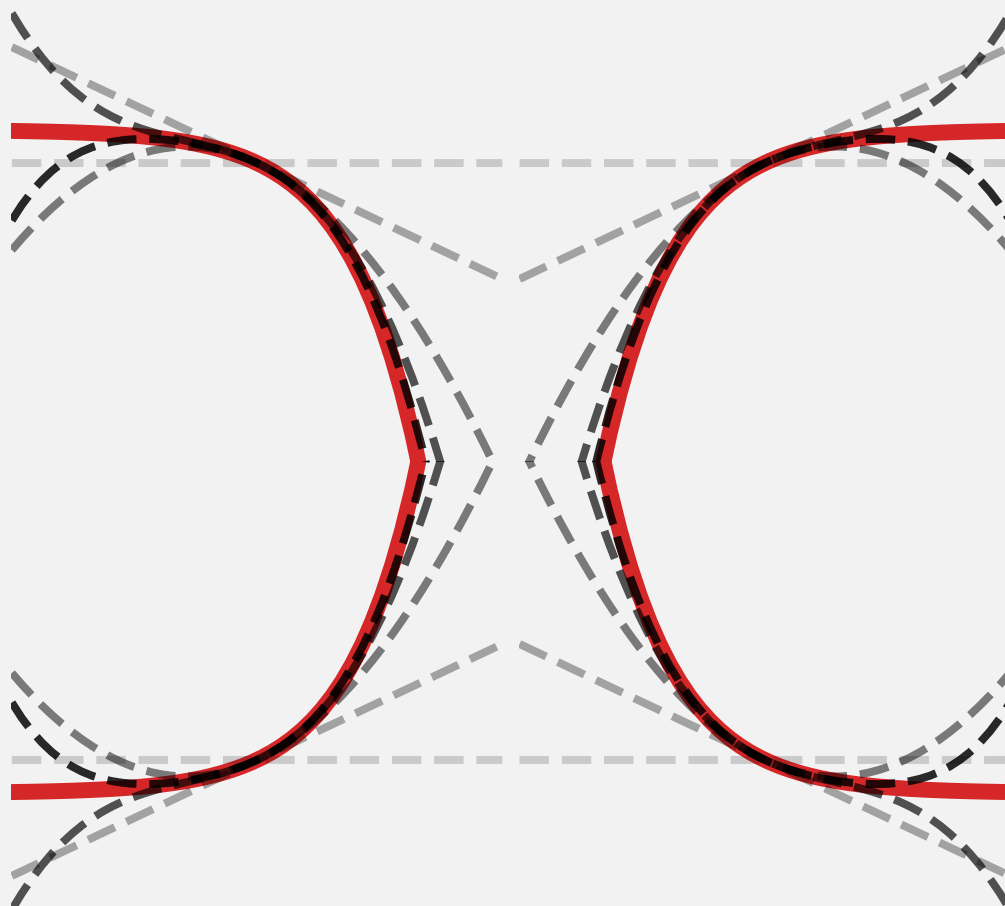


Matematika nielen pre manažérov



Mária Bohdalová
Róbert Bohdal



UNIVERZITA
KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE

Katedra kvantitatívnych metód, Fakulta managementu

Katedra algebry a geometrie, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Matematika nielen pre manažérov

Vysokoškolská učebnica

Mária Bohdalová

Róbert Bohdal



UNIVERZITA
KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE

Bratislava, 2022

© Autori:

doc. RNDr. Mária Bohdalová, PhD.

Fakulta managementu Univerzity Komenského v Bratislave

Katedra kvantitatívnych metód

RNDr. Róbert Bohdal, PhD.

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave

Katedra algebry a geometrie

2022

Recenzenti:

doc. Ing. Tomáš Bacigál, PhD.

doc. RNDr. Dana Országhová, CSc.

Návrh obálky: Martin Bohdal, Róbert Bohdal

Sadzba: Róbert Bohdal

Technická spolupráca: Ondrej Bohdal

Za jazykovú úpravu, terminologickú a štylistickú stránku textu zodpovedajú autori.

Rozsah 132 strán, vydanie prvé, vyšlo ako elektronická publikácia.



Dielo je vydané pod medzinárodnou licenciou Creative Commons

CC BY-NC-ND 4.0. Viac informácií o licencií a použití diela:

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.sk>

Vydala Univerzita Komenského v Bratislave

ISBN 978-80-223-5392-2

Obsah

Úvod	5
1 Lineárna algebra	7
1.1 Vektory	7
1.1.1 Porovnanie vektorov	10
1.1.2 Špeciálne vektory	11
1.1.3 Operácie s vektormi	11
1.1.4 Lineárna kombinácia vektorov	17
1.1.5 Vektorový priestor	22
1.2 Matice	24
1.2.1 Špeciálne typy matíc	24
1.2.2 Hodnota matice	25
1.2.3 Základné operácie s maticami	26
1.2.4 Inverzná matica	31
1.3 Determinanty matice	33
1.3.1 Výpočet inverznej matice pomocou determinantov	37
1.4 Systavy lineárnych rovníc	38
1.4.1 Maticový prístup riešenia sústavy lineárnych rovníc	39
1.4.2 Metódy riešenia sústavy lineárnych rovníc	41
1.4.3 Gaussova eliminačná metóda	41
1.4.4 Jordanova metóda	43
1.4.5 Maticové rovnice	48
1.5 Vlastné vektory a vlastné čísla	54
1.6 Definitnosť matíc	58
2 Matematická analýza	61
2.1 Reálna funkcia jednej reálnej premennej	61
2.2 Vlastnosti funkcií	65
2.3 Operácie s funkciami	70
2.4 Polynomicke a racionálne funkcie jednej reálnej premennej	75
2.5 Spojitosť funkcie	81
2.6 Limita funkcie	83
2.7 Derivácia funkcie jednej reálnej premennej	90
2.8 L'Hospitalovo pravidlo	94

2.9	Diferenciál funkcie	97
2.10	Využitie derivácie v ekonómii	98
2.11	Taylorov rozvoj funkcie $f(x)$ v okolí bodu x_0	100
2.12	Asymptoty grafu funkcie	101
2.13	Derivácia funkcie a vlastnosti funkcií	103
2.13.1	Využitie 1. derivácie pri určovaní vlastností funkcií	103
2.13.2	Využitie 2. derivácie pri určovaní vlastností funkcií	105
2.14	Extrémy funkcie jednej reálnej premennej	106
2.15	Inflexné body funkcie jednej reálnej premennej	111
2.16	Primitívna funkcia a neurčitý integrál	113
2.17	Určitý integrál	118

Bibliografia

131

Zoznam obrázkov

1.1	Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, určený bodmi P_1 a P_2	9
1.2	Systém vektorov v $\mathbb{R}^2$	10
1.3	Súradnicový systém v $\mathbb{R}^3$ s počiatkom v bode P	10
1.4	Súčet vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ v $\mathbb{R}^2$	12
1.5	Násobenie vektora $\mathbf{a}$ skalárom $k \in \mathbb{R}$	12
1.6	Súčet a rozdiel vektorov $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ v $\mathbb{R}^2$	13
1.7	Dĺžka vektora $\mathbf{v}$ v $\mathbb{R}^2$	15
1.8	Lineárna kombinácia vektorov $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$	18
1.9	Grafické znázornenie násobenia matic	27
1.10	Výpočet determinantov pomocou krížového a Sarrusovho pravidla	34
2.1	Definičný obor a obor hodnôt funkcie	62
2.2	Graf funkcií zadaných tabuľkou, predpisom	62
2.3	Príklad prostej a neprostej funkcie	64
2.4	Príklad inverznej funkcie $y = \sin^{-1}(x)$ k funkcii $y = \sin(x)$	65
2.5	Monotónnosť funkcie	66
2.6	Ohraničenosť funkcie	68
2.7	Párnosť, nepárnosť funkcie	69
2.8	Periodické funkcie	70
2.9	Konvexná funkcia	71
2.10	Operácie s funkciami	72
2.11	Graf funkcie k príkladu 2.6	75
2.12	Konštantná funkcia	76

2.13	Priamka s kladnou smernicou	76
2.14	Kvadratické funkcie	77
2.15	Výpočet vrcholu paraboly	78
2.16	Kubické funkcie	80
2.17	Funkcia $f(x)$ je spojitá v bode a	82
2.18	Funkcia $f(x)$ je nespojitá v bode a	82
2.19	Limita funkcie $f(x)$ v bode a	84
2.20	Funkcia nemá limitu v bode 1	86
2.21	Ilustrácia definície derivácie funkcie $f(x)$ v bode x_0	90
2.22	Ilustrácia diferenciálu funkcie	98
2.23	Graf funkcie $f(x) = \frac{2x^2-5x-1}{2-x}$ s asymptotou bez smernice	102
2.24	Graf funkcie $f(x) = \frac{2x^2-5x-1}{2-x}$ s asymptotou so smernicou	103
2.25	Príklad funkcie s rôznymi druhmi extrémov	106
2.26	Lokálne extrémy funkcie $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln^2(3x)$	108
2.27	Graf funkcie $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 4$	112
2.28	Dolné a horné integrálne súčty	120
2.29	Výpočet obsahu plochy pomocou určitého integrálu	122
2.30	Určitý integrál funkcie $y = \cos x$	123
2.31	Určitý integrál funkcie $y = x^2$	124
2.32	Určitý integrál funkcie $y = \sqrt{x}$	127
2.33	Určitý integrál funkcie $f(x) = \ln x$	128
2.34	Obsah plochy medzi grafmi funkcií $f(x) = 3 - x^2$ a $g(x) = 1 + x^2$	129

Zoznam tabuliek

1.1	Požadované množstvo tovaru a ceny v obchodoch	29
1.2	Požiadavky na suroviny pre medziprodukty	30
1.3	Požiadavky na medziprodukt pre finálne výrobky	30
2.1	Vybrané hodnoty funkcie $\sqrt{x}$	63
2.2	Vybrané hodnoty funkcie $\frac{x}{3}$	63

Úvod do štúdia matematiky

Matematika zohrávala a zohráva významnú úlohu v ľudskom bytí a jej štúdium môže byť veľmi obohacujúce. Je obzvlášť uspokojujúce riešiť problém, ak vieme, že sa dá riešiť. Na rozdiel od mnohých ďalších predmetov, ktoré štúdium manažmentu zahŕňa, matematika vždy dá správnu odpoveď na problémy, ktoré sa dajú matematicky sformulovať. Spoločenské vedy vedú k debate a diskusii o problémoch a tým nútia premýšľať, chrániť a prípadne meniť pozície. Bolo by chybné myslieť si, že matematika je veľmi suchá a mechanická. Z istého pohľadu je matematika skôr umenie ako veda. Hoci môže existovať len jedna správna odpoveď, existuje niekoľko rôznych spôsobov ako získať tieto odpovede, pričom niektoré spôsoby (cesty k nájdeniu odpovedi) môžu byť zložitejšie ako ostatné. Všeobecne platí, že matematik chce nájsť najjednoduchšie možné riešenie daného problému, avšak to neznamená, že akékoľvek iné riešenie je zlé.

Ak máme riešiť matematickú úlohu, musíme najprv zistiť, čoho sa daná úloha týka, ktorá metóda je vhodná pre jej riešenie. Výber vhodnej metódy zahŕňa istý stupeň kreativity na pokročilej úrovni. Musíme si uvedomiť, že možno len ťažko očakávať, že keď sa pozrieme na ľubovoľný matematický problém, budeme ho vedieť ihneď riešiť pomocou jednoduchého a výstižného riešenia. Samozrejme existujú niektoré problémy takého typu (napríklad: spočítajte $1 + 1$). Pre rôzne typy problémov by sme sa nemali báť skúšať rôzne techniky, z ktorých niektoré môžu aj zlyhať. V tomto zmysle, keď riešime matematické úlohy, je možné, že použijeme určité množstvo pokusov a omylov, kým daný problém vyriešime. V podstate vyriešenie úlohy potrebuje čas na nájdenie správnej odpovede. Zo zrejmých dôvodov, učitelia, lektori a učebnice zriedka ponúkajú túto predstavu, pretože uvedú riešenie či už na stránku alebo tabuľu, bez známok času a študentovi sa zdá, že netreba stráviť čas myslením, alebo analýzou slepých ciest, skôr ako nájdú správne riešenie. Správne riešenia sa hľadajú na hrbách papiera, na papieri si môžeme vyskúšať rôzne spôsoby riešenia. Nemusíme zostať frustrovaní, keď nie je možné okamžite vyriešiť problém. Občas sa bude treba aj s poradiť, ako daný problém riešiť. Keď budete študovať túto učebnicu budete si zhromažďovať rôzne skúsenosti, budete si rozvíjať cit pre výber vhodnej techniky, ktorá je pravdepodobne užitočná pre konkrétne problémy. Nemali by ste sa báť vyskúšať rôzne techniky, z ktorých niektoré nemusia fungovať, ak sa nepodari okamžite rozpoznať použitie vhodnej techniky.

Mnohým študentom sa zdá, že matematika je ťažká a pýtajú sa, prečo musia znášať bolesť a úzkosť

z učenia a porozumenia zložitých matematických pojmov a techník. Zrejme sa budete cítiť podobne, ale ak sa nevzdáte, buďte si istí, že všetky techniky, ktoré sa naučíte Vám budú užitočné pre riešenie rôznych aplikácií v ekonómii, manažmente, v mnohých ďalších vedných odboroch, či v reálnom živote. Niektoré z týchto aplikácií budú ilustrované v tejto učebnici. Predkladaná učebnica ilustruje diskusie vhodné pre riešenie problémov, s ktorými sa môžu manažéri vo svojej praxi stretnúť. Treba si uvedomiť, že pomocou matematiky sa stanú zvládnuteľnými problémy, ktoré sú ťažké či komplikované v ekonómii, v manažmente a v príbuzných odboroch.

Vela ľudí láka matematika svojim širokým využitím v praktických aplikáciach. Hlavným cieľom tejto učebnice je naučiť Vás používať matematický aparát pre štúdium ekonómie, manažmentu, účtovníctva, bankovníctva a ďalších príbuzných disciplín.

Predložená vysokoškolská učebnica je primárne určená študentom 1. ročníka Fakulty managementu Univerzity Komenského v Bratislave. Učebnica môže slúžiť aj študentom iných univerzít, pokrýva úvodný kurz pre štúdium matematiky na vysokých školách a pripravuje nielen na štúdium nadväzujúcich kurzov matematiky na vysokých školách ale aj na štúdium ekonómie, financií a pod.

Text učebnice je rozdelený do 2 základných kapitol – Lineárna algebra a Matematická analýza funkcie 1 reálnej premennej. Pri príprave učebnice autori čerpali z nasledujúcich zdrojov: (Anthony; Biggs, 2010), (Batíková et al., 2009), (Bauer et al., 2015), (Benko et al., 1984), (Bergin, 2015), (Bradley; Patton, 2002), (Chiang, 1984), (Harshbarger; Reynolds, 2019), (Heather; Stefanova, 2017), (Huřka et al., 1984), (Kaňka, 2010), (Klein, 2014), (Lovelock et al., 2007), (Országhová; Hornyák Gregáňová, 2020), (Renshaw, 2021), (Rektorys, 2009), (Rosen, 2019), (Ruud; Shell, 2003), (Blume; Simon, 1994), (Stewart, 2007), (Strang, 2005), (Sydsaeter et al., 2012), (Ummer, 2012), (Werner; Sotskov, 2006).

Lineárna algebra

V rámci kapitoly Lineárna algebra sa naučíme pochopiť nielen zápis a terminológiu maticovej algebry, ale sa naučíme aj ako:

1. sformulovať viacrozmerné ekonomické modely v maticovom/vektorovom tvare,
2. použiť základné operácie na maticiach (sčítanie matíc, odčítanie matíc, násobenie matice skalárom, násobenie matíc),
3. vypočítať determinanty, inverznú maticu či vyriešiť sústavu lineárnych rovníc pomocou Gaussovej eliminačnej metódy, Jordanovej metódy, Cramerovho pravidla alebo pomocou inverznej matice,
4. vyriešiť sústavy lineárnych rovníc v maticovom tvare, vyriešiť homogénne sústavy lineárnych rovníc a vypočítať vlastné čísla a vlastné vektory matice.

1.1 Vektory

Predpokladajme, že chceme analyzovať spotrebný kôš spotrebiteľa v mikroekonómii. Spotrebný kôš je reprezentovaný jednotlivými položkami a ich cenami za jednotkové množstvo. Uvažujme nasledujúci problém.

Problém *Analýza spotrebného koša:*

Predpokladajme, že sme zodpovední za prenájom automobilov, ktoré budú používať klienti našej spoločnosti. Týždenné ceny za prenájom pre päť rôznych veľkostí automobilov, ktoré ponúkame na prenájom, sú nasledovné:

- malé auto: 140 p.j. (peňažné jednotky),
- stredne veľké auto: 155 p.j.,
- veľké auto: 200 p.j.,

- 7-miestne auto pre prepravu osôb: 350 p.j.,
- luxusná limuzína: 425 p.j.

Predpokladajme, že máme k dispozícii dostatok automobilov jednotlivých typov. Ako manažér predaja, spracúvame objednávky na celý týždeň. Na nasledujúci týždeň máme objednávku pre nasledujúce typy áut a ich počet:

4 malé autá, 3 stredne veľké autá, 12 veľkých áut, dve 7-miestne autá na prepravu osôb a 1 luxusnú limuzínu.

Aký bude náš hrubý príjem za prenájom uvedených áut?

Riešenie:

Je zrejmé, že hrubý príjem bude odvodený z počtu prenajatých vozidiel jednotlivých typov a ich jednotkovej ceny:

$$4 \times 140 + 3 \times 155 + 12 \times 200 + 2 \times 350 + 1 \times 425 = 4900.$$

Hrubý príjem teda bude 4900 p.j.

V uvedenom probléme sú jednotlivé typy áut položky spotrebného koša, pre ktoré poznáme počet kusov určených na prenájom pre nasledujúci týždeň a jednotková cena prenájmu auta je cena položky spotrebného koša. Ak abstrahujeme od toho, aké položky sú v spotrebnom koši, môžeme uvedený problém zapísať pomocou vektorov. S pojmom vektor ste sa pravdepodobne stretli na fyzike (smer pôsobenia sily) alebo na geometrii (smerový vektor priamky), v ekonómii budeme pracovať s viacrozmernými vektormi. Hrubý príjem je skalárny súčin vektorov, ktorý zavedieme neskôr v tejto kapitole (pozri definíciu 1.5).

Definícia 1.1 Vektory

- Usporiadanú n -ticu reálnych čísel nazveme **aritmetickým** vektorom (označíme ho $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$).
- Čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazveme **zložkami** (súradnicami) vektora $\mathbf{a}$.

Problém Analýza spotrebného koša:

Spotrebný kôš (pre pevne dané poradie jednotlivých položiek) môžeme zapísať ako vektor vyjadrujúci počet jednotlivých položiek, alebo ako vektor cien položiek (ceny sú uvedené za jednu položku) v tom istom poradí ako sme uviedli jednotlivé položky.

