvojkovej báze je 100 ($4 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$).

2. Číslo n vyjadrené v báze b zapíšeme zrkadlovo. V našom príklade dostaneme 001.
3. K zrkadlovo zapísanému číslu v báze b priradíme desatinné číslo v desiatkovej báze:

$$b(n)_{\text{van der Corput base}} = \Phi_b(n) = \sum_{j=0}^m a_j(n) \cdot b^{-j-1} \quad (\text{B.20})$$

Číslu 0,001 v dvojkovej báze zodpovedá desatinné číslo $\frac{1}{8} = 0,125 (= 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3})$.

V (B.19) a v (B.20) je m najmenšie také celé číslo, pre ktoré $a_j(n) = 0$ pre všetky $j > m$.

Van der Corputova postupnosť je cyklickou postupnosťou, rôzne bázy majú rôznu dĺžku cyklu, ktorá rastie s veľkosťou b . Táto postupnosť sa stala základom rôznych viacrozmerných LD postupností. Vo finančných aplikáciách sa s úspechom používa Sobolova² a Faurova³ postupnosť kvázi-náhodných čísel. Ich hlavný princíp uvádzame v nasledujúcej podkapitole.

B.8 Sobolove a Faurove kvázi-náhodné postupnosti

Proces generovania viacrozmerných LD postupností pozostáva z rozdeľovania jednotkovej hyperkocky do pod-kvádrov s konštantným objemom, ktorých steny sú rovnobežné so stenami pôvodnej kocky, pričom sa využíva van der Corputova postupnosť.

1 VAN DER CORPUT, J. G.: *Vertielungsfunktionen I & II*, Neder., Akad. Wetensch. Proc., Volume 38, 1935, str. 813-820, 1056-1066
2 SOBOL, I.M.: *The distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals*. USSR Comp. Math. Math. Phys. 7, 4, 1967. str. 86-112.
3 FAURE, H.: *Discrepance de suites associees a un systeme de numeration (en dimension s)*. Acta Arith. 41, 1982, str. 337-351

Van der Corputova postupnosť dáva pre rovnaké bázy rovnaké postupnosti čísel a preto je nutné získané postupnosti preusporiadať. Jednotlivé metódy pre generovanie viacrozmerných LD postupností sa líšia v tom, akú použijú bázičku hodnotu pre každý rozmer a spôsobom akým preusporiadávajú získané postupnosti čísel.

Faure použil pre vygenerovanie d -rozmernej LD postupnosti ($d > 1$) jednu hodnotu bázy b pre všetky jej rozmery. Hodnotu bázy b položil rovnú takému najmenšiemu prvočíslu, ktoré je väčšie d , čiže ako požadovaný rozmer postupnosti¹. Poznamenajme, že so zvyšovaním hodnoty bázy b sa predlžujú cykly vo vygenerovaných postupnostiach, a tým sa zvyšuje časová náročnosť výpočtu. Faure upravil van der Corputov algoritmus z podkapitoly B.7 tak, že skôr ako vyčíslí vzťah B.20 v treťom kroku, čísla a_j preusporiada na základe rekurentného vzťahu:

$$a_i^d(n) = \sum_{j \geq i}^m \frac{j!}{i!(j-i)!} a_j^{d-1}(n) \mod b, \quad (\text{B.21})$$

pričom začiatočné d v tomto rekurentnom vzťahu má hodnotu 2 atď.

Sobol použil rovnakú bázu pre všetky dimenzie d -rozmernej LD postupnosti a vygenerované hodnoty preusporiadava rovnako ako Faure. Výpočet Sobolovej postupnosti je však jednoduchší a teda aj rýchlejší pretože, položil bázu rovnú dvom. Sobolove preusporiadavanie je komplexnejšie v tom zmysle, že používa množinu tzv. „direction numbers“ $\{v_i\}$ danú vzťahom²:

$$v_i = \frac{m_i}{2^i}, \quad (\text{B.22})$$

kde m_i sú nepárne kladné celé čísla menšie ako 2^i a v_i sú koeficienty ireducibilných primitívnych polynómov celočíselne vydelených dvoma.

V praktickej časti predkladanej práce ukážeme rozdiely v generovaní rizikových faktorov ak ich generujeme pomocou pseudonáhodných čísel, pomocou Faurovych kvázi-náhodných čísel a nakoniec pomocou Sobolovych kvázi-náhodných čísel.