Jednotlivé zložky vektora môžeme zapísať buď do stĺpca, vtedy hovoríme o stĺpcovom vektore, alebo jednotlivé zložky vektora zapíšeme do riadku, vtedy hovoríme o riadkovom vektore.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T,$$

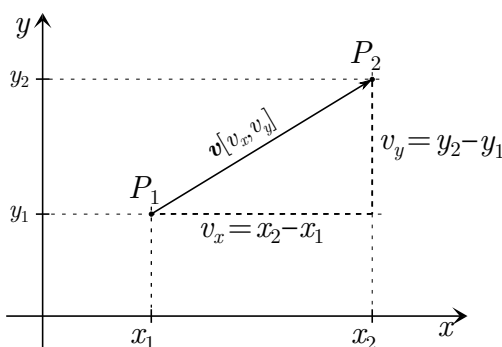
Riadkový vektor môžeme zapísať do stĺpca a naopak (ide o transponovanie vektora $\mathbf{a}^T$):

$$\mathbf{a}^T = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}^T$$

Poznámka:

- Na označenie vektorov používame tučné písmo.
- Vektor, označený napr. symbolom $\mathbf{a}$, budeme vždy chápať ako stĺpcový vektor.
- Ak stĺpcový vektor prepíšeme na riadkový, označíme ho $\mathbf{a}^T$. Veľké písmeno T znamená **transponovať**. Prečo používať transponovanie sa dozvieme neskôr.
- Ak má vektor $\mathbf{a}$ n zložiek hovoríme, že vektor $\mathbf{a}$ má rozmer n , alebo že $\mathbf{a}$ je n -rozmerný (n -dimenzionálny) vektor.
- Ak nie je uvedené inak, jednotlivé zložky vektora (jeho súradnice) označíme dolnými indexami.
- Rôzne vektory budú indexované podľa dolných indexov.

Z geometrického uhla pohľadu je vektor v $\mathbb{R}^n$ orientovaná úsečka umiestnená do bodu P_1 (začiatkový bod vektora) a končiaci v bode P_2 (koncový bod vektora). Jeho grafom je šípka smerujúca z bodu P_1 do bodu P_2 v n -rozmernom priestore. Na obrázku 1.1 je zobrazený vektor $\mathbf{v}$, ktorý je určený bodmi P_1 a P_2 v $\mathbb{R}^2$. Vektor $\mathbf{v}$ je zobrazený v pravouhlej súradnicovej sústave.

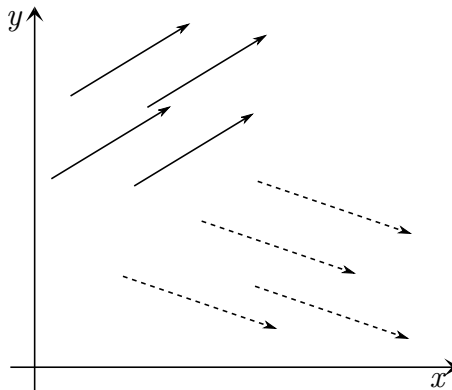


Obr. 1.1: Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, určený bodmi P_1 a P_2

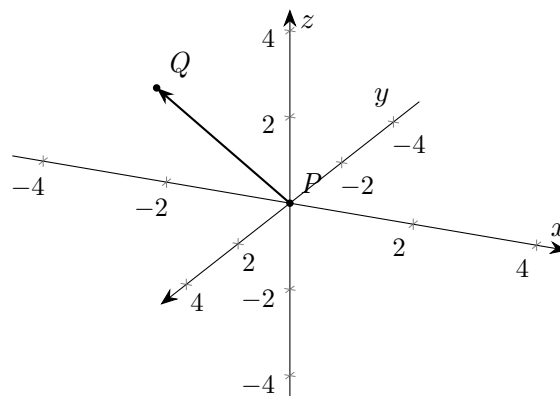
Poznámka Vektory v n -rozmernom vektorovom priestore $\mathbb{R}^n$:

- V prípade, že $n = 2$, vektory znázorňujeme v rovine (pozri Obr. 1.2).
- Pre $n = 3$ zobrazujeme vektory v 3-rozmernom priestore (pozri Obr. 1.3).
- Nech vektor $\mathbf{q}$ je určený bodmi P a Q . Často sa predpokladá, že počiatočný bod P vektora $\mathbf{q}$ je aj počiatkom súradnicového systému. Potom zložky vektora $\mathbf{q}$ sú súradnice koncového bodu Q (pozri Obr. 1.3)

- Vektor $\mathbf{q}^T$ môžeme interpretovať ako bod (t.j. **umiestnenie**) v n -rozmernom vektorovom priestore (ide o polohový vektor bodu Q).



Obr. 1.2: Systém vektorov v $\mathbb{R}^2$



Obr. 1.3: Súradnicový systém v $\mathbb{R}^3$ s počiatkom v bode P

1.1.1 Porovnanie vektorov

Definícia 1.2 Porovnanie vektorov

Nech $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ sú vektory $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$.

- Hovoríme, že vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ sú rovnaké práve vtedy, keď sa rovnajú všetky ich zložky, t.j. $a_i = b_i$ pre každé $i = 1, 2, \dots, n$.
- Platí $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, ak pre každé $i = 1, 2, \dots, n$ je $a_i \leq b_i$.
- $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$, ak pre každé $i = 1, 2, \dots, n$ je $a_i \geq b_i$.
- Podobne platí $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, ak pre každé $i = 1, 2, \dots, n$ je $a_i < b_i$.
- $\mathbf{a} > \mathbf{b}$, ak pre každé $i = 1, 2, \dots, n$ je $a_i > b_i$.

Poznamenajme, že nie každú dvojicu n -rozmerných vektorov môžeme porovnať. Napríklad pre

vektory $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ neplatí ani $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ ani $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$.

Uvažujme teraz vektory: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$. Vidíme, že $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, ale vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{c}$ nemôžeme porovnať. (Prečo?)

Príklad 1.1 Úloha na samoštúdium

1. Vymyslite si 3 dvojice vektorov, ktoré môžete porovnať a porovnajte ich.
2. Vymyslite si 3 dvojice vektorov, ktoré nemôžete porovnať a zdôvodnite, prečo ich nemôžete porovnať.

1.1.2 Špeciálne vektory

Jednotkový vektor

Budeme hovoriť, že $\mathbf{e}_i$ je i -ty **jednotkový vektor**, keď len jeho i -ta zložka sa rovná 1 a všetky ostatné zložky sa rovnajú nule:

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ta zložka sa rovná 1.}$$

Nulový vektor

n -rozmerný **nulový vektor** je vektor, ktorého všetky zložky sa rovnajú nule:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.1.3 Operácie s vektormi

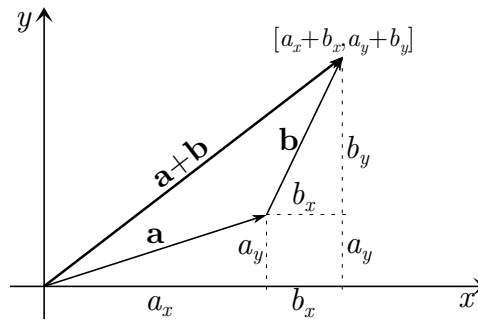
Operácie s vektormi sa vykonávajú po zložkách. Pomocou nich vieme vyjadriť napríklad súčet vektorov, rozdiel vektorov, alebo vynásobiť vektor číslom. Dá sa dokonca vypočítať aj dĺžka vektora. Začneme operáciou sčítania dvoch vektorov a vynásobením vektora reálnym číslom (skalárom).

Definícia 1.3 Súčet 2 vektorov

Nech $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^\top$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^\top$. Súčet dvoch vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ je n -rozmerný vektor $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Získame ho tak, že spočítame každú zložku vektora $\mathbf{a}$ s odpovedajúcou zložkou vektora $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

Súčet 2 vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ v $\mathbb{R}^2$ je znázornený na obrázku 1.4:



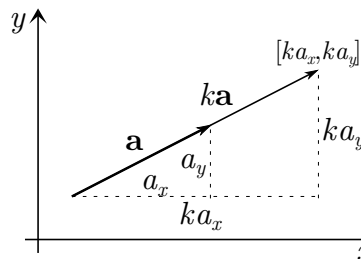
Obr. 1.4: Súčet vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ v $\mathbb{R}^2$

Definícia 1.4 Násobenie vektora skalárom

Nech $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^\top$ a $k \in \mathbb{R}$. Súčin čísla (skalára) k a vektora $\mathbf{a}$ je n -rozmerný vektor $k \cdot \mathbf{a}$, ktorého zložky sú k násobky odpovedajúcich zložiek vektora $\mathbf{a}$:

$$k \cdot \mathbf{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ \dots \\ k \cdot a_n \end{pmatrix}.$$

Násobenie vektora $\mathbf{a}$ skalárom $k \in \mathbb{R}, k > 0$ v $\mathbb{R}^2$ vidíme na obrázku 1.5.



Obr. 1.5: Násobenie vektora $\mathbf{a}$ skalárom $k \in \mathbb{R}, k > 0$ v $\mathbb{R}^2$

Rozdiel 2 vektorov

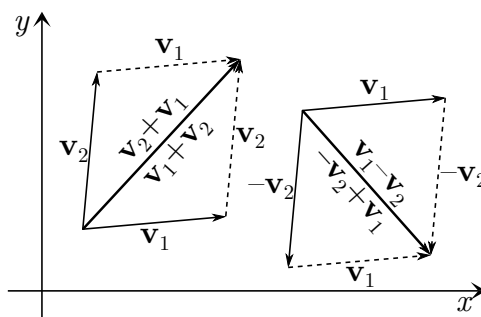
Nech $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ sú dva n -rozmerné vektory. Potom **rozdiel vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$** vypočítame (pomocou operácie sčítania a skalárneho násobku vektora) nasledovne:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1)\mathbf{b}.$$

Rozdiel vektorov získame, keď navzájom odpočítame jednotlivé zložky vektora $\mathbf{b}$ od korešpondujúcich zložiek vektora $\mathbf{a}$. Súčet a rozdiel 2 vektorov môžeme počítať iba pre také vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, ktoré majú rovnakú dimenziu.

Poznamenajme, že:

1. Súčet 2 vektorov $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ je vektor, ktorý získame, keď vektor $\mathbf{v}_2$ umiestnime do koncového bodu vektora $\mathbf{v}_1$. Potom výsledný vektor $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ smeruje z počiatočného bodu vektora $\mathbf{v}_1$ do koncového bodu vektora $\mathbf{v}_2$.
2. Násobenie vektora kladným skalárom $\lambda > 0, \lambda \in \mathbb{R}^+$ nemení orientáciu vektora.
3. Násobenie vektora záporným skalárom $\lambda < 0, \lambda \in \mathbb{R}^-$ mení orientáciu vektora.
4. Rozdiel $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ dvoch vektorov znamená, že pridáme vektor $\mathbf{v}_2$ opačne orientovaný ku koncovému bodu vektora $\mathbf{v}_1$, t.j. spočítame vektor $-\mathbf{v}_2$ s vektorom $\mathbf{v}_1$. Pozri obrázok 1.6 pre získanie predstavy ako funguje súčet a rozdiel 2 vektorov. Oba vektory sme znázornili v $\mathbb{R}^2$.



Obr. 1.6: Súčet a rozdiel vektorov $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ v $\mathbb{R}^2$

Príklad 1.2 Úloha na samoštúdium

Nech $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Vypočítajte vektory: $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $-\mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $2\mathbf{a}$, $-3\mathbf{a}$ a znázornite ich.

Pravidlá pre počítanie s vektormi

Nech $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pravidlá pre počítanie s vektormi sú nasledujúce:

1. komutatívny zákon: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{a}\lambda$,
2. asociatívny zákon: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, $(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$,
3. distributívny zákon: $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$, $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$,

4. nulový prvok: $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$, $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, ($\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$),

5. jednotkový prvok: $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$.

Platnosť vyššie uvedených pravidiel bezprostredne vyplýva z predchádzajúcich definícií a platnosti komutatívneho, asociatívneho a distributívneho zákona pre množinu reálnych čísel.

Definícia 1.5 Skalárny súčin

Skalárny súčin n -rozmerných vektorov $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ je definovaný nasledovne:

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = s$$

resp.

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Poznámka:

- Skalárny súčin 2 vektorov nie je vektor, ale **číslo** (t.j. **skalár**).
- Skalárny súčin $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}$ je definovaný len pre vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, ktoré majú rovnaký rozmer (dimenziu).
- V skalárnom súbore prvý vektor zapíšeme ako riadkový vektor $\mathbf{a}^T$ a vektor $\mathbf{b}$ zapíšeme štandardne, t.j. ako stĺpcový vektor.
- Pre skalárny súčin platí komutatívny zákon:

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a}.$$

- Pre skalárny súčin platí distributívny zákon:

$$\mathbf{a}^T \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{c}.$$

- Pre skalárny súčin **neplatí** asociatívny zákon:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Príklad 1.3

Predpokladajme, že podnik vyrába tri výrobky, pričom $x_1 = 30$, $x_2 = 40$ a $x_3 = 10$, kde x_i označuje množstvo i -teho výrobku, kde $i = 1, 2, 3$. Náklady na výrobu sú 20 p.j. za jednotkové množstvo pre výrobok V_1 , 15 p.j. za jednotkové množstvo pre výrobok V_2 a 40 p.j. za jednotkové množstvo pre výrobok V_3 . Nech $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$ je cenový vektor, pričom i -ta zložka určuje cenu za jednotku výrobku i . Vektor $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)^T$ nech predstavuje vyrobené množstvo. Vypočítajte celkové náklady na výrobu.

Riešenie:

Celkové náklady vypočítame ako skalárny súčin vektoru $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 40 \end{pmatrix}$ s vektorom $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}$:

$$\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{m} = (20, 15, 40) \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix} = 20 \cdot 30 + 15 \cdot 40 + 40 \cdot 10 = 600 + 600 + 400 = 1600.$$

Zistili sme, že celkové náklady na výrobu uvedených 3 výrobkov sú vo výške 1600 peňažných jednotiek.

Euklidovská dĺžka

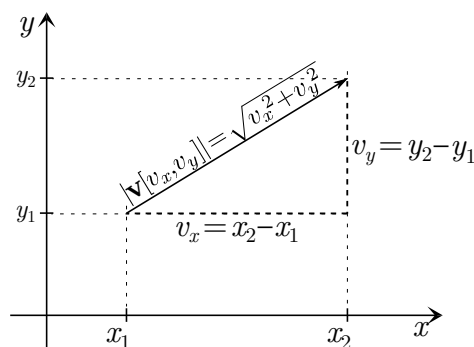
Definícia 1.6 Euklidovská dĺžka

Nech $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ je n -rozmerný vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, potom **euklidovská dĺžka** vektora $\mathbf{a}$, označíme ju symbolom $|\mathbf{a}|$, je definovaná vzťahom:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}.$$

Vektor, ktorého dĺžka sa rovná jednej, sa nazýva **jednotkový vektor**. Pripomeňme si, že sme už zaviedli špeciálne jednotkové vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$.

Na obrázku 1.7 názorne vidíme, ako spočítať dĺžku vektora pomocou Pytagorovej vety.



Obr. 1.7: Dĺžka vektora $\mathbf{v}$ v $\mathbb{R}^2$

Príklad 1.4 Normovanie vektora

Majme $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Vypočítajte súradnice odpovedajúceho jednotkového vektora k vektoru $\mathbf{a}$.

Riešenie:

1. Vypočítame dĺžku vektora $\mathbf{a}$:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7.$$

2. Určíme jednotkový vektor $\mathbf{e}_a$:

$$\mathbf{e}_a = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{7} \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

Pravidlá platné pre skalárny súčin vektorov a dĺžku vektora

1. $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}} \geq 0$,
2. $|\mathbf{a}| = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$,
3. $|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$,
4. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$,
5. $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$,
6. Cauchyho-Schwartzova nerovnosť: $|\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$.

Príklad 1.5

Majme dané vektory $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Vypočítajte dĺžky oboch vektorov, skalárny súčin vektorov a overte platnosť Cauchyho-Schwartzovej nerovnosti.

Riešenie:

1. Dĺžky oboch vektorov:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14},$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{42}.$$

2. Skalárny súčin vektorov:

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = 2 \cdot 5 + (-1) \cdot (-4) + 3 \cdot (-1) = 11.$$

3. Platnosť Cauchyho-Schwartzovej nerovnosti:

$$|\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}| = 11 \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| = \sqrt{14} \cdot \sqrt{42} \approx 24.2487$$

Príklad 1.6

Majme dané vektory $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Vypočítajte $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Riešenie:

Použijeme 5. pravidlo:

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{11}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{42}} \approx 0.45363$$

Uhol medzi vektormi $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ je preto približne 63.02° .

Ortogonalné vektory

Uvažujme vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a vektor $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Uhol medzi vektormi $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ nazveme γ . Z Pytagorovej vety vieme, že uhol γ sa rovná 90 stupňov práve vtedy, keď súčet druhých mocnín dĺžok vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ sa rovná dĺžke vektora $\mathbf{a} - \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} \gamma = 90^\circ &\iff |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 \\ &\iff \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} - \mathbf{b})^T \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &\iff \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{b} - \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{b} \\ &\iff \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = 0. \end{aligned}$$

Využili sme, že platí $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a}$ a ukázali sme, že uhol medzi 2 vektormi je rovný 90° práve vtedy, keď skalárny súčin daných vektorov je rovný 0 .

Uvedené tvrdenie platí aj pre n -rozmerné vektory. Pre kolmé (ortogonálne) vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ používame zápis: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

Príklad 1.7

Zistite, či sú nasledujúce vektory ortogonálne: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Riešenie:

Uvedené vektory sú ortogonálne, pretože $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 6 + 2 \cdot (-3) = 0$.

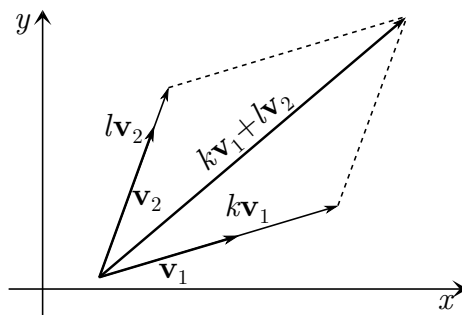
1.1.4 Lineárna kombinácia vektorov**Definícia 1.7 Lineárna kombinácia vektorov**

Nech $\mathbf{a}_i$, pre $i = 1, 2, \dots, m$ sú n -rozmerné vektory a λ_i , pre $i = 1, 2, \dots, m$ sú reálne čísla. Potom n -rozmerný vektor $\mathbf{a}$ daný:

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{a}_i$$

nazývame **lineárna kombinácia** vektorov $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$.

Na obrázku 1.8 môžeme vidieť lineárnu kombináciu dvoch vektorov.


 Obr. 1.8: Lineárna kombinácia vektorov $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$

Konvexná kombinácia vektorov

Ak navyše platí, že $\lambda_i \geq 0$, pre $i = 1, 2, \dots, m$ a $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, tak vektor $\mathbf{a}$ nazývame **konvexnou kombináciou** vektorov $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$.

Množina všetkých konvexných kombinácií vektorov $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$ je množina tých vektorov, ktorých koncové body priamkou spájajú koncové body vektorov $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$. Preto oba vektory $\mathbf{c}_1$ a $\mathbf{c}_2$ môžeme zapísať ako konvexnú kombináciu vektorov $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$.

- Poznamenajme, že pre $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 1 - \lambda_1 = 0$ dostaneme vektor $\mathbf{a}_1$.
- Pre $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 1 - \lambda_1 = 1$ dostaneme vektor $\mathbf{a}_2$.
- Ďalej sa dá ukázať, že konvexná kombinácia vektorov je aj lineárnou kombináciou týchto vektorov.

Lineárna závislosť a nezávislosť vektorov

Definícia 1.8 Lineárna závislosť vektorov

Daných m n -rozmerných vektorov $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ je **lineárne závislých**, ak existujú také čísla λ_i , nie všetky rovné nule, že

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{a}_i = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}$$

alebo ak daná sústava vektorov obsahuje aspoň jeden nulový vektor.

Ak predchádzajúca rovnica platí iba pre $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$, tak vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ sú lineárne nezávislé.

Poznamenajme, že dva vektory sú rovnaké, ak sa zhodujú vo všetkých zložkách a preto predchádzajúca rovnica predstavuje n lineárnych rovníc s premennými $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. V kapitole 1.4 tejto učebnice sa budeme zaoberať riešením takýchto systémov.

Poznámka:

Z predchádzajúcej definície dostávame nasledujúcu ekvivalentnú charakteristiku lineárne závislých a lineárne nezávislých vektorov:

1. Množina m vektorov $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ je lineárne závislá práve vtedy, keď jeden vektor vieme zapísať ako lineárnu kombináciu ostatných vektorov.
2. Množina m vektorov $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ je lineárne nezávislá práve vtedy, keď žiaden z vektorov nemožno zapísať ako lineárnu kombináciu ostatných vektorov.

Príklad 1.8

Nech sú dané vektory $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Zistite, či sú dané vektory lineárne závislé.

Riešenie:

Vektory $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$ sú závislé práve vtedy ak platí rovnosť $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ resp.:

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ak z prvej rovnice vyjadríme $\lambda_2 = 3\lambda_1$ a dosadíme do druhej rovnice dostaneme $\lambda_1 + 2 \cdot 3\lambda_1 = 0$, zistíme, že $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ a preto vektory $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$ sú lineárne nezávislé (pozri definíciu 1.8).

Vo všeobecnosti, ak budeme overovať lineárnu závislosť m n -rozmerných vektorov, získame sústavu m rovníc pre n neznámych. Metódy riešenia sústav lineárnych rovníc nájdete v kapitole 1.4 tejto učebnice.

Teraz zhrnieme získané poznatky:

- Množina jednotkových n -rozmerných vektorov $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ v $\mathbb{R}^n$ je množina lineárne nezávislých vektorov.
- Lubovoľný n -rozmerný vektor $\mathbf{a}^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ vieme zapísať ako lineárnu kombináciu jednotkových vektorov

$$\mathbf{a} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbf{e}_i$$

Všimnime si, že koeficienty (skaláry) lineárnej kombinácie sú práve súradnice vektora $\mathbf{a}$.

Definícia 1.9 Hodnosť sústavy n -rozmerných vektorov

Hovoríme, že sústava $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p$ n -rozmerných vektorov má hodnosť h , ak v tomto systéme existuje h lineárne nezávislých vektorov, a každých $h + 1$ vektorov z tohto systému je už lineárne závislých.

Každá sústava n -rozmerných vektorov má hodnosť $h \leq n$.

Operácie, ktoré nemenia hodnotu h sústavy n -rozmerných vektorov

Hodnota sústavy n -rozmerných vektorov sa nezmení ak:

1. zameníme poradie vektorov v sústave,
2. vynásobíme jeden vektor sústavy nenulovým číslom,
3. pripočítame k jednému vektoru lineárnu kombináciu ostatných vektorov,
4. vynecháme v sústave vektor, ktorý je lineárnou kombináciou ostatných vektorov sústavy.

Platí, hodnota sústavy vektorov sa rovná počtu lineárne nezávislých vektorov danej sústavy vektorov.

Príklad 1.9

Pre vektory $\mathbf{a} = (3, 1, -1, 0)^T$, $\mathbf{b} = (5, 0, 4, 4)^T$, $\mathbf{c} = (1, 1, 3, 7)^T$ vypočítajte $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $3\mathbf{c} - \mathbf{a}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, $4\mathbf{b}$. Overte lineárnu závislosť vektorov $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$.

Riešenie:

V prvých dvoch úlohách využijeme priamo pravidlá pre súčet vektorov a ich lineárnej kombinácie. V tretej úlohe vypočítame skalárny súčin daných vektorov a v poslednej úlohe vypočítame skalárny násobok vektora.

$$2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = (2 \cdot 3 + 3 \cdot 5, 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0, 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4, 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4)^T = (21, 2, 10, 12)^T,$$

$$3\mathbf{c} - \mathbf{a} = (3 \cdot 1 - 3, 3 \cdot 1 - 1, 3 \cdot 3 + 1, 3 \cdot 7 - 0)^T = (0, 2, 10, 21)^T,$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = (5 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 7)^T = 45,$$

$$4\mathbf{b} = (4 \cdot 5, 4 \cdot 0, 4 \cdot 4, 4 \cdot 4)^T = (20, 0, 16, 16)^T.$$

Pre overenie lineárnej závislosti spočítame hodnotu danej sústavy vektorov. Jednotlivé vektory zapíšeme pod seba do riadkov. Môžeme ich zapísať v ľubovoľnom poradí (výmena poradia vektorov nemení hodnotu danej sústavy vektorov).

Zvolili sme si nasledujúce poradie: do 1. riadku sme zapísali vektor $\mathbf{c}$, do druhého riadku vektor $\mathbf{a}$ a do tretieho vektor $\mathbf{b}$ (prečo práve takto?). Sústavu vektorov sme dali do okrúhlych zátvoriek. Úpravy budeme robiť v jednotlivých krokoch. Poradie krokov označujeme číslom, riadky sme označili veľkými písmenami (napr. **1A**, **1B**, **1C**). Použité úpravy, ktoré nemenia hodnotu sústavy vektorov sme naznačili pred symbolom $\sim$, ktorý hovorí, že po naznačených úpravách nedôjde k zmene závislosti vektorov na nezávislosť a naopak.

$$\begin{array}{l} \mathbf{1A} \\ \mathbf{1B} \\ \mathbf{1C} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathbf{1A} \cdot (-3) + \mathbf{1B} \\ \mathbf{1A} \cdot (-5) + \mathbf{1C} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{matrix} 2A \\ 2B \\ 2C \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -10 & -21 \\ 0 & -5 & -11 & -31 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2B \cdot (-\frac{5}{2}) + 2C \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{matrix} 3A \\ 3B \\ 3C \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -10 & -21 \\ 0 & 0 & 14 & \frac{43}{2} \end{pmatrix}$$

Pomocou úprav, ktoré nemenia hodnotu sústavy vektorov sme upravili vektor $\mathbf{a} = (3, 1, -1, 0)^T$ na vektor $(0, -2, -10, -21)^T$. Vektor $\mathbf{b} = (5, 0, 4, 4)^T$ sme upravili na vektor $(0, 0, 14, \frac{43}{2})^T$. Vektor $\mathbf{c} = (1, 1, 3, 7)^T$, ktorý sme umiestnili do 1.riadku sústavy vektorov zostal rovnaký. Keďže 1. zložka upraveného vektora $\mathbf{a}$ sa rovná nule a prvé dve zložky upraveného vektora $\mathbf{b}$ sa rovnajú nule, je zrejmé, že neexistujú také nenulové konštanty, pomocou ktorých by sme zapísali napr. vektor $\mathbf{c}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Preto vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$ sú lineárne nezávislé, navyše platí, že hodnota sústavy uvedených vektorov je 3.

Príklad 1.10

Pre vektory $\mathbf{a} = (1, 1, 2, 0)^T$, $\mathbf{b} = (2, 2, 4, 0)^T$, $\mathbf{c} = (1, 4, 1, 1)^T$ vypočítajte $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $3\mathbf{c} - \mathbf{a}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, $4\mathbf{b}$. Overte lineárnu závislosť vektorov $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$.

Riešenie:

Budeme postupovať rovnako ako v príklade 1.9:

$$2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 2, 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2, 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4, 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0)^T = (8, 8, 16, 0)^T,$$

$$3\mathbf{c} - \mathbf{a} = (3 \cdot 1 - 1, 3 \cdot 4 - 1, 3 \cdot 1 - 2, 3 \cdot 1 - 0)^T = (2, 11, 1, 3)^T,$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = (2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 1)^T = 14,$$

$$4\mathbf{b} = (4 \cdot 2, 4 \cdot 2, 4 \cdot 4, 4 \cdot 0)^T = (8, 8, 16, 0)^T.$$

Pre overenie lineárnej závislosti opäť spočítame hodnotu danej sústavy vektorov pomocou úprav, ktoré nemenia hodnotu sústavy vektorov. V tomto príklade sme si zvolili nasledujúce poradie: do 1. riadku sme zapísali vektor $\mathbf{a}$, do druhého riadku vektor $\mathbf{c}$ a do tretieho vektor $\mathbf{b}$ (prečo práve takto?). Použité úpravy a označenie riadkov sme zapísali podobne ako v predchádzajúcom príklade.

$$\begin{matrix} 1A \\ 1B \\ 1C \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1A \cdot (-1) + 1B \\ 1A \cdot (-2) + 1C \\ \end{matrix} \sim \begin{matrix} 2A \\ 2B \\ 2C \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Po úpravách zostal vektor $\mathbf{a}$ nezmenený. Vektor $\mathbf{c}$ sme upravili na vektor $(0, 3, -1, 1)$. Z vektora $\mathbf{b}$ sme naznačenými úpravami získali nulový vektor t.j. $(0, 0, 0, 0)$. Zistili sme, že sústava vektorov $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$ je lineárne závislá, pretože obsahuje nulový vektor. Hodnota sústavy sa rovná 2, pretože obsahuje 2 lineárne nezávislé vektory.

Príklad 1.11 Úloha na samoštúdium

Pre vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$:

$$1. \mathbf{a} = (4, 1, 3, 0)^T, \mathbf{b} = (2, -2, 5, 1)^T, \mathbf{c} = (1, 4, 2, 1)^T,$$

$$2. \mathbf{a} = (3, 7, 2, 1)^T, \mathbf{b} = (1, 1, -1, 0)^T, \mathbf{c} = (6, 10, -1, 1)^T,$$

3. $\mathbf{a} = (1, 5, 2, -1)^T$, $\mathbf{b} = (3, -1, 2, 5)^T$, $\mathbf{c} = (-2, 6, 0, -6)^T$,

4. $\mathbf{a} = (7, 7, 2, -3)^T$, $\mathbf{b} = (0, -4, 1, -3)^T$, $\mathbf{c} = (7, -1, 0, 3)^T$,

5. $\mathbf{a} = (4, 1, 9, 14)^T$, $\mathbf{b} = (5, 1, -4, 3)^T$, $\mathbf{c} = (0, 0, 1, -1)^T$,

6. $\mathbf{a} = (4, 7, 4, 6)^T$, $\mathbf{b} = (2, 4, 2, 10)^T$, $\mathbf{c} = (3, 5, 3, 1)^T$

vypočítajte $4\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - \mathbf{c}$, $2\mathbf{c} - 3\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, $7\mathbf{b}$ a overte lineárnu závislosť vektorov $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$.

Na záver zistite, pre akú hodnotu $k \in \mathbb{R}$ sú vektory $\mathbf{a} = (1, k, k)^T$, $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$, $\mathbf{c} = (2, k+2, 3k+4)^T$ lineárne nezávislé, a pre akú hodnotu $k \in \mathbb{R}$ sú lineárne závislé.

1.1.5 Vektorový priestor

Definícia 1.10 Vektorový priestor

Majme množinu vektorov $V = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{x}\} \in \mathbb{R}^n$, pre ktoré je definovaná operácia sčítania a skalárneho násobku a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Potom daná množina vektorov má nasledujúce vlastnosti:

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$,
2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$,
3. existuje neutrálny prvok vzhľadom na sčítanie, t.j. existuje vektor $\mathbf{0} \in V$ taký, že pre všetky vektory $\mathbf{a} \in V$ platí: $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$,
4. existuje opačný prvok vzhľadom na sčítanie, t.j. pre každý vektor $\mathbf{a} \in V$ existuje jednoznačne vektor $\mathbf{x} \in V$ taký, že platí: $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$ alebo $\mathbf{x} = -\mathbf{a}$,
5. $(\lambda \cdot \mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{a})$,
6. $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$,
7. $\lambda \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \cdot \mathbf{a} + \lambda \cdot \mathbf{b}$,
8. $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{a} + \mu \cdot \mathbf{a}$.

Ak pre ľubovoľné vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ platí, že aj $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$, a ak aj pre ľubovoľné $\lambda \in \mathbb{R}$ platí, že $\lambda \mathbf{a} \in V$, potom množinu V nazývame **lineárny vektorový priestor**, alebo len **vektorový priestor**.

Euklidovský n -rozmerný priestor

Definícia 1.11 Euklidovský n -rozmerný priestor

n -rozmerný vektorový priestor, v ktorom je definovaná vzdialenosť vektorov (tzv. euklidovská metrika) ako dĺžka ich rozdielu, sa nazýva n -rozmerným euklidovským priestorom a označuje sa $\mathbb{E}^n$.

Definícia 1.12 Báza vektorového priestoru

1. Množinu $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ lineárne nezávislých vektorov vektorového priestoru V nazývame báza vektorového priestoru V , ak ľubovoľný vektor $\mathbf{a} \in V$ vieme zapísať ako lineárnu kombináciu báзовých vektorov $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$:

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{b}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \mathbf{b}_n.$$

2. Počet báзовých vektorov určuje dimenziu n vektorového priestoru V .

Poznámka:

- Platí, že maximálny počet lineárne nezávislých vektorov vektorového priestoru V tvorí jeho bázu a dimenzia vektorového priestoru V je daná maximálnym počtom lineárne nezávislých vektorov.
- Hovoríme, že vektorový priestor V je generovaný množinou báзовých vektorov $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$.
- Dimenzia vektorového priestoru nie je nutne rovná počtu zložiek jeho vektorov. Platí, že n -rozmerný vektor môže obsahovať najviac n lineárne nezávislých vektorov. Avšak platí, že n lineárne nezávislých vektorov n -rozmerného vektorového priestoru tvorí jeho bázu.

Príklad 1.12 Úloha na samoštúdium

Dané sú vektory $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Vypočítajte skalárne súčiny $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{c}$. Sú niektoré dvojice vektorov ortogonálne?
2. Vypočítajte vzdialenosť 2 bodov, ktoré sú určené polohovými vektormi $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ resp. $\mathbf{a}$ a $\mathbf{c}$.

Príklad 1.13 Úloha na samoštúdium

Sú vektory $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ lineárne nezávislé?

Príklad 1.14 Úloha na samoštúdium

Dané sú vektory $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zistite či vektory $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ sú lineárnou kombináciou vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Je niektorý vektor konvexnou kombináciou vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$? Nakreslite všetky vektory.

Príklad 1.15 Úloha na samoštúdium

Dané sú vektory $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} l \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, kde $k, l \in \mathbb{R}$. Pre aké hodnoty k a l sú dané vektory lineárne závislé (resp. nezávislé)?

1.2 Matice

Maticou typu $m \times n$ rozumieme schému $m \times n$ reálnych čísel usporiadaných do m riadkov a n stĺpcov. Na jednotlivé riadky alebo stĺpce matice sa môžeme pozeráť ako na vektory. Matica je jednoducho sústava vektorov zapísaných do riadkov, alebo do stĺpcov.

Prvky matice označujeme dvojíťm indexom. Prvý udáva riadok a druhý stĺpec, v ktorom sa prvok nachádza. Matice označujeme veľkými písmenami, napr. $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Pre stručný zápis matice používame aj predpis $\mathbf{A} = (a_{ij})_{mn}$ alebo $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Prvky $a_{11}, a_{22}, \dots$ matice $\mathbf{A}$ tvoria jej **hlavnú diagonálu**. Prvky $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots$ matice $\mathbf{A}$ tvoria jej **vedľajšiu diagonálu**.

1.2.1 Špeciálne typy matíc

Maticu nazývame:

- **nulová** matica, ak všetky jej prvky sa rovnajú nule,
- **štvorcová** matica rádu n , ak má rovnaký počet riadkov a stĺpcov,
- **diagonálna** matica $\mathbf{A}$ rádu $n \times n$ je matica, ktorá má nenulové prvky len na hlavnej diagonále $a_{ii} \neq 0, i = 1, \dots, n$, kým ostatné prvky sú rovné nule,
- **jednotková** matica je štvorcová matica, ktorá má na diagonále samé jednotky a ostatné prvky sú rovné nule (označujeme $\mathbf{I}$ alebo $\mathbf{E}$).

Ďalej:

- Maticu $\mathbf{U}$ nazývame **horná trojuholníková** matica rádu $n \times n$ ak $u_{ij} = 0$ pre $1 \leq i, j \leq n$ pričom $i > j$.
- Maticu $\mathbf{L}$ nazývame **dolná trojuholníková** matica rádu $n \times n$ ak $l_{ij} = 0$ pre $1 \leq i, j \leq n$ pričom $i < j$.
- Matica **transponovaná** k matici $\mathbf{A}$ je matica, ktorá vznikne výmenou riadkov za stĺpce, označujeme ju $\mathbf{A}^T$. (matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ a $\mathbf{A}^T$ typu $n \times m$ sú navzájom transponované).
- Matica $\mathbf{A}$ je **symmetrická** matica rádu $n \times n$ ak $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, tj. rovnosť $a_{ij} = a_{ji}$ je splnená pre $1 \leq i, j \leq n$.
- Matica $\mathbf{A}$ je **asymmetrická** matica rádu $n \times n$ ak $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$, tj. rovnosť $a_{ij} = -a_{ji}$ je splnená pre $1 \leq i, j \leq n$.

Príklad 1.16

Majme dané matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 4 & 8 & 1 \\ 7 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Určte, ktoré dve matice sú navzájom transponované. Ktorá matica je štvorcová a ktorá je symetrická? Ktorá z uvedených matíc je horná trojuholníková matica a ktorá dolná trojuholníková matica? Ktorá z nich je diagonálna matica?

Riešenie:

Matice $\mathbf{B}$ a $\mathbf{D}$ a matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{J}$ sú navzájom transponované. Matica $\mathbf{F}$ je symetrická matica. Matica $\mathbf{C}$ je horná trojuholníková matica. Matica $\mathbf{G}$ nie je horná trojuholníková matica, pretože nielen prvky pod hlavnou diagonálou sú nulové, ale aj prvok $g_{22} = 0$. Štvorcové matice sú všetky okrem matice $\mathbf{A}$. Matica $\mathbf{E}$ je dolná trojuholníková matica. Matica $\mathbf{I}$ je diagonálna a zároveň je aj jednotková, pretože na diagonále má čísla 1.

1.2.2 Hodnosť matice**Definícia 1.13**

Hodnosťou matice $\mathbf{A}$, zvyčajne zapisovanú výrazom $h(\mathbf{A})$, nazývame hodnosť sústavy vektorov, ktoré tvoria riadky (prípadne stĺpce) matice $\mathbf{A}$.

Platí:

- $h(\mathbf{A}) =$ počet jej lineárne nezávislých riadkov (stĺpcov),
- $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T)$,
- $h(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$,
- hodnosť nulovej matice je 0 (nula).

Výpočet hodnosti matice

Matica je odstupňovaná, ak každý jej riadok má zľava aspoň o jednu nulu viac než predchádzajúci riadok, pričom niekoľko posledných riadkov môže byť nulových. Navyše platí, že hodnosť odstupňovanej matice sa rovná počtu jej nenulových riadkov.

Elementárne úpravy, ktoré nemenia hodnosť matice:

1. výmena poradia riadkov v matici,
2. vynásobenie ľubovoľného riadku matice nenulovým číslom,

3. pripočítanie násobku jedného riadku k inému riadku,
4. vynechanie riadku, ktorý je lineárnou kombináciou ostatných riadkov matice.

Tieto úpravy môžeme vykonať aj nad stĺpcami matice. V tejto učebnici však používame iba riadkové úpravy.

Príklad 1.17

Určte hodnotu matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Riešenie:

Budeme postupovať rovnako ako v poslednej úlohe príkladu 1.9, kde sme overovali hodnotu sústavy vektorov, pretože úloha určiť hodnotu matice je ekvivalentná s úlohou určiť hodnotu sústavy vektorov. Tu sme však nemenili poradie riadkov, pretože v žiadnom riadku nebolo číslo 1 v prvom stĺpci (jednotka v 1. stĺpci zjednodušuje elementárne úpravy).

$$\begin{array}{l} \text{1A} \\ \text{1B} \\ \text{1C} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{1A} \cdot (-\frac{3}{2}) + \text{1B} \\ \end{array} \sim \begin{array}{l} \text{2A} \\ \text{2B} \\ \text{2C} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -\frac{23}{2} & -1 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{2B} \cdot \frac{12}{23} + \text{2C} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -\frac{23}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{34}{23} \end{pmatrix}$$

Maticu $\mathbf{A}$ sme upravili elementárnymi úpravami, ktoré nemenia hodnotu matice na odstupňovanú maticu. Zistili sme, že počet jej nenulových riadkov je 3 a preto jej hodnota sa rovná 3 ($h(\mathbf{A}) = 3$).

1.2.3 Základné operácie s maticami

Sčítanie matíc rovnakého typu

Spočítame prvky matíc na rovnakých pozíciách: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$.

Násobenie matice reálnym číslom

Vynásobíme každý prvok matice daným číslom: $c \cdot \mathbf{A} = c \cdot (a_{ij})_{m \times n} = (c \cdot a_{ij})_{m \times n}, c \in \mathbb{R}$.

Vlastnosti sčítania matíc

Nech matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ sú rovnakého typu a $k, l \in \mathbb{R}$, potom platí:

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$,
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$,
3. $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$,
4. $(k + l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{A}$,
5. $k(l\mathbf{A}) = (kl)\mathbf{A}$.

Príklad 1.18

Pre dané matice **A** a **B** vypočítajte maticu $\mathbf{C} = 2 \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Riešenie:

Na výpočet matice **C** použijeme pravidlá uvedené vyššie:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 & 2 \cdot 5 + (-1) & 2 \cdot 2 + 0 \\ 2 \cdot 3 + 2 & 2 \cdot (-4) + 4 & 2 \cdot 2 + 6 \\ 2 \cdot 0 + 3 & 2 \cdot 6 + (-2) & 2 \cdot 2 + (-2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 8 & -4 & 10 \\ 3 & 10 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Súčin matic

Nech **A** je matica typu $m \times n$ a **B** je matica typu $n \times p$. Potom súčinom matic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je matica **C** typu $m \times p$, pričom platí, že prvok c_{ij} je skalárnym súčinom i -teho riadku matice **A** a j -teho stĺpca matice **B**:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

Obr. 1.9: Grafické znázornenie násobenia matic

Príklad 1.19

Vypočítajte súčiny matic $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ a $\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$ pre matice **B** a **C** z príkladu 1.18.

Riešenie:

Obe matice sú typu 3×3 a preto aj výsledná matica bude typu 3×3 .

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 8 & -4 & 10 \\ 3 & 10 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 8 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 9 + (-1) \cdot (-4) + 0 \cdot 10 & 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 10 + 0 \cdot 2 \\ 2 \cdot 5 + 4 \cdot 8 + 6 \cdot 3 & 2 \cdot 9 + 4 \cdot (-4) + 6 \cdot 10 & 2 \cdot 4 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 2 \\ 3 \cdot 5 + (-2) \cdot 8 + (-2) \cdot 3 & 3 \cdot 9 + (-2) \cdot (-4) + (-2) \cdot 10 & 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 10 + (-2) \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 13 & -6 \\ 60 & 62 & 60 \\ -7 & 15 & -12 \end{pmatrix}.$$

Výpočet súčinu matíc $\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$ nechávame na čteného čitateľa. Tu uvádzame len výslednú maticu

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 35 & 23 & 46 \\ 30 & -44 & -44 \\ 29 & 33 & 56 \end{pmatrix}. \text{ Všimnime si, že sme } \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \neq \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}.$$

Príklad 1.20

Dané sú pre matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Vypočítajte súčiny matíc $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$, $\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$.

Riešenie:

Najskôr zistíme, či môžeme matice vynásobiť. Matica $\mathbf{A}$ je typu 2×3 a matica $\mathbf{B}$ je typu 3×2 . Matice môžeme vynásobiť, výsledná matica bude typu 2×2 . Čitateľ sa ľahko presvedčí, že

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 1 & -23 \end{pmatrix}. \text{ Súčin matíc } \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \text{ môžeme tiež vypočítať, výsledná matica bude typu } 3 \times 3,$$

pretože matica $\mathbf{B}$ je typu 3×2 a matica $\mathbf{A}$ je typu 2×3 .

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 0 \\ 16 & -6 & 12 \\ 0 & 23 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Súčinom matíc } \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \text{ bude matica } 2 \times 3, \text{ pričom } \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 18 & 14 & 26 \\ 1 & -23 & -28 \end{pmatrix}.$$

Súčin matíc $\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$ nemôžeme spočítať, pretože matica $\mathbf{C}$ má 3 stĺpce a matica $\mathbf{A}$ má len 2 riadky.

Vyberte ešte ďalšie dvojice matíc, ktoré môžeme vynásobiť a vynásobte ich. Ďalej určte tie dvojice matíc, ktoré nemôžeme vynásobiť.

V príklade 1.19 a 1.20 sme poukázali na dôležitú vlastnosť násobenia matíc a tou je, že násobenie matíc nie je komutatívne a tiež nie vždy je možné súčin matíc spočítať.

Vlastnosti násobenia matíc

Nech matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{I}$ sú vhodného typu a $k \in \mathbb{R}$, potom pre súčet a násobenie matíc platí:

1. násobenie matíc **nie je komutatívne**,
2. ak $\mathbf{I}$ je jednotková matica, potom $\mathbf{A}_{m \times n} \cdot \mathbf{I}_{n \times n} = \mathbf{A}_{m \times n}$, $\mathbf{I}_{m \times m} \cdot \mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{A}_{m \times n}$,
3. $k\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot k \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot k$,
4. $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$,

5. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$,

6. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$,

7. $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$.

Násobenie matíc v mikroekonómii

Príklad 1.21

Spotrebitelia A, B, C chcú kúpiť tovar t_1, t_2, t_3, t_4 , každý v inom množstve. Celý nákup môžu kúpiť buď v obchode O_1 alebo v O_2 . Požadované množstvo a ceny jednotlivých tovarov sú uvedené v tabuľke Tab. 1.1. Odporučte spotrebiteľom, v ktorom obchode je pre nich výhodnejšie kupovať, za predpokladu, že chcú za svoj nákup zaplatiť menej.

Spotrebiteľ	t_1	t_2	t_3	t_4
A	6	5	3	1
B	3	6	2	2
C	3	4	3	1

Tovar	O_1	O_2
t_1	1.50	1.00
t_2	2.00	2.50
t_3	5.00	4.50
t_4	16.00	17.00

Tab. 1.1: Požadované množstvo tovaru a ceny v obchodoch

Riešenie:

Označme symbolom $\mathbf{M}$ maticu odpovedajúcu požadovanému množstvu tovarov, ktoré chce spotrebiteľ zakúpiť a symbolom $\mathbf{O}$ maticu cien jednotlivých tovarov v obchodoch. Potom:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 1.50 & 1.00 \\ 2.00 & 2.50 \\ 5.00 & 4.50 \\ 16.00 & 17.00 \end{pmatrix}.$$

Odpoveď na otázku, v ktorom obchode zaplatí spotrebiteľ menej získame, keď spočítame súčin matíc $\mathbf{M} \cdot \mathbf{O}$. Matica $\mathbf{M}$ je typu 3×4 a matica $\mathbf{O}$ je typu 4×2 . Dané matice môžeme vynásobiť, pretože počet stĺpcov matice $\mathbf{M}$ sa rovná počtu riadkov matice $\mathbf{O}$ a preto výsledná matica cien nákupov bude typu 3×2 , pretože $(3 \times 4) \cdot (4 \times 2)$, čo zodpovedá tomu, že máme 3 spotrebiteľov a 2 obchody, v ktorých môžu spotrebitelia nakupovať. Počet jednotiek zakúpených 4 druhov tovarov násobíme zodpovedajúcou cenou tovaru.

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.50 & 1.00 \\ 2.00 & 2.50 \\ 5.00 & 4.50 \\ 16.00 & 17.00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50.00 & 49.00 \\ 58.50 & 61.00 \\ 43.50 & 43.50 \end{pmatrix}.$$

Pripomeňme si, že hodnotu 50 (cena nákupu v obchode O_1) sme získali po vynásobení prvkov 1. riadku matice $\mathbf{M}$ prvkami 1. stĺpca matice $\mathbf{O}$ a následným spočítaním týchto súčinov (ide o skalárny súčin vektora v 1. riadku matice $\mathbf{M}$ s vektorom v 1. stĺpci matice $\mathbf{O}$). Po vynásobení uvedených matíc sme zistili, že spotrebiteľ A zaplatí menej v obchode O_2 , spotrebiteľ B zaplatí menej v obchode O_1 a nákup spotrebiteľa C stojí rovnaké množstvo peňazí v oboch obchodoch.

Príklad 1.22 Úloha na samoštúdium

Predpokladajme, že firma používa tri suroviny označené R_1, R_2 a R_3 , vyrába štyri medziprodukty S_1, S_2, S_3 a S_4 . Tieto medziprodukty firma používa na výrobu dvoch finálnych výrobkov F_1 a F_2 . Počet požadovaných jednotiek na medziprodukty nezávisí od použitia medziproduktov ako vstupu pre dva finálne výrobky. V Tab. 1.2 je uvedený počet jednotiek každej suroviny, ktoré sú potrebné na výrobu jednej jednotky každého z medziproduktov. V Tab. 1.3 je uvedený počet jednotiek každého medziproduktu potrebný na výrobu jednej jednotky každého z nich pre finálne výrobky. Spoločnosť plánuje vyrobiť 80 jednotiek medziproduktov S_1 , 60 jednotiek S_2 , 100 jednotiek S_3 a 50 jednotiek S_4 . Rovnako plánuje vyrobiť 70 jednotiek finálnych výrobkov F_1 a 120 jednotiek F_2 .

Kolko jednotiek suroviny potrebuje firma na výrobu požadovaného množstva medziproduktov a koľko na výrobu finálnych produktov?

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	2	1	4	0
R_2	3	2	1	3
R_3	1	4	0	5

Tab. 1.2: Požiadavky na suroviny pre medziprodukty

	F_1	F_2
S_1	2	3
S_2	4	0
S_3	1	4
S_4	3	1

Tab. 1.3: Požiadavky na medziprodukt pre finálne výrobky

Riešenie:

Pre vyriešenie navrhujeme nasledujúci postup:

1. Vypočítame, koľko jednotiek každej suroviny je potrebných na výrobu všetkých medziproduktov.
2. Vypočítame, koľko jednotiek každej suroviny je potrebných na výrobu finálnych výrobkov.
3. Vypočítame celkový počet jednotiek vstupných surovín na výrobu medziproduktov a finálnych produktov.

Regulárna, singulárna matica

Štvorcovú maticu $\mathbf{A}_{n \times n}$ nazývame:

- **regulárna matica**, ak má **lineárne nezávislé** riadky,
- **singulárna matica**, ak obsahuje **lineárne závislé** riadky.

Hodnosť regulárnej matice sa **rovná** n ($h(\mathbf{A}) = n$). Súčin regulárnych matíc je regulárna matica, súčet regulárnych matíc nemusí byť regulárna matica. Hodnosť singulárnej matice je **menšia** ako n ($h(\mathbf{A}) < n$).

1.2.4 Inverzná matica

Nech $\mathbf{A}_{n \times n}$ je štvorcová matica. **Inverznú maticu** k matici $\mathbf{A}$ nazveme maticu $\mathbf{A}^{-1}$, pre ktorú platí:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Pre inverznú maticu platí:

- inverzná matica $\mathbf{A}^{-1}$ existuje práve vtedy, keď matica $\mathbf{A}$ je regulárna,
- ku každej regulárnej matici existuje práve jedna inverzná matica.

Inverzná matica a jej vlastnosti

Nech $\mathbf{A}_{n \times n}, \mathbf{B}_{n \times n}$ sú regulárne matice a $c \in \mathbb{R}$ pričom $c \neq 0$. Potom platia nasledovné rovnosti:

1. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$,
2. $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$,
3. $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$,
4. $(c\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{c}\mathbf{A}^{-1}$.

Inverznú maticu nájdeme pomocou elementárnych úprav nad maticou: $(\mathbf{A}|\mathbf{I}) \sim \dots \sim (\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1})$. Poznamenajme, že maticu $\mathbf{A}$ pomocou elementárnych úprav prevedieme na jednotkovú maticu a zároveň jednotkovú maticu prevedieme na inverznú maticu. Ak k matici $\mathbf{A}$ neexistuje inverzná matica, vznikne nám jeden alebo viac nulových riadkov v upravenej matici $\mathbf{A}$. Hodnosť matice $\mathbf{A}$ bude v tomto prípade menšia ako počet riadkov(stĺpcov) matice $\mathbf{A}$.

Príklad 1.23

Nájdite inverznú maticu k matici $\mathbf{B}$ z príkladu 1.18.

Riešenie:

K matici $\mathbf{B}$ pripíšeme jednotkovú maticu, t.j. vytvoríme maticu v tvare $(\mathbf{B}|\mathbf{I})$. Na riadky tejto matice budeme aplikovať elementárne úpravy s cieľom získať hornú trojuholníkovú maticu z matice $\mathbf{B}$.

Riadky matice označíme opäť číslom a písmenkom. Pomocou tohto označenia uvidíme za maticu, aké elementárne úpravy sme vykonali nad riadkami celej matice.

$$\begin{array}{l}
 \textcolor{red}{1A} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \textcolor{red}{1A} \cdot (-2) + \textcolor{red}{1B} \\ \textcolor{red}{1A} \cdot (-3) + \textcolor{red}{1C} \end{array} \sim \begin{array}{l} \textcolor{green}{2A} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcolor{green}{2B} \cdot \frac{1}{6} + \textcolor{green}{2A} \\ \textcolor{green}{2B} \cdot \frac{1}{6} \\ \textcolor{green}{2B} \cdot (-\frac{1}{6}) + \textcolor{green}{2C} \end{array} \\ \\ \textcolor{blue}{3A} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{6} & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \textcolor{blue}{3B} \\ \textcolor{blue}{3C} \end{array} \end{array} \sim
 \end{array}$$

Zistili sme, že matica $\mathbf{B}$ je regulárna, jej hodnosť sa rovná 3. Keďže inverzná matica k nej existuje, budeme pokračovať v úpravách na jednotkovú maticu a vykonáme na nej napr. nasledujúce elementárne úpravy:

$$\begin{array}{l}
 \textcolor{blue}{3A} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{6} & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcolor{blue}{3C} \cdot \frac{1}{3} + \textcolor{blue}{3A} \\ \textcolor{blue}{3C} \cdot \frac{1}{3} + \textcolor{blue}{3B} \\ \textcolor{blue}{3C} \cdot (-\frac{1}{3}) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{9} & \frac{1}{18} & -\frac{1}{3} \end{array} \right).
 \end{array}$$

$$\text{Matica } \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{11}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{18} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ je inverzná matica k matici } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Správnosť výpočtu môžeme overiť vynásobením oboch matíc, pričom musíme dostať jednotkovú maticu, t.j. $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$.

Príklad 1.24 Úloha na samoštúdium

Majme dané nasledujúce matice:

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -2 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

1. Pre jednotlivé matice vypočítajte inverzné matice, ak existujú.
2. Vyberte si 3 vhodné dvojice matíc a vynásobte ich. Ktoré dvojice matíc nemôžeme vynásobiť?

1.3 Determinanty matice

Pomocou determinantu sa naučíme:

- zistiť, či existuje inverzná matica,
- nájsť inverznú maticu a vyriešiť sústavu lineárnych rovníc,
- nájsť vlastné čísla matice.

Definícia 1.14 *Determinant matice*

Nech $\mathbf{A}_{n \times n}$ je štvorcová matica. Determinant matice $\mathbf{A}$, označený $|\mathbf{A}|$, je číslo, ktoré spočítame rekurentným spôsobom:

1. $|\mathbf{A}_{1 \times 1}| = a_{11}$,
2. $|\mathbf{A}_{n \times n}| = (-1)^{1+1}a_{11}|\mathbf{A}_{11}| + (-1)^{1+2}a_{12}|\mathbf{A}_{12}| + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}|\mathbf{A}_{1n}| = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j}a_{1j}|\mathbf{A}_{1j}|$,
kde $|\mathbf{A}_{1j}|$ je determinant matice, ktorá vznikne vynechaním prvého riadku a j -teho stĺpca matice $\mathbf{A}$,
resp.
 $|\mathbf{A}_{n \times n}| = (-1)^{i+1}a_{i1}|\mathbf{A}_{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i2}|\mathbf{A}_{i2}| + \dots + (-1)^{i+n}a_{in}|\mathbf{A}_{in}| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j}a_{ij}|\mathbf{A}_{ij}|$,
kde $|\mathbf{A}_{ij}|$ je determinant matice, ktorá vznikne vynechaním i -teho riadku a j -teho stĺpca matice $\mathbf{A}$.

Príklad 1.25

Vypočítajte determinant matice $\mathbf{A}$ typu 2×2 podľa definície.

Riešenie:

1. Správime rozvoj podľa 1. riadku:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11} \cdot |\mathbf{A}_{11}| + (-1)^{1+2}a_{12} \cdot |\mathbf{A}_{12}|.$$

2. Vypočítame $|\mathbf{A}_{11}| = |a_{22}| = a_{22}$, $|\mathbf{A}_{12}| = |a_{21}| = a_{21}$ a dostaneme:

$$|\mathbf{A}| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Uvedený postup nazývame **krížové pravidlo** (pozri obrázok 1.10a).

Príklad 1.26

Vypočítajte determinant matice $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$.

Riešenie:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 7 \cdot 3 = 10 - 21 = -11.$$

Príklad 1.27

Vypočítajte determinant matice $\mathbf{A}$ typu 3×3 podľa definície, spravte rozvoj matice podľa 1. riadku.

Riešenie:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11} \cdot |\mathbf{A}_{11}| + (-1)^{1+2}a_{12} \cdot |\mathbf{A}_{12}| + (-1)^{1+3}a_{13} \cdot |\mathbf{A}_{13}|.$$

$$\text{Vypočítame } |\mathbf{A}_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23}, \quad |\mathbf{A}_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{23} \text{ a}$$

$$\text{nakoniec } |\mathbf{A}_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}.$$

Potom výslednú hodnotu determinantu matice $\mathbf{A}$ môžeme zapísať nasledovne:

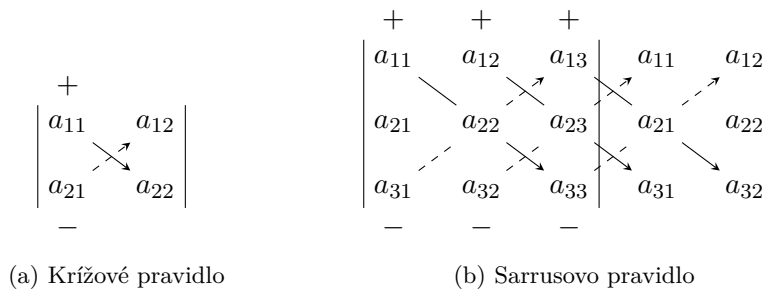
$$|\mathbf{A}| = a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23}) - a_{12}(a_{21} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{23}) + a_{13}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}).$$

Uvedený postup nazývame **Sarrusovo pravidlo** (pozri obrázok 1.10b).

Výpočet determinantov matíc rádu 2 a 3

Nech $\mathbf{A}_{n \times n}$ je regulárna matica.

1. Ak $n = 2$, potom $|\mathbf{A}_{2 \times 2}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
2. Ak $n = 3$, potom $|\mathbf{A}_{3 \times 3}| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$ (**Sarrusovo pravidlo**).



Obr. 1.10: Výpočet determinantov pomocou krížového a Sarrusovho pravidla

Poznámka:

Krížové pravidlo používame len pre výpočet determinantov matice 2×2 . Sarrusovo pravidlo používame len pre výpočet determinantu matice typu 3×3 . Pre výpočet determinantov matíc typu $n \times n$, kde $n > 3$, používame rekurentný vzťah uvedený v definícii 1.14.

Vlastnosti determinantov

1. $\mathbf{A}_{n \times n}$ je regulárna matica $\Leftrightarrow |\mathbf{A}| \neq 0$, t.j. jej riadky sú lineárne nezávislé.
2. $\mathbf{A}_{n \times n}$ je singulárna matica $\Leftrightarrow |\mathbf{A}| = 0$, t.j. jej riadky sú lineárne závislé.
3. Determinant trojuholníkovej matice sa rovná súčinu jej prvkov na diagonále.
1. Nech $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sú matice typu $n \times n$, potom $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.
2. Nech $\mathbf{A}$ je matica typu $n \times n$, potom $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$.
3. Nech $\mathbf{A}$ je regulárna, potom $|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$.

Príklad 1.28

Vypočítajte determinant matice $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

Riešenie:

Pri výpočte použijeme Sarrusovo pravidlo. Pre jednoduchší výpočet pridáme k matici napr. prvé 2 stĺpce vpravo za maticu a vynásobíme prvky v smere hlavnej diagonály:

$$\begin{array}{ccc} + & + & + \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & = 1 \cdot (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \cdot 4 \end{array}$$

a odpočítame súčiny prvkov matice v smere vedľajšej diagonály:

$$\begin{array}{ccc} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & = -(-1) \cdot (-2) \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \\ - & - & - \end{array}$$

Preto: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \cdot 4 - (-1) \cdot (-2) \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 4 = -34.$

Príklad 1.29

Vypočítajte determinant matice $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

Riešenie:

Potrebuje vypočítať determinant matice 4×4 , budeme postupovať podľa definície a spravíme rozvoj podľa 3. riadku, pretože prvok $a_{34} = 0$ a teda sa nám zníži počet počítaných determinantov o jeden. Vyznačíme si daný riadok červenou farbou a podľa neho spravíme rozvoj.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{0} \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot \color{red}{1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot \color{red}{1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+3} \cdot \color{red}{1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot \color{red}{0} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \color{blue}{2} + \color{blue}{2} + \color{blue}{0} + 0 = \color{blue}{4}.$$

Determinanty jednotlivých matíc 3×3 vypočítame pomocou Sarrusovho pravidla. Teraz pripíšeme pod maticu prvé 2 riadky matice, vyznačíme hlavnú diagonálu začínajúcu , vynásobíme prvky hlavnej diagonály a odpočítame súčin prvkov v smere vedľajšej diagonály.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-3) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \cdot 4 - ((-1) \cdot 3 \cdot (-1) + 4 \cdot (-3) \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) \cdot 2) =$$

$$= (-9 + 6 + 8) - (3 + 12 - 12) = \color{blue}{2}.$$

$$(-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (1 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-3) \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 4) - (1 \cdot 3 \cdot (-1) + 4 \cdot (-3) \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 2) =$$

$$= (-1) \cdot ((9 - 6 - 8) - (12 - 12 - 3)) = (-1) \cdot (-2) = \color{blue}{2}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (1 \cdot (-2) \cdot 3 + (-1) \cdot (-3) \cdot 1 + (1) \cdot 2 \cdot (-1)) - (1 \cdot (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-3) \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot (-1)) =$$

$$= (-6 + 3 + 3) - (-6 + 3 + 2) = \color{blue}{0}.$$

Determinant danej matice **A** sa rovná 4.

Príklad 1.30 Úloha na samoštúdium

Vypočítajte determinant matice $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$

1.3.1 Výpočet inverznej matice pomocou determinantov

Inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$ môžeme vypočítať pomocou vzťahu:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

kde $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |\mathbf{A}_{ij}|$ je algebraický doplnok, resp. kofaktor matice $\mathbf{A}$. $|\mathbf{A}_{ij}|$ je determinant matice, keď z pôvodnej matice vynecháme prvky v i -tom riadku a j -tom stĺpci.

Príklad 1.31

Vypočítajte inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$, ak $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Riešenie:

Vypočítame pomocou Sarrusovho pravidla $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -10$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{(2+1)} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{(3+1)} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{(1+2)} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{(2+2)} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{(3+2)} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{(1+3)} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{(2+3)} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{(3+3)} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -4 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Príklad 1.32

Vypočítajte determinant $|\mathbf{A}|$ a inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$ k maticiam:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.4 Sústavy lineárnych rovníc

V tejto kapitole sa naučíme

- zostaviť sústavu lineárnych rovníc pre daný reálny problém,
- ako zapísať danú sústavu lineárnych rovníc do maticového tvaru,
- ako zistiť, či je daná sústava lineárnych rovníc riešiteľná a ak je riešiteľná, tak ako nájsť jej riešenie.

Príklad 1.33

Obchodník má prebytok tovaru t_1, t_2, t_3 . Rozhodne sa pre výpredaj týchto tovarov za zvýhodnenú cenu, ale s tým, že bude predávať len ucelené balíčky, v ktorých má pevne určený počet kusov z jednotlivých tovarov t_1, t_2, t_3 . Vytvoril 3 typy balíčkov B_1, B_2, B_3 :

V balíčku B_1 je 1 ks tovaru t_1 , 2 ks tovaru t_2 a 4 ks tovaru t_3 .

V balíčku B_2 sú 3 ks tovaru t_1 , 2 ks tovaru t_2 a 2 ks tovaru t_3 .

V balíčku B_3 sú 2 ks tovaru t_1 , 1 ks tovaru t_2 a 3 ks tovaru t_3 .

1. Môže zákazník využiť túto ponuku, ak chce kúpiť 20 ks tovaru t_1 , 15 ks tovaru t_2 a 25 ks tovaru t_3 ?
2. Koľko jednotlivých typov balíčkov má zákazník kúpiť?

Riešenie:

Množstvá tovarov v jednotlivých balíčkoch zapíšeme do 3 vektorov: $\mathbf{b}_1 = (1, 2, 4)$, $\mathbf{b}_2 = (3, 2, 2)$, $\mathbf{b}_3 = (2, 1, 3)$.

Odpovede na obe otázky nájdeme pomocou vedomostí o vektoroch a maticiach z predchádzajúcich kapitol. Konkrétne, budeme hľadať takú lineárnu kombináciu jednotlivých balíčkov, aby sme kúpili práve želané množstvo tovaru.

$$x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 = \mathbf{p},$$

kde:

- $\mathbf{p} = (20, 15, 25)$ je vektor priradený nákupu klienta,
- x_1 bude odporúčané množstvo balíčkov B_1 ,
- x_2 bude odporúčané množstvo balíčkov B_2 ,
- x_3 bude odporúčané množstvo balíčkov B_3 klientovi, ak bude chcieť využiť ponuku.

Hodnoty x_1, x_2 , a x_3 sú neznáme hodnoty.

Z matematického hľadiska hľadáme koeficienty x_1, x_2, x_3 lineárnej kombinácie. Tieto koeficienty sú zložky vektora neznámych $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Ukážeme si, ako využiť maticový prístup pre riešenie uvedenej úlohy.

1. Do rovnosti $x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 = \mathbf{p}$ dosadíme známe hodnoty $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ a $\mathbf{b}_3$:

$$x_1(1, 2, 4) + x_2(3, 2, 2) + x_3(2, 1, 3) = (20, 15, 25).$$

2. Upravíme predošlý vzťah pomocou operácie skalárny násobok vektora. V tomto prípade sú skaláre neznáme hodnoty x_1, x_2, x_3 :

$$(1x_1, 2x_1, 4x_1) + (3x_2, 2x_2, 2x_2) + (2x_3, 1x_3, 3x_3) = (20, 15, 25).$$

3. Spočítame zložky vektorov na ľavej strane a porovnáme so zložkami vektora na pravej strane rovnosti. Dostaneme sústavu lineárnych rovníc:

$$1x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 20$$

$$2x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 15$$

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 25.$$

Sústavu budeme riešiť niektorou z tu uvedených metód. Najskôr si riešenú problematiku priblížime z teoretického uhla pohľadu.

1.4.1 Maticový prístup riešenia sústavy lineárnych rovníc

Definícia 1.15 *Sústava lineárnych rovníc*

Systém rovníc:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots + \cdots + \ddots + \vdots = \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

nazývame **sústavou m lineárnych rovníc pre n neznámych**, pričom $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{mn}$ sú dané reálne čísla a $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú reálne čísla a sú to neznáme hodnoty.

Maticový zápis sústavy lineárnych rovníc

Každému systému lineárnych rovníc vieme priradiť **maticu sústavy $\mathbf{A}$, vektor pravých strán $\mathbf{b}$ a vektor neznámych $\mathbf{x}$** :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Potom výraz:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

predstavuje maticový zápis sústavy lineárnych rovníc.

Rozšířená matica sústavy lineárnych rovníc

Systému lineárnych rovníc vieme priradiť **rozšírenú maticu sústavy**:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Riešiteľnosť sústavy lineárnych rovníc

Problém riešiteľnosti sústavy lineárnych rovníc vyriešil matematik Frobenius. V nasledujúcej časti uvádzame jeho vetu o riešiteľnosti sústavy lineárnych rovníc.

Veta 1.1 *Frobeniova veta*

Sústava lineárnych rovníc má riešenie práve vtedy, keď hodnosť $h(\mathbf{A})$ matice sústavy $\mathbf{A}$ sa rovná hodnosti **rozšírenej matice sústavy** $h'(\mathbf{A})$. Pre riešenie sústavy lineárnych rovníc platí:

- Ak je sústava riešiteľná a ak sa hodnosť matice sústavy rovná počtu neznámych (t.j. n), tak má sústava **práve jedno riešenie** ($h(\mathbf{A}) = h'(\mathbf{A}) = n$).
- Ak je sústava riešiteľná a ak je hodnosť matice sústavy menšia než počet neznámych (t.j. $h(\mathbf{A}) < n$), tak má sústava **nekonečne veľa riešení**, pričom číslo $n - h(\mathbf{A})$ udáva počet voliteľných neznámych. Tie volíme ľubovoľne. Platí, že ostatné neznáme závisia od tejto voľby.

Riešiteľnosť sústavy lineárnych rovníc – zhrnutie

1. Ak $h(\mathbf{A}) < h'(\mathbf{A})$, tak sústava **nemá riešenie**.
2. Ak $h(\mathbf{A}) = h'(\mathbf{A})$ sústava má:
 - práve **jedno riešenie**, ak $h(\mathbf{A}) = h'(\mathbf{A}) = n$,
 - **nekonečne veľa riešení**, ak $h(\mathbf{A}) = h'(\mathbf{A}) < n$, pričom $n - h(\mathbf{A})$ je počet voliteľných neznámych (parametrov).

Ekvivalentné úpravy a riešiteľnosť sústavy lineárnych rovníc

- Množina riešení sústavy lineárnych rovníc sa nemení, ak na **riadkoch** rozšírenej matice sústavy vykonáme úpravy, ktoré nemenia jej hodnosť (elementárne úpravy).
- Ak upravujeme stĺpce rozšírenej matice sústavy pomocou elementárnych úprav, tak je nutné aj adekvátne zmeniť poradie neznámych v sústave lineárnych rovníc.

1.4.2 Metódy riešenia sústavy lineárnych rovníc

Metódy riešenia sústavy lineárnych rovníc môžeme rozdeliť na:

1. Všeobecne platné metódy bez obmedzenia na typ matice sústavy lineárnych rovníc:
 - Gaussova eliminačná metóda,
 - Jordanova metóda.
2. Metódy, ktoré je možné použiť, iba ak je sústava lineárnych rovníc typu $n \times n$ a je regulárna:
 - Cramerovo pravidlo pre určenie riešenia sústavy lineárnych rovníc,
 - Využitie inverznej matice pre riešenie sústavy lineárnych rovníc,
 - Maticové riešenie sústavy lineárnych rovníc.

1.4.3 Gaussova eliminačná metóda

1. Rozšírenú maticu sústavy upravíme elementárnymi úpravami na **odstupňovaný tvar** (pozri str. 25).
2. Zistíme riešiteľnosť sústavy, určíme hodnotu matice sústavy a hodnotu rozšírenej matice sústavy (pozri Frobeniovu vetu 1.1).
3. Ak je sústava riešiteľná, tak použijeme metódu spätnej substitúcie. Pre maticu v odstupňovanom tvare z poslednej rovnice vypočítame poslednú neznámu, dosadíme do predchádzajúcej rovnice, vypočítame neznámu s predchádzajúcim indexom, atď.

Vrátime sa k nášmu príkladu 1.33 zo strany 38 a vyriešime ho Gaussovou eliminačnou metódou.

Riešenie príkladu 1.33 Gaussovou eliminačnou metódou:

V predchádzajúcom sme zistili, že potrebujeme vyriešiť nasledujúcu sústavu lineárnych rovníc:

$$1x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 20$$

$$2x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 15$$

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 25.$$

Teraz našej sústave priradíme rozšírenú maticu sústavy $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$. Ide o maticu typu 3×4 , preto jej hodnota $h'(\mathbf{A}) \leq 3$. Nad rozšírenou maticou sústavy vykonáme elementárne úpravy s cieľom získať maticu v odstupňovanom tvare. Jednotlivé riadky sústavy sme si teraz označili rímskymi číslicami a pomocné výpočty pre elementárne úpravy sme uviedli pod maticu. Ak čtenému čitateľovi viac vyhovuje spôsob označovania riadkov, ktorý sme použili v predchádzajúcich častiach učebnice, môže ho samozrejme používať i naďalej.

$$\begin{array}{l} \text{1A} \\ \text{1B} \\ \text{1C} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 20 \\ 2 & 2 & 1 & 15 \\ 4 & 2 & 3 & 25 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} \text{2A} \\ \text{2B} \\ \text{2C} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 20 \\ 0 & 4 & 3 & 25 \\ 0 & 2 & 1 & 11 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 20 \\ 0 & 4 & 3 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Tu uvádzame možné elementárne úpravy, ktoré sme použili pri riešení sústavy lineárnych rovníc.

$1A \cdot (-2) + 1B$	$1A \cdot (-4) + 1C$	$2B + 2C \cdot (-2)$
-2 -6 -4 -40	-4 -12 -8 -80	0 4 3 25
2 2 1 15	4 2 3 25	0 -4 -2 -22
0 -4 -3 -25 / $\cdot (-1)$	0 -10 -5 -55 / $\cdot (-\frac{1}{5})$	0 0 1 3

Teraz sme schopní určiť hodnotu matice sústavy a hodnotu rozšírenej matice sústavy. Vidíme, že $h(\mathbf{A}) = 3$, $h'(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$, pričom počet neznámych je $n = 3$. Keďže platí, že $h(\mathbf{A}) = h'(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n = 3$, podľa Frobeniovej vety (1.1) platí, že daná sústava rovníc práve jedno riešenie.

Odpoveď na otázku: „Môže zákazník využiť túto ponuku, ak chce kúpiť 20 ks tovaru t_1 , 15 ks tovaru t_2 a 25 ks tovaru t_3 ?“ je **áno**, môže využiť ponuku, pretože sme zistili, že sústava je riešiteľná a má práve jedno riešenie. Zákazníkovi dáme práve jednu možnosť, koľko má jednotlivých balíčkov kúpiť.

Budeme pokračovať v riešení a koeficienty odstupňovanej matice prepíšeme do sústavy lineárnych rovníc (upravenú maticu sústavy vynásobíme vektorom $\mathbf{x}$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 20 \\ 0 & 4 & 3 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad \text{resp.} \quad \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 20 \quad (1) \\ 4x_2 + 3x_3 = 25 \quad (2) \\ x_3 = 3 \quad (3) \end{array}$$

Poznamenajme, že jednotlivé rovnice sme si označili (1), (2), (3).

Z rovnice (3) vypočítame hľadanú hodnotu $x_3 = 3$, dosadíme ju do rovnice (2) a vypočítame hodnotu x_2 :

$$\begin{aligned} 4x_2 + 3 \cdot 3 &= 25 \\ 4x_2 &= 25 - 9 \\ 4x_2 &= 16 \\ x_2 &= 4. \end{aligned}$$

Vypočítané hodnoty x_2, x_3 dosadíme do rovnice (1) a vypočítame hodnotu x_1 :

$$\begin{aligned} 1x_1 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 &= 20 \\ x_1 + 12 + 6 &= 20 \\ x_1 &= 20 - 18 \\ x_1 &= 2. \end{aligned}$$

Vypočítali sme hodnoty všetkých neznámych x_1, x_2, x_3 , t.j. vektor $\mathbf{x} = (2, 4, 3)$. Zároveň sme zistili odpoveď na druhú otázku: „Koľko jednotlivých typov balíčkov má kúpiť?“

Odporúčanie zákazníkovi: Ak chce zákazník využiť ponuku a kúpiť želané množstvo tovarov t_1, t_2, t_3 , tak má kúpiť 2 balíčky B_1 , 4 balíčky B_2 a 3 balíčky B_3 .

1.4.4 Jordanova metóda

Jordanovu metódu budeme realizovať v nasledujúcich krokoch:

1. Rozšírenú maticu sústavy upravíme elementárnymi úpravami na **odstupňovaný** tvar (pozri str. 25).
2. Zistíme riešiteľnosť sústavy, t.j. určíme hodnotu matice sústavy a rozšírenej matice sústavy (pozri str. 40).
3. Ak je sústava riešiteľná, tak pokračujeme v úpravách matice až získame jednotkovú maticu.
4. Riešením sústavy je vektor, ktorého zložky sú v poslednom stĺpci rozšírenej matice sústavy.

Ukážeme si ako vypočítať príklad 1.33 Jordanovou metódou.

Riešenie príkladu 1.33 Jordanovou metódou:

Maticu v odstupňovanom tvare upravíme na jednotkovú maticu. Návrh možných elementárnych úprav uvádzame neskôr.

$$\begin{array}{l} \text{1A} \\ \text{1B} \\ \text{1C} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 20 \\ 0 & 4 & 3 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} \text{2A} \\ \text{2B} \\ \text{2C} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} \text{3A} \\ \text{3B} \\ \text{3C} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Opäť tu uvádzame pomocné výpočty.

$$\begin{array}{r|l} \text{1C} \cdot (-3) + \text{1B} & \\ \hline 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 4 & 3 & 25 \\ \hline 0 & 4 & 0 & 16 & / \cdot \frac{1}{4} \end{array} \quad \begin{array}{r|l} \text{2C} \cdot (-2) + \text{2A} & \\ \hline 0 & 0 & -2 & -6 \\ 1 & 3 & 2 & 20 \\ \hline 1 & 3 & 0 & 14 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} \text{3B} \cdot (-3) + \text{3A} & \\ \hline 0 & -3 & 0 & -12 \\ 1 & 3 & 0 & 14 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

Vektor $(2, 4, 3)^T$ v poslednom stĺpci rieši sústavu lineárnych rovníc z príkladu 1.33. Rozdiel v použití Gaussovej a Jordanovej metódy spočíva v tom, či maticu v odstupňovanom tvare prepíšeme do systému rovníc a doriešime spätným dosadzovaním vypočítaných premenných, alebo všetky elementárne úpravy spravíme v maticiach s cieľom získať jednotkovú maticu.

Príklad 1.34

Uvažujme rovnaký problém ako v príklade 1.33, ale teraz budú balíčky obsahovať nasledujúce počty jednotlivých tovarov t_1, t_2, t_3 :

V balíčku B_1 je 1 ks tovaru t_1 , 2 ks tovaru t_2 a 4 ks tovaru t_3 .

V balíčku B_2 sú 3 ks tovaru t_1 , 0 ks tovaru t_2 a 2 ks tovaru t_3 .

V balíčku B_3 sú 2 ks tovaru t_1 , 1 ks tovaru t_2 a 3 ks tovaru t_3 .

Zákazník chce kúpiť rovnaké množstvo tovarov ako v príklade 1.33, teda chce kúpiť 20 ks tovaru t_1 , 15 ks tovaru t_2 a 25 ks tovaru t_3 . Opäť sa pýtame rovnaké otázky:

1. Môže zákazník využiť túto ponuku?
2. Koľko jednotlivých typov balíčkov má zákazník kúpiť?

Riešenie:

Budeme postupovať podobne ako v riešení príkladu 1.33:

1. Vytvoríme lineárnu kombináciu jednotlivých balíčkov:

$$x_1(1, 2, 4) + x_2(3, 0, 2) + x_3(2, 1, 3) = (20, 15, 25).$$

2. Úlohu zapíšeme v maticovom tvare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

3. Sústavu lineárnych rovníc prepíšeme do rozšírenej matice sústavy a upravíme elementárnymi úpravami do odstupňovaného tvaru (odporúčané úpravy nájdeme nižšie).

$$\begin{array}{l} \text{1A} \\ \text{1B} \\ \text{1C} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 20 \\ 2 & 0 & 1 & | & 15 \\ 4 & 2 & 3 & | & 25 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{l} \text{2A} \\ \text{2B} \\ \text{2C} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 20 \\ 0 & 6 & 3 & | & 25 \\ 0 & 2 & 1 & | & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 20 \\ 0 & 6 & 3 & | & 25 \\ 0 & 0 & 0 & | & 8 \end{pmatrix}.$$

Tu opäť uvádzame pomocné výpočty:

1A · (-2) + 1B	1A · (-4) + 1C	2B · (-1) + 2C · 3
-2 -6 -4 -40	-4 -12 -8 -80	0 -6 -3 -25
2 0 1 15	4 2 3 25	0 6 3 33
0 -6 -3 -25 / · (-1)	0 -10 -5 -55 / · (- $\frac{1}{5}$)	0 0 0 8

Teraz môžeme určiť hodnotu matice sústavy a hodnotu rozšírenej matice sústavy: $h(\mathbf{A}) = 2$, $h'(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$. Pripomeňme si, že počet neznámych $n = 3$. Platí $h(\mathbf{A}) < h'(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ a preto daná sústava rovníc nemá riešenie (pozri Frobeniovu vetu 1.1).

Odpoveď na otázku: „Môže zákazník využiť túto ponuku ak chce kúpiť 20 ks tovaru t_1 , 15 ks tovaru t_2 a 25 ks tovaru t_3 ?“ je **nemôže**, pretože sme zistili, že sústava nie je riešiteľná.

Odpoveď na otázku: „Koľko jednotlivých typov balíčkov má zákazník kúpiť?“ Ak predajca nedá do balíčka B_2 žiaden tovar t_2 , tak zákazník nemá možnosť využiť ponuku balíčkov, aby kúpil želané množstvo tovarov.

Poznámky

- Všimnime si posledný riadok odstupňovanej matice

$$(0 \ 0 \ 0 \ | \ 8).$$

Ak by sme ho prepísali do rovnice, dostaneme

$$0 = 8.$$

Z toho je ale zrejmé, že táto rovnosť neplatí a preto daná sústava lineárnych rovníc nemá riešenie.

- Zadanie príkladov 1.33 a 1.34 sa líšilo len v počte kusov tovarov t_2 v balíčku B_2 .

Všeobecné a partikulárne riešenie

Na záver si ukážeme prípad, keď má sústava lineárnych rovníc nekonečne veľa riešení. Podľa Frobeniovej vety je to v prípade, keď platí $h(\mathbf{A}) = h'(\mathbf{A}) < n$.

1. Ak má sústava lineárnych rovníc nekonečne veľa riešení, tak nájdeme tzv. **všeobecné riešenie**, ktoré popisuje množinu všetkých riešení danej sústavy. Za voliteľné neznáme volíme parametre (napr. $t, r, s, \dots$) a ostatné neznáme vyjadríme pomocou týchto parametrov.
2. **Partikulárne riešenie** získame po dosadení konkrétnych hodnôt za parametre $t, r, s, \dots$ vo všeobecnom riešení.

Príklad 1.35

Uvažujme nasledujúcu modifikáciu príkladu 1.33.

Nech obchodník vytvorí 4 typy balíčkov B_1, B_2, B_3, B_4 nasledovne:

V balíčku B_1 je 1 ks tovaru t_1 , 2 ks tovaru t_2 a 4 ks tovaru t_3 .

V balíčku B_2 sú 3 ks tovaru t_1 , 2 ks tovaru t_2 a 2 ks tovaru t_3 .

V balíčku B_3 sú 2 ks tovaru t_1 , 1 ks tovaru t_2 a 3 ks tovaru t_3 .

V balíčku B_4 sú 3 ks tovaru t_1 , 3 ks tovaru t_2 a 7 ks tovaru t_3 .

Zákazník chce kúpiť rovnaké množstvo tovarov ako v prvom príklade, teda chce kúpiť 20 ks tovaru t_1 , 15 ks tovaru t_2 a 25 ks tovaru t_3 .

Opäť zodpovieme tieto otázky:

1. Môže zákazník využiť túto ponuku?
2. Koľko jednotlivých typov balíčkov má zákazník kúpiť?

Riešenie:

Budeme postupovať ako v riešení príkladu 1.33. Opäť vytvoríme lineárnu kombináciu 4 balíčkov:

$$x_1(1, 2, 4) + x_2(3, 2, 2) + x_3(2, 1, 3) + x_4(3, 3, 7) = (20, 15, 25),$$

a úlohu zapíšeme v maticovom tvare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Teraz prepíšeme sústavu lineárnych rovníc do rozšírenej matice sústavy a upravíme elementárnymi úpravami do odstupňovaného tvaru, odporúčané úpravy opäť nájdeme nižšie.

$$\begin{array}{l} \text{1A} \\ \text{1B} \\ \text{1C} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & 20 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 15 \\ 4 & 2 & 3 & 7 & 25 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} \text{2A} \\ \text{2B} \\ \text{2C} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 25 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 11 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Nakoniec opäť uvádzame použité pomocné výpočty:

$$\begin{array}{r} \text{1A} \cdot (-2) + \text{1B} \\ \hline -2 \quad -6 \quad -4 \quad -6 \quad -40 \\ 2 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad 15 \\ \hline 0 \quad -4 \quad -3 \quad -3 \quad -25 \quad / \cdot (-1) \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{1A} \cdot (-4) + \text{1C} \\ \hline -4 \quad -12 \quad -8 \quad -12 \quad -80 \\ 4 \quad 2 \quad 3 \quad 7 \quad 25 \\ \hline 0 \quad -10 \quad -5 \quad -5 \quad -55 \quad / \cdot (-\frac{1}{5}) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{2B} \cdot (-1) + \text{2C} \cdot 2 \\ \hline 0 \quad -4 \quad -3 \quad -3 \quad -25 \\ 0 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \quad 22 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad -3 \quad / \cdot (-1) \end{array}$$

Teraz určíme hodnotu matice sústavy a hodnotu rozšírenej matice sústavy: $h(\mathbf{A}) = 3$, $h'(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$. Počet neznámych je $n = 4$, a keďže platí $h(\mathbf{A}) = h'(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n$, má daná sústava rovníc nekonečne veľa riešení (vyplýva z Frobeniovej vety 1.1)). Pretože $n - h = 4 - 3 = 1$, v riešení úlohy bude vystupovať iba 1 voliteľný parameter, označíme ho t .

Odpoveď na otázku: „Môže zákazník využiť túto ponuku ak chce kúpiť 20 ks tovaru t_1 , 15 ks tovaru t_2 a 25 ks tovaru t_3 ?“ je **áno**, pretože sme zistili, že sústava lineárnych rovníc je riešiteľná. Dokonca má nekonečne veľa riešení.

Má ale ozaj nekonečne veľa možností? Keď vezmeme do úvahy, že sa nedá kúpiť záporné množstvo tovarov, z ekonomického hľadiska má úloha len niekoľko možných riešení. Nájdeme ich.

V riešení budeme pokračovať Jordanovou metódou. Maticu v odstupňovanom tvare upravíme na jednotkovú maticu.

Riešenie:

$$\begin{array}{l} \text{1A} \\ \text{1B} \\ \text{1C} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} \text{2A} \\ \text{2B} \\ \text{2C} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Ako obyčajne, znova uvádzame pomocné výpočty:

$$\begin{array}{r} \text{1C} \cdot (-1) + \text{1B} \\ \hline 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad -3 \\ 0 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 11 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 8 \quad / \cdot \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{1C} \cdot (-2) + \text{1A} \\ \hline 0 \quad 0 \quad -2 \quad -2 \quad -6 \\ 1 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad 20 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 14 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{2B} \cdot (-3) + \text{2A} \\ \hline 0 \quad -3 \quad 0 \quad 0 \quad -12 \\ 1 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 14 \\ \hline 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \end{array}$$

metódy. V prípade, že má sústava nekonečne veľa riešení, nájdite všeobecné riešenie a 2 konkrétne riešenia.

$$\begin{array}{ll}
 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 & x_1 + x_2 = 4 \\
 x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 3 & 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3 \\
 x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3 & x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\
 \\
 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 & 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\
 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 9 & x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\
 x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 8 & x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\
 \\
 -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 & 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\
 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 & 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -3 \\
 x_1 + x_3 + x_4 = 3 & 4x_1 - x_2 - x_3 = 4
 \end{array}$$

1.4.5 Maticové rovnice

Maticové rovnice zvyčajne zapisujeme v tvare:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B},$$

kde $\mathbf{A}$ je matica typu $m \times n$, $\mathbf{B}$ je matica typu $m \times p$ a $\mathbf{X}$ je neznáma matica (matica neznámych hodnôt) typu $n \times p$.

Maticové rovnice riešime pomocou nasledujúceho postupu. Majme rovnicu:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}.$$

Po vynásobení zľava inverznou maticou $\mathbf{A}^{-1}$ dostaneme:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

Môžu nastať 2 prípady:

- Matica $\mathbf{A}$ je regulárna. Maticová rovnica má práve jedno riešenie $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.
- Matica $\mathbf{A}$ je singulárna. Riešenie musíme hľadať pomocou Gaussovej eliminačnej alebo Jordanovej metódy. V tomto prípade je sústava buď neriešiteľná, alebo má nekonečne veľa riešení.

Ak majú matice $\mathbf{B}$ a $\mathbf{X}$ len jeden stĺpec, t.j. sú typu $m \times 1$, hovoríme o sústave lineárnych rovníc. Každú takúto sústavu lineárnych rovníc môžeme zapísať ako maticovú rovnicu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a jej riešenie môžeme nájsť v tvare $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Príklad 1.38

Vyriešte maticovú rovnicu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{C} + 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{X}$, pre neznámu maticu $\mathbf{X}$.

1. Nájdite maticové vyjadrenie riešenia danej sústavy.

2. Určte, kedy je daná sústava riešiteľná.

Riešenie:

Budeme postupovať nasledovne:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{C} + 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{X} \quad / - 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{X}$$

Odpočítame výraz z pravej strany s neznámou maticou $\mathbf{X}$, matica konštánt zostane na pravej strane.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} - 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{C}$$

Vyjmeme maticu $\mathbf{X}$ za zátvorku vpravo (pozor maticové násobenie nie je komutatívne).

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{B}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{C}$$

Za predpokladu, že existuje inverzná matica k matici $(\mathbf{A} - 2\mathbf{B})$, tak existuje hľadaná matica $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{C}$$

Inverzná matica existuje, ak matica $(\mathbf{A} - 2\mathbf{B})$ je regulárna, t.j. je typu $n \times n$. Matica $\mathbf{C}$ je potom typu $n \times k$, kde k je ľubovoľné kladné celé číslo.

Príklad 1.39

Vyriešte maticovú rovnicu $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C} - 2 \cdot \mathbf{X}$ pre neznámu maticu $\mathbf{X}$.

1. Nájdite maticové vyjadrenie riešenia danej sústavy.
2. Určte, kedy je daná sústava riešiteľná.

Riešenie:

Budeme postupovať nasledovne:

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C} - 2 \cdot \mathbf{X} \quad / + 2 \cdot \mathbf{X}$$

Odpočítame výraz z pravej strany s neznámou maticou $\mathbf{X}$, matica konštánt zostane na pravej strane.

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} + 2 \cdot \mathbf{X} = \mathbf{C}$$

Pozícia matice $\mathbf{X}$ vo výrazoch je aj naľavo aj na pravo. Priamo sa vyňať za/pred zátvorku nedá, keďže maticové násobenie nie je komutatívne. Preto výraz $2\mathbf{X}$ vynásobíme jednotkovou maticou $\mathbf{I}$.

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{X} \cdot 2\mathbf{I} = \mathbf{C}$$

Teraz môžeme vyňať maticu $\mathbf{X}$ pred zátvorku na ľavej strane rovnice:

$$\mathbf{X} \cdot (\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) = \mathbf{C}$$

Za predpokladu, že existuje inverzná matica k matici $(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})$, existuje hľadaná matica $\mathbf{X}$.

$$\mathbf{X} = \mathbf{C}(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})^{-1}$$

Inverzná matica opäť existuje, ak matica $(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})$ je regulárna, t.j. je typu $n \times n$. Matica $\mathbf{C}$ je potom typu $k \times n$, kde k je ľubovoľné kladné celé číslo.

Príklad 1.40

Vyriešte maticovú rovnicu $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C} - 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{X}$, pre neznámu maticu $\mathbf{X}$.

1. Nájdite maticové vyjadrenie riešenia danej sústavy.
2. Určte, kedy je daná sústava riešiteľná.

Riešenie:

Budeme postupovať nasledovne:

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C} - 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{X} \quad / - 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{X}$$

Odpočítame výraz z pravej strany s neznámou maticou $\mathbf{X}$, matica konštánt zostane na pravej strane.

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} - 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{C}$$

Pozícia matice $\mathbf{X}$ vo výrazoch je aj naľavo aj na pravo. Priamo sa matica $\mathbf{X}$ vyňať za/pred zátvorku nedá (maticové násobenie nie je komutatívne). Teraz už musíme výraz na ľavej strane roznásobiť a upraviť do systému rovníc.

$$\text{Majme matice } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 40 & 20 \\ 20 & 80 \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Po maticovom vynásobení dostaneme nasledujúcu sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 40 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_4 &= 20 \\ -4x_1 - x_3 + 3x_4 &= 20 \\ -4x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 80 \end{aligned}$$

Sústavu prepíšeme do rozšírenej matice sústavy:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & -2 & 0 & 40 \\ 2 & 4 & 0 & -2 & 20 \\ -4 & 0 & -1 & 3 & 20 \\ 0 & -4 & 2 & -2 & 80 \end{array} \right)$$

Túto sústavu vyriešime pomocou Gaussovej eliminačnej alebo Jordanovej metódy, prípadne sústavu vyriešime pomocou inverznej matice (ak existuje) alebo pomocou Cramerovho pravidla.

Riešenie je $x_1 = -150$, $x_2 = -110$, $x_3 = -560$, $x_4 = -380$.

Riešenie sústav lineárnych rovníc pomocou Cramerovho pravidla

Veta 1.2

Nech je matica $\mathbf{A}$ sústavy lineárnych rovníc regulárna. Potom táto sústava lineárnych rovníc má práve jedno riešenie a môžeme ho vypočítať pomocou Cramerovho pravidla:

Označme $\mathbf{A}_i$ maticu, ktorá vznikne z matice sústavy $\mathbf{A}$ nahradením i -teho stĺpca vektorom $\mathbf{B}$ (t.j. stĺpcom pravých strán). Potom i -tu neznámu x_i vypočítame podľa vzťahu:

$$x_i = \frac{|\mathbf{A}_i|}{|\mathbf{A}|} \quad (1.1)$$

Príklad 1.41

Vyriešte sústavu lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_3 &= 2 \\ -x_1 - x_2 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Riešenie:

Podľa Cramerovho pravidla vypočítame jednotlivé determinanty matice sústavy a nájdeme jednotlivé neznáme:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_3 &= 2 \\ -x_1 - x_2 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0, & |\mathbf{A}_1| &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}, \\ |\mathbf{A}_2| &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}, & |\mathbf{A}_3| &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Determinant matice sústavy sa rovná 0 a preto danú sústavu lineárnych rovníc nemožno riešiť pomocou Cramerovho pravidla. Odporúčame nájsť hodnotu matice sústavy a zistiť či je sústava lineárnych rovníc riešiteľná. Ak je riešiteľná, má nekonečne veľa riešení, ktoré nájdeme pomocou Gaussovej eliminačnej metódy alebo Jordanovou metódou.

Príklad 1.42

Použite Cramerovo pravidlo a vypočítajte jednotlivé determinanty matice sústavy a nájdite hodnoty jednotlivých neznámych:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= -9 \\ -4x_1 + 5x_2 &= 22 \end{aligned}$$

Riešenie:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ -4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -3, \quad |\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} -5 & -1 & 3 \\ -9 & -2 & 4 \\ 22 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 9,$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 3 & -9 & 4 \\ -4 & 22 & 0 \end{vmatrix} = -6, \quad |\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 3 & -2 & -9 \\ -4 & 5 & 22 \end{vmatrix} = -3.$$

Pomocou vzťahu (1.1) dostaneme $x_1 = \frac{9}{(-3)} = -3$, $x_2 = \frac{-6}{(-3)} = 2$ a $x_3 = \frac{-3}{(-3)} = 1$. Danú sústavu rieši vektor $(-3, 2, 1)^T$.

Homogénna sústava lineárnych rovníc

Homogénnou sústavou lineárnych rovníc nazveme takú sústavu lineárnych rovníc, ktorá má v každom riadku na pravej strane **nulu**.

Homogénna sústava lineárnych rovníc je vždy riešiteľná. Má buď:

- triviálne riešenie – všetky neznáme sa rovnajú nule,
- netriviálne riešenie – aspoň jedna neznáma je rôzna od nuly.

Vlastnosti homogénnej sústavy lineárnych rovníc

1. Homogénna sústava lineárnych rovníc je vždy riešiteľná:
 - ak je $h(\mathbf{A}) = n$, tak má sústava práve jedno riešenie, tzv. triviálne riešenie,
 - ak je $h(\mathbf{A}) < n$, tak má sústava nekonečne veľa riešení a $n - h(\mathbf{A})$ je počet voliteľných neznámych.
2. **Súčet** ľubovoľných riešení (t.j. súčet vektorov riešení) homogénnej sústavy je opäť riešením tejto sústavy.
3. **Ľubovoľný násobok** riešenia homogénnej sústavy je opäť riešením tejto sústavy.
4. Všeobecné riešenie homogénnej sústavy je lineárnou kombináciou $n - h(\mathbf{A})$ (počet voliteľných neznámych) lineárne nezávislých partikulárnych riešení tejto sústavy.

Príklad 1.43

Vyriešte homogénnu sústavu lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + 7x_3 - 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Riešenie:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ -2 & -7 & 7 & -6 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right).$$

Prepíšeme maticový zápis do sústavy lineárnych rovníc a dostaneme:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ -3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0\end{aligned}$$

Keďže $h(\mathbf{A}) = h'(\mathbf{A}) = 2$, $n = 4$, $n - h(\mathbf{A}) = 2$, zvolíme 2 parametre s a t a dostaneme $x_4 = t$, $x_3 = s$. Nakoniec dopočítame zvyšné neznáme $x_2 = -\frac{1}{3}(2t + s)$ a $x_1 = -\frac{1}{3}(16t + 7s)$.

Všeobecné riešenie je $(-\frac{16}{3}t + \frac{7}{3}s, \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}s, s, t)$ resp. $s(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0) + t(-\frac{16}{3}, \frac{2}{3}, 0, 1)$.

Partikulárne riešenie získame, keď napr. dosadíme $s = 1$, $t = 0$ alebo $s = 3$, $t = 1$ a pod.

Riešenie nehomogénnej sústavy lineárnych rovníc pomocou všeobecného riešenia príslušnej homogénnej sústavy lineárnych rovníc

Nech $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ je systém m lineárnych rovníc pre n neznámych a nech hodnosť matice sústavy $h(\mathbf{A})$ je rovná p (t.j. $h(\mathbf{A}) = p$), pričom $p < n$.

Nech $S_H = \{\mathbf{x}_H \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}_H = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_{n-p} \mathbf{x}_{n-p}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-p} \in \mathbb{R}\}$ je všeobecné riešenie homogénnej sústavy lineárnych rovníc $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ a nech $\mathbf{x}_N$ je jedno partikulárne riešenie nehomogénnej sústavy lineárnych rovníc $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Potom množinu riešení S sústavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ môžeme zapísať nasledovne:

$$\begin{aligned}S &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}_H + \mathbf{x}_N, \mathbf{x}_H \in S_H\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_{n-p} \mathbf{x}_{n-p} + \mathbf{x}_N, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-p} \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Príklad 1.44

Vyriešte sústavu lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -2 \\ -2x_1 - 7x_2 + 7x_3 - 6x_4 &= 5\end{aligned}$$

Riešenie:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & -2 \\ -2 & -7 & 7 & -6 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

Prepíšeme maticový zápis do sústavy lineárnych rovníc a dostaneme:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -2 \\ -3x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1\end{aligned}$$

Keďže $h(\mathbf{A}) = h'(\mathbf{A}) = 2$, $n = 4$, $n - h(\mathbf{A}) = 2$, zvolíme 2 parametre s a t a dostaneme $x_4 = t$, $x_3 = s$. Nakoniec dopočítame zvyšné neznáme $x_2 = \frac{1}{3}(-1 + 2t + s)$, $x_1 = \frac{1}{3}(-4 - 16t + 7s)$.

Všeobecné riešenie je $(-\frac{4}{3} - \frac{16}{3}t + \frac{7}{3}s, \frac{1}{3}(-1 + 2t + s), s, t)$ resp. $(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 0) + s(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0) + t(-\frac{16}{3}, \frac{2}{3}, 0, 1)$.

Partikulárne riešenie získame, keď napr. $s = 1$, $t = 0$ alebo $s = 3$, $t = 1$ a podobne.

Všimnime si, že všeobecné riešenie nehomogénnej sústavy lineárnych rovníc sme zapísali ako súčet všeobecného riešenia prislúchajúceho homogénnej sústave lineárnych rovníc a konkrétneho riešenia nehomogénnej sústavy lineárnych rovníc.

Príklad 1.45 Úloha pre samoštúdium

Vyriešte sústavy lineárnych rovníc:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 & x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 0 & 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 & -x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 3 \end{array}$$

1.5 Vlastné vektory a vlastné čísla

Matice ako lineárne transformácie

Uvažujme maticu $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ a vektor $\mathbf{x}$ typu $n \times 1$. Súčin $\mathbf{Ax}$ je vektor $\mathbf{y}$ typu $m \times 1$. Môžeme povedať, že matica $\mathbf{A}$ je matica lineárnych transformácií, ktorá transformuje n -rozmerný vektor $\mathbf{x}$ do m -rozmerného vektora $\mathbf{y}$.

Spomedzi všetkých vektorov budeme hľadať taký vektor, ktorý matica $\mathbf{A}$ zobrazí do lineárne závislého vektora.

Vlastný vektor $\mathbf{w}$ štvorcovej matice $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ je taký vektor $\mathbf{w}$, pre ktorý platí:

$$\mathbf{Aw} = \lambda \mathbf{w},$$

pre istú konštantu λ (λ je neznáme reálne alebo komplexné číslo), ktorú nazývame **vlastné číslo** zodpovedajúce vlastnému vektoru $\mathbf{w}$.

Charakteristická rovnica

Vlastné vektory hľadáme riešením tzv. charakteristickej rovnice:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Každé nenulové riešenie $\mathbf{w}$ tejto homogénnej rovnice je vlastným vektorom matice $\mathbf{A}$. Nenulové riešenie existuje práve vtedy, keď matica $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ je singulárna, t.j. práve vtedy keď:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0.$$

Vlastnosti vlastných vektorov a čísel

- Vlastné vektory zodpovedajúce rôznym vlastným číslam matice $\mathbf{A}$ sú **lineárne nezávislé**.
- Ak matica $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ má n rôznych reálnych vlastných čísel $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, tak zodpovedajúce vlastné vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ sú lineárne nezávislé a tvoria bázu priestoru $\mathbb{R}^n$.

- Každému vlastnému číslu symetrickej matice odpovedá p lineárne nezávislých vlastných vektorov (p je násobnosť vlastného čísla).
- Ak je λ viacnásobný koreň, treba ho uvažovať toľko krát, koľko krát je násobný.

Vlastné vektory pre reálne vlastné čísla

Príklad 1.46

Určte vlastné čísla a vlastné vektory matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Riešenie:

1. Nájďme korene charakteristickej rovnice:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(1 - \lambda) - 2 \cdot 2 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Vyriešime kvadratickú rovnicu. Vypočítame diskriminant $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$. Diskriminant je rôzny od nuly, preto existujú 2 riešenia kvadratickej rovnice v obore reálnych čísel $\lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$. Hľadané vlastné čísla sú $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = 3$.

2. Vypočítame vlastný vektor $\mathbf{v}$ odpovedajúci vlastnému číslu $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 - (-1) & 2 \\ 2 & 1 - (-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dostaneme systém lineárnych rovníc:

$$2v_1 + 2v_2 = 0$$

$$2v_1 + 2v_2 = 0,$$

z ktorého vyplýva, že $v_1 = -v_2$. Položíme $v_2 = t$, potom $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$.

Zvolíme $t = 1$, potom vlastný vektor $\mathbf{v}$ má súradnice $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Vypočítame vlastný vektor $\mathbf{u}$ odpovedajúci vlastnému číslu $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 - 3 & 2 \\ 2 & 1 - 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dostaneme systém lineárnych rovníc:

$$-2u_1 + 2u_2 = 0$$

$$2u_1 - 2u_2 = 0,$$

z ktorého vyplýva, že $u_1 = u_2$. Položíme $u_2 = t$, potom $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$.

Zvolíme $t = 1$, potom vlastný vektor $\mathbf{u}$ má súradnice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vlastné vektory pre komplexné vlastné čísla

Príklad 1.47

Určte vlastné čísla a vlastné vektory matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Riešenie:

1. Nájdeme korene charakteristickej rovnice:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(1 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Vyriešime kvadratickú rovnicu. Vypočítame diskriminant $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 = 4i^2$. Keďže diskriminant je záporný, existuje riešenie len v obore komplexných čísel (využijeme $i^2 = -1$) $\lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4i^2}}{2 \cdot 1} = 1 \pm i$. Hľadané vlastné čísla sú $\lambda_1 = 1 + i$ a $\lambda_2 = 1 - i$.

2. Vypočítame vlastný vektor $\mathbf{u}$ odpovedajúci vlastnému číslu $\lambda_1 = 1 + i$:

$$\begin{pmatrix} 1 - (1 + i) & -1 \\ 1 & 1 - (1 + i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dostaneme systém lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} -iu_1 - u_2 &= 0 \\ u_1 - iu_2 &= 0, \end{aligned}$$

z ktorého vyplýva, že $u_1 = iu_2$. Položíme $u_2 = a + ib$, potom $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(a + ib) \\ a + ib \end{pmatrix}$.

Vlastný vektor $\mathbf{u}$ má teda súradnice $\begin{pmatrix} -b + ia \\ a + ib \end{pmatrix}$.

Ak zvolíme napr. $a = 1$, $b = 1$, dostaneme vlastný vektor $\mathbf{u}$ v tvare $\begin{pmatrix} -1 + i \\ 1 + i \end{pmatrix}$.

3. Vypočítame vlastný vektor $\mathbf{v}$ odpovedajúci vlastnému číslu $\lambda_2 = 1 - i$:

$$\begin{pmatrix} 1 - (1 - i) & -1 \\ 1 & 1 - (1 - i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dostaneme systém lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} iv_1 - v_2 &= 0 \\ v_1 + iv_2 &= 0, \end{aligned}$$

z ktorého vyplýva, že $v_1 = -iv_2$. Položíme $v_2 = a + ib$, potom $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i(a + ib) \\ a + ib \end{pmatrix}$.

Vlastný vektor $\mathbf{v}$ má teda súradnice $\begin{pmatrix} b - ia \\ a + ib \end{pmatrix}$.

Pre $a = 1$, $b = 1$ dostaneme vlastný vektor $\mathbf{v}$ v tvare $\begin{pmatrix} 1 - i \\ 1 + i \end{pmatrix}$.

Viacnásobné vlastné čísla a vektory

Nech λ je k -násobné vlastné číslo (koreň charakteristickej rovnice) matice $\mathbf{A}$. Potom pre charakteristické vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$ matice $\mathbf{A}$ zodpovedajúce násobnému vlastnému číslu λ platí:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{w}_1 &= \mathbf{0}, \\ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{w}_2 &= \mathbf{w}_1, \\ &\vdots \\ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{w}_k &= \mathbf{w}_{k-1}. \end{aligned}$$

Príklad 1.48

Určte vlastné čísla a vlastné vektory matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Riešenie:

1. Nájďme korene charakteristickej rovnice:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(4 - \lambda) - (-1) \cdot 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Vyriešime kvadratickú rovnicu a vypočítame diskriminant $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$.

Diskriminant je rovný nule, preto existuje 1 dvojnásobné riešenie kvadratickej rovnice v obore reálnych čísel $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1}$. Preto $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$.

2. Vypočítame vlastný vektor $\mathbf{v}$ odpovedajúci vlastnému číslu $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 2 - 3 & -1 \\ 1 & 4 - 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dostaneme systém lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} -v_1 - v_2 &= 0 \\ v_1 + v_2 &= 0, \end{aligned}$$

z ktorého vyplýva, že $v_1 = -v_2$. Položíme $v_2 = t$, potom $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$.

Položíme $t = 1$, potom vlastný vektor $\mathbf{v}$ má súradnice $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Vypočítame 2. vlastný vektor $\mathbf{u}$ odpovedajúci vlastnému číslu $\lambda_2 = 3$. Keďže vlastné číslo je násobné, budeme postupovať podľa predchádzajúceho predpisu.

$$\begin{pmatrix} 2-3 & -1 \\ 1 & 4-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dostaneme systém lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} -u_1 - u_2 &= -1 \\ u_1 + u_2 &= 1, \end{aligned}$$

z ktorého vyplýva, že $u_1 = 1 - u_2$. Položíme $u_2 = t$, potom $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$.

Nech $t = 1$, potom vlastný vektor $\mathbf{u}$ má súradnice $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Príklad 1.49 Úloha pre samoštúdium

Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory matíc:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -4 & -17 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Kvadratická forma

Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica typu $n \times n$ a nech $\mathbf{x}$ je vektor typu $n \times 1$. Potom výraz:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

nazveme **kvadratickou formou**, ktorého výsledok je **číslo** (skalár)!

1.6 Definitnosť matíc

Štvorcová matica $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ sa nazýva:

- **pozitívne definitná**, ak pre ľubovoľný nenulový vektor $\mathbf{x}$ typu $n \times 1$ je kvadratická forma $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$,
- **pozitívne semi-definitná**, ak pre ľubovoľný nenulový vektor $\mathbf{x}$ typu $n \times 1$ je kvadratická forma $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$,
- **negatívne definitná**, ak pre ľubovoľný nenulový vektor $\mathbf{x}$ typu $n \times 1$ je kvadratická forma $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$,
- **negatívne semi-definitná**, ak pre ľubovoľný nenulový vektor $\mathbf{x}$ typu $n \times 1$ je kvadratická forma $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0$.

Určenie definitnosti matíc pomocou vlastných vektorov

Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica typu $n \times n$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sú jej vlastné čísla. Potom matica $\mathbf{A}$ je:

- **pozitívne definitná** práve vtedy, keď všetky jej vlastné vektory sú kladné $\lambda_i > 0$, pre $i = 1, 2, \dots, n$,
- **pozitívne semi-definitná** práve vtedy, keď všetky jej vlastné vektory sú nezáporné $\lambda_i \geq 0$, pre $i = 1, 2, \dots, n$,
- **negatívne definitná** práve vtedy, keď všetky jej vlastné vektory sú záporné $\lambda_i < 0$, pre $i = 1, 2, \dots, n$,
- **negatívne semi-definitná** práve vtedy, keď všetky jej vlastné vektory sú nekladné $\lambda_i \leq 0$, pre $i = 1, 2, \dots, n$,
- **indefinitná** práve vtedy, keď najmenej jej 2 vlastné čísla majú opačné znamienka.

Hlavné minory matice

Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica typu $n \times n$. O definitnosti danej matice rozhodneme pomocou hlavných minorov. Hlavný minor D_k štvorcovej matice $\mathbf{A}$ je determinant matice, ktoré vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynechaním jej posledných $n - k$ stĺpcov a riadkov.

Majme teda spočítanú postupnosť hlavných minorov $D_1, D_2, \dots, D_n$ matice $\mathbf{A}$. O definitnosti matice $\mathbf{A}$ rozhodneme podľa nasledujúceho kritéria. Matica $\mathbf{A}$ je:

- **pozitívne definitná** práve vtedy, keď všetky jej hlavné minory sú kladné, t.j. keď $D_k > 0$ pre $k = 1, 2, \dots, n$,
- **negatívne definitná** práve vtedy, keď pre jej hlavné minory platí $(-1)^k D_k > 0$ pre $k = 1, 2, \dots, n$ (t.j. keď alternujú znamienka, pričom prvý hlavný minor má záporné znamienko).

Určenie semi-definitnosti matíc pomocou hlavných minorov

- Ak je matica **pozitívne semi-definitná**, tak jej hlavné minory sú nezáporné, t.j. keď $D_k \geq 0$ pre $k = 1, 2, \dots, n$.
- Ak je matica **negatívne semi-definitná**, tak každý jej hlavný minor je rovný nule alebo jeho znamienko je $(-1)^k$ pre $k = 1, 2, \dots, n$ (t.j. keď alternujú znamienka, pričom prvý hlavný minor má záporné znamienko).

Matematická analýza

V rámci kapitoly Matematická analýza sa naučíme pracovať s reálnymi funkciami jednej reálnej premennej, resp. s funkciami jednej premennej. Práca s funkciou vyžaduje pochopiť základné vlastnosti funkcií, rozdiel medzi elementárnou a zloženou funkciou, pojem limity funkcie a spojitost funkcie, diferenciálny počet a integrálny počet.

Po preštudovaní tejto kapitoly, by mal byť čitateľ schopný používať abstraktný jazyk matematiky na riešenie reálnych problémov, s ktorými sa bude dennodenne stretávať vo svojej manažérskej praxi.

2.1 Reálna funkcia jednej reálnej premennej

Uvažujme zobrazenie, alebo funkciu $f : A \rightarrow B$. Nech množiny A, B sú množiny reálnych čísel ($A = B = \mathbb{R}$), alebo sú podmnožinami reálnych čísel ($A, B \subseteq \mathbb{R}$). Skôr ako zdefinujeme pojem funkcie, povedzme si, že sa budeme zaoberať len funkciami jednej premennej na množine reálnych čísel $\mathbb{R}$. Pokiaľ neuvedieme inak, tak namiesto názvu **funkcia jednej reálnej premennej** budeme stručne používať názov **funkcia**.

Definícia 2.1 Definícia funkcie

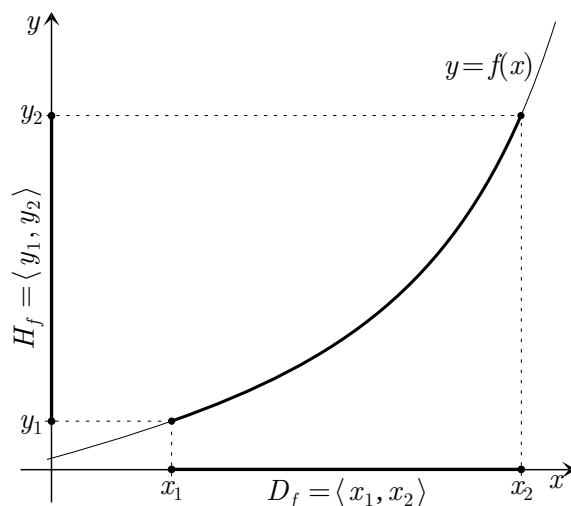
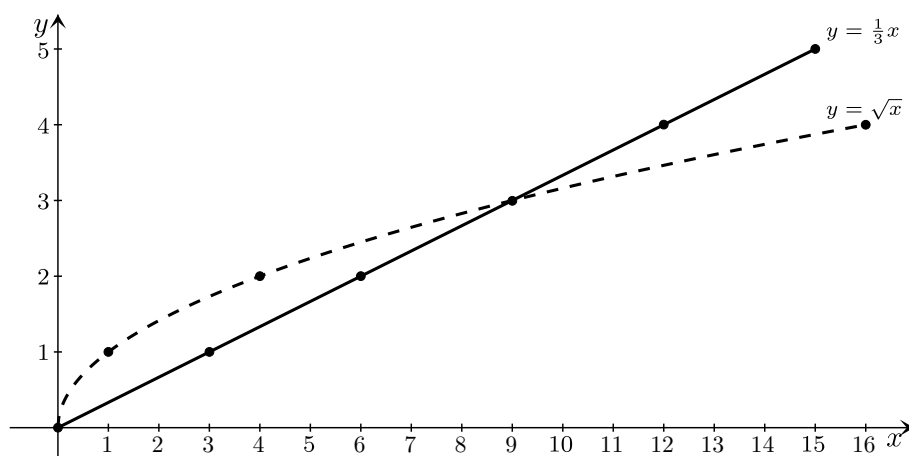
Zobrazenie $f(x)$, ktoré priradzuje ľubovoľnému reálnemu číslu $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ jednoznačne reálne číslo $y \in B \subseteq \mathbb{R}$ nazveme **reálnou funkciou jednej reálnej premennej**.

Množinu A nazveme **definičným oborom funkcie** $f(x)$, označíme ho D_f . Množinu B takú, že

$$B = f(D_f) = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$$

nazveme **oborom hodnôt funkcie** $f(x)$ a označíme H_f , pričom platí $H_f \subseteq \mathbb{R}$ (pozri obrázok 2.1).

Pre jednoznačné určenie funkcie $f(x)$ je potrebné poznať definičný obor funkcie D_f a predpis, podľa ktorého je každému prvku x z definičného oboru ($x \in D_f$) jednoznačne priradené číslo y . Číslo x môže nadobúdať rôzne hodnoty, preto hovoríme, že x je premenná. Premennú x môžeme


 Obr. 2.1: Definičný obor a obor hodnôt funkcie $f : D_f \rightarrow H_f$


Obr. 2.2: Graf funkcií zadaných tabuľkou, predpisom

voliť ľubovoľne, ide o **nezávislú premennú** alebo **argument** funkcie. Číslo $y = f(x)$, priradené k číslu x funkciou $f(x)$ nazývame **funkčnou hodnotou** v bode (číslu) x . Pod definičným oborom funkcie D_f rozumieme množinu všetkých reálnych čísel, pre ktoré má predpis $y = f(x)$ zmysel. Obor funkčných hodnôt H_f je množina všetkých hodnôt y , pre ktoré platí $y = f(x)$. Preto hovoríme, že y je **závislou premennou** alebo, že „ y závisí od x “.

Funkciu môžeme určiť funkčným predpisom, graficky, slovne (napríklad: hrubý domáci produkt je funkciou spotreby domácností, podnikových investícií a vládnych výdavkov) alebo tabuľkou, t.j. vymenovaním usporiadaných dvojíc $\{[x, y] \mid y = f(x), x \in D_f, y \in H_f\}$. V tabuľke 2.1 sú uvedené vybrané usporiadané dvojice (body) funkcie $f(x) = \sqrt{x}$ a v tabuľke 2.2 sú uvedené vybrané usporiadané dvojice určujúce funkciu $f(x) = \frac{x}{3}$. Grafy oboch funkcií vidíme na obrázku 2.2.

Bežne sa stretávame s nasledujúcimi vyjadreniami predpisu funkcií:

- **explicitné** vyjadrenie: $y = f(x)$, napr. $y = 2x + 1$,

x	0	1	4	9	16
y	0	1	2	3	4

 Tab. 2.1: Vybrané hodnoty funkcie $\sqrt{x}$

x	0	3	6	9	12	15
y	0	1	2	3	4	5

 Tab. 2.2: Vybrané hodnoty funkcie $\frac{x}{3}$

- **implicitné** vyjadrenie: $F(x, y) = 0$, napr. $e^y - x - 3 = 0$,
- **parametrické** vyjadrenie: $x = g(t)$, $y = h(t)$; $t \in D_g = D_h$, kde $t \in \mathbb{R}$ je **parameter**. Pre každú hodnotu $t \in D_g = D_h$ dostaneme bod $[x, y] = [g(t), h(t)]$.

Implicitné či parametrické vyjadrenie nemusí vždy predstavovať funkciu, keďže pre jednu hodnotu x môže byť priradených viac hodnôt y .

Príklad 2.1

Zistite, či nasledujúce parametrické vyjadrenie popisuje funkciu:

$$\begin{aligned} x &= r \sin t \\ y &= r \cos t, \text{ pre } t \in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Riešenie:

Obe rovnice parametrického vyjadrenia (2.1) umocníme na druhú:

$$\begin{aligned} x^2 &= r^2 \sin^2 t \\ y^2 &= r^2 \cos^2 t \end{aligned} \quad (2.2)$$

a sčítame. Dostaneme: $x^2 + y^2 = r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)$ alebo $x^2 + y^2 = r^2$, pretože $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Po zjednodušení dostaneme predpis:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (2.3)$$

ktorý vyjadruje kružnicu so stredom v bode $[0, 0]$ a polomerom r . Každému bodu x z intervalu $\langle -r, r \rangle$ predpis (2.1) priradí 2 hodnoty $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ alebo $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ a preto parametrické vyjadrenie (2.1) nepredstavuje funkciu.

Definícia 2.2 Graf funkcie

Grafom funkcie $f(x)$ nazývame množinu G_f všetkých usporiadaných dvojíc $[x, y] \in A \times B$ (t.j. bodov) takých, že $x \in A$, $y \in B$ a $y = f(x)$.

Obyčajne znázorňujeme graf funkcie jednej reálnej premennej v Euklidovskej rovine so zvoleným počiatkom súradnicového systému a pravouhlým súradnicovým systémom tvoreným osami x a y .

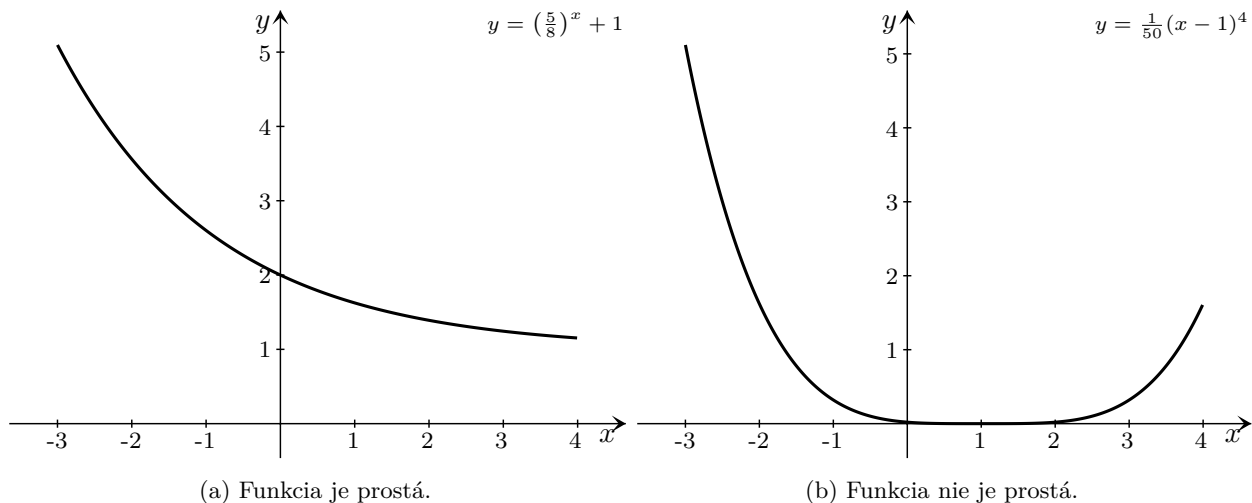
Nulové body funkcie $f(x)$ sú koreňmi rovnice $f(x) = 0$ a zodpovedajú im x -ové súradnice priesečníka grafu funkcie $f(x)$ s osou x .

Definícia 2.3 *Prostá funkcia*

Funkcia $f(x)$ sa nazýva prostá, ak pre všetky $x_1 \neq x_2$ z D_f platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Dá sa povedať, že funkcia $f(x)$ je prostá práve vtedy, ak každá priamka rovnobežná s osou x pretne graf funkcie $f(x)$ najviac v jednom bode. Napríklad kvadratická funkcia $f(x) = x^2$ nie je prostá na svojom definičnom obore D_f . Je však prostá na intervale $(-\infty, 0)$ a na intervale $(0, +\infty)$.

Na obrázku 2.3a vidíme príklad prostej funkcie a na obrázku 2.3b príklad neprostej funkcie.



Obr. 2.3: Príklad prostej a neprostej funkcie

Ak je funkcia $f : D_f \rightarrow H_f, D_f \subseteq \mathbb{R}$ prostá, tak k nej existuje inverzná funkcia $f^{-1}(y)$, ktorá priradí každému reálnemu číslu $y \in H_f$ práve jedno reálne číslo $x \in D_f$ také, že

$$x = f^{-1}(y).$$

Inverznú funkciu $f^{-1} : H_f \rightarrow D_f$ vyjadríme predpisom:

$$f^{-1} = \{[y, x] \mid y = f(x), x \in D_f\}.$$

Zvyčajne označujeme symbolom x nezávislú premennú, preto formálne zameníme x za y a zapíšeme:

$$y = f^{-1}(x)$$

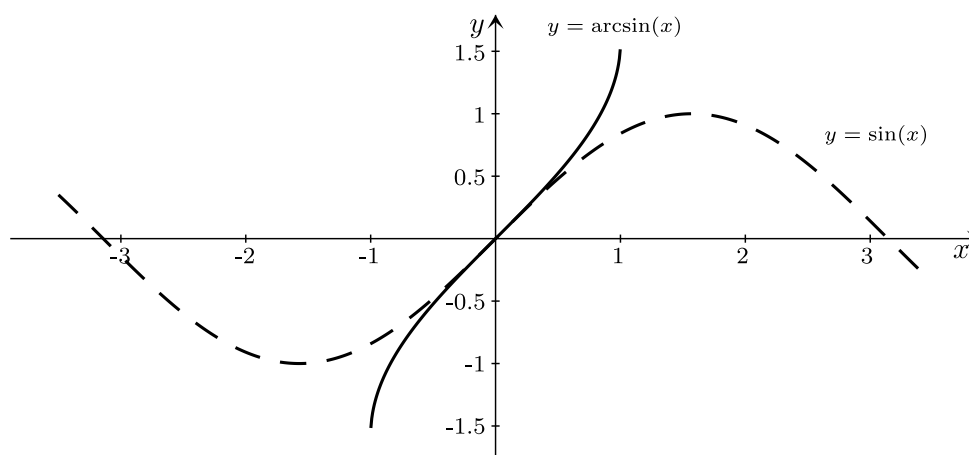
pre inverznú funkciu k funkcii $f(x)$. Graf inverznej funkcie $f^{-1}(x)$ je symetrický s funkciou $f(x)$ podľa priamky $y = x$ (pozri obrázok 2.4). Navyše platí, že obor hodnôt H_f prostej funkcie $f(x)$ je definičným oborom $D_{f^{-1}}$ inverznej funkcie $f^{-1}(y)$, t.j. $H_f = D_{f^{-1}}$.

Príklad 2.2

Majme danú funkciu $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \langle 5, \infty \rangle$ danú predpisom:

$$f(x) = x^3 + 5.$$

Určte inverznú funkciu $f^{-1}(x)$.



Obr. 2.4: Príklad inverznej funkcie $y = \sin^{-1}(x)$ k funkcii $y = \sin(x)$

Riešenie:

Predpis upravíme nasledovne: $x^3 = y - 5$ resp. $x = \sqrt[3]{y - 5}$. Teraz formálne zameníme obe premenné a dostaneme inverznú funkciu $y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 5}$. Definičný obor $f^{-1}(x)$ je obor hodnôt funkcie $f(x)$. Obor hodnôt $f^{-1}(x)$ je definičný obor funkcie $f(x)$, t.j. $D_{f^{-1}} = \langle 5, \infty \rangle$, $H_{f^{-1}} = \langle 0, \infty \rangle$.

2.2 Vlastnosti funkcií

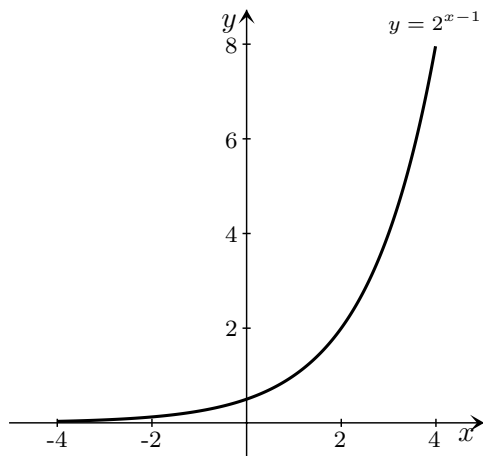
Definícia 2.4 Rastúca a klesajúca funkcia

Funkciu $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ nazývame:

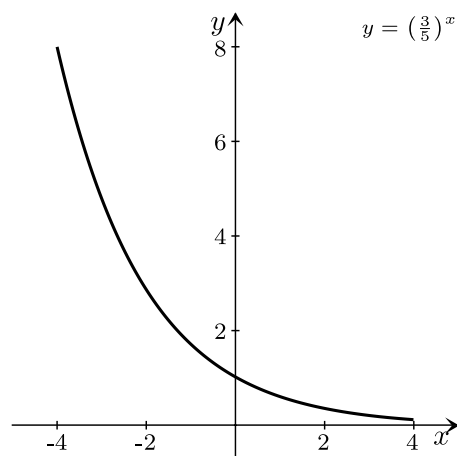
- **rastúcou** na intervale $\mathcal{I} \subseteq D_f$, ak pre každé dva body $x_1 < x_2$ z $\mathcal{I}$ platí $f(x_1) < f(x_2)$,
($\forall x_1, x_2 \in \mathcal{I}; x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$),
- **klesajúcou** na intervale $\mathcal{I} \subseteq D_f$, ak pre každé dva body $x_1 < x_2$ z $\mathcal{I}$ platí $f(x_1) > f(x_2)$,
($\forall x_1, x_2 \in \mathcal{I}; x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$),
- **nerastúcou** na intervale $\mathcal{I} \subseteq D_f$, ak pre každé dva body $x_1 < x_2$ z $\mathcal{I}$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$,
($\forall x_1, x_2 \in \mathcal{I}; x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$),
- **neklesajúcou** na intervale $\mathcal{I}$, ak pre každé dva body $x_1 < x_2$ z $\mathcal{I}$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.
($\forall x_1, x_2 \in \mathcal{I}; x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$).

Rýdzo monotónna funkcia je na celom definičnom obore **rastúca** (Obr. 2.5a) alebo **klesajúca** (Obr. 2.5b). Každá rastúca funkcia je neklesajúca, každá klesajúca funkcia je nerastúca. Konštantná funkcia je nerastúca aj neklesajúca na celom definičnom obore a jej obor hodnôt je iba jeden bod (hodnota). Naproti tomu **monotónna** funkcia je na celom svojom definičnom obore **nerastúca** alebo **neklesajúca**. Obrázok 2.5c zobrazuje funkciu, ktorá je rastúca aj klesajúca na svojom definičnom obore.

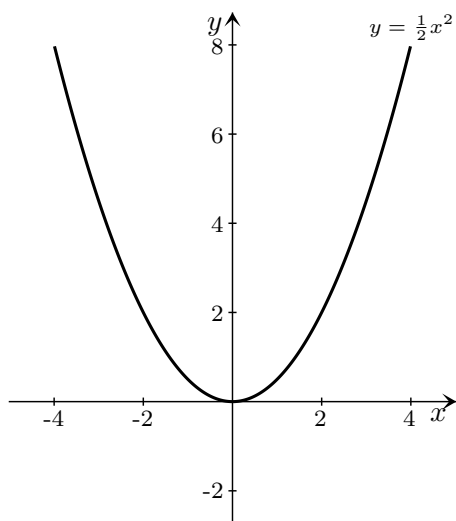
Poznamenajme, že ak je funkcia $f : D_f \rightarrow H_f$ rýdzomonotónna na celom svojom definičnom obore, tak k nej existuje inverzná funkcia, ktorá je tiež rýdzo monotónna.



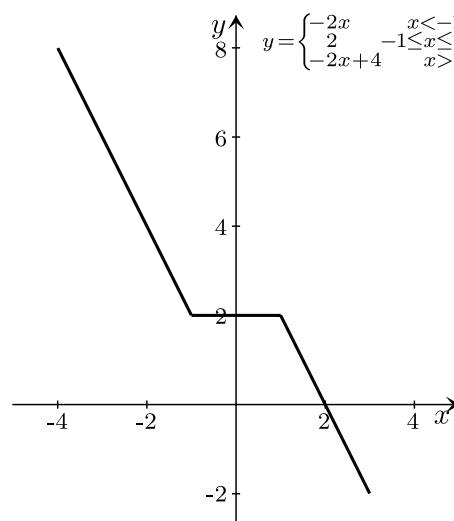
(a) Funkcia rastie na celom definičnom obore



(b) Funkcia klesá na celom definičnom obore



(c) Funkcia je aj rastúca aj klesajúca na definičnom obore



(d) Nerastúca funkcia

Obr. 2.5: Monotónnosť funkcie

Definícia 2.5 Ohraničená funkcia

Funkciu $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ nazývame:

- **zhora ohraničenou** na definičnom obore D_f , ak existuje reálna konštanta h , ktorá je väčšia alebo rovná než ľubovoľná funkčná hodnota $f(x)$ pre každé $x \in D_f$. ($\forall x \in D_f : f(x) \leq h$),
- **zdola ohraničenou** na definičnom obore D_f , ak existuje reálna konštanta d , ktorá je menšia alebo rovná než ľubovoľná funkčná hodnota $f(x)$ pre každé $x \in D_f$. ($\forall x \in D_f : f(x) \geq d$),
- **ohraničenou** na definičnom obore D_f , ak je súčasne ohraničená zhora aj zdola.

Na grafe sa vlastnosť ohraničenosti prejaví tak, že celý graf zhora (zdola) ohraničenej funkcie leží pod (nad) niektorou rovnobežkou s osou x (pozri obrázok 2.6). Graf ohraničenej funkcie leží celý medzi dvomi rovnobežkami s osou x . V súvislosti s ohraničenosťou funkcie zavádzame aj pojmy minimum a maximum na intervale $\mathcal{I}$.

Definícia 2.6 Minimum a maximum funkcie

Funkcia $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ má v bode x_0 :

- **minimum** na intervale $\mathcal{I}$ práve vtedy, ak pre všetky $x \in \mathcal{I}$, je $f(x) \geq f(x_0)$,
- **ostré minimum** na intervale $\mathcal{I}$ práve vtedy, ak pre všetky $x \in \mathcal{I}$, je $f(x) > f(x_0)$,
- **maximum** na intervale $\mathcal{I}$ práve vtedy, ak pre všetky $x \in \mathcal{I}$, je $f(x) \leq f(x_0)$,
- **ostré maximum** na intervale $\mathcal{I}$ práve vtedy, ak pre všetky $x \in \mathcal{I}$, je $f(x) < f(x_0)$.

Definícia 2.7 Párna a nepárna funkcia

Funkciu $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ nazývame:

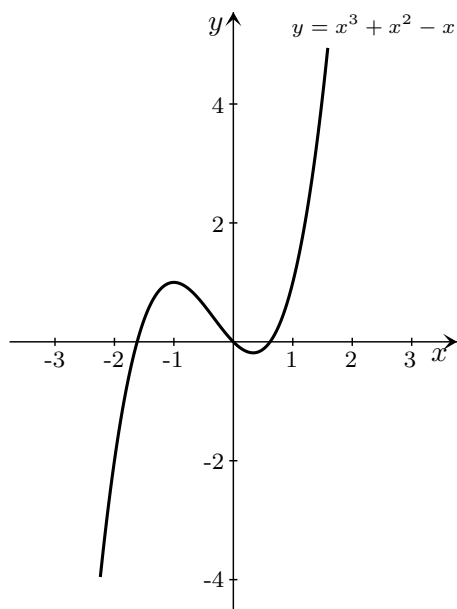
- **párnou (symetrickou)** na definičnom obore D_f , ak platí $\forall x \in D_f : f(x) = f(-x)$,
- **nepárnou (asymetrickou)** na definičnom obore D_f , ak platí $\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$.

Graf párnej funkcie je súmerný podľa osi y . Ako príklad uvidíme funkciu $f(x) = x^2 - 6$ (Obr. 2.7a) alebo funkciu $f(x) = \cos x$ (Obr. 2.7c). Graf nepárnej funkcie je stredovo súmerný podľa počiatku súradnicovej sústavy $[0, 0]$. Príkladom môže byť funkcia $f(x) = \frac{1}{x}$ (Obr. 2.7b) alebo $f(x) = \sin x$ (Obr. 2.7d).

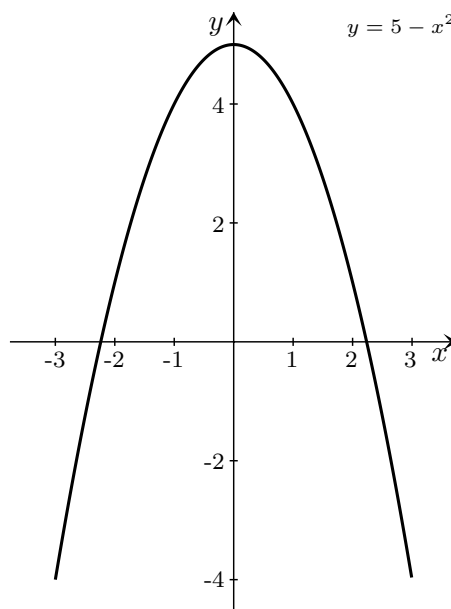
Definícia 2.8 Periodická funkcia

Funkciu $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ nazývame **periodickou**, ak existuje také najmenšie číslo $p \neq 0$, že pre každé $x \in D_f$ platí rovnosť $f(x + p) = f(x)$.

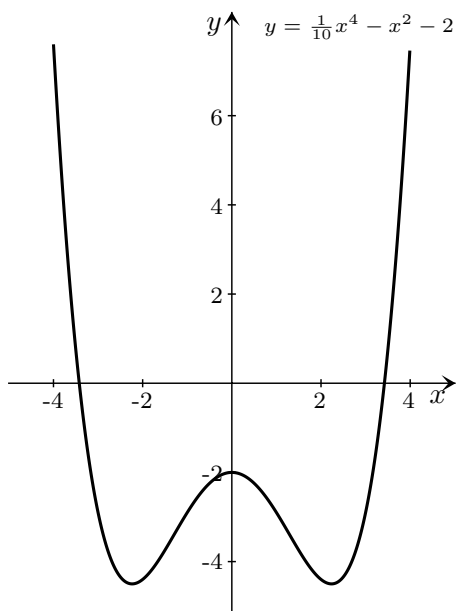
Hodnotu p nazývame **perióda**, ktorú tiež môžeme zapísať ako $k \cdot p$, kde $k \neq 0, k \in \mathbb{Z}$. Základná (primitívna) perióda je určená najmenším kladným číslom p . Príklady periodických funkcií uvádzame na obrázku 2.8a a obrázku 2.8b.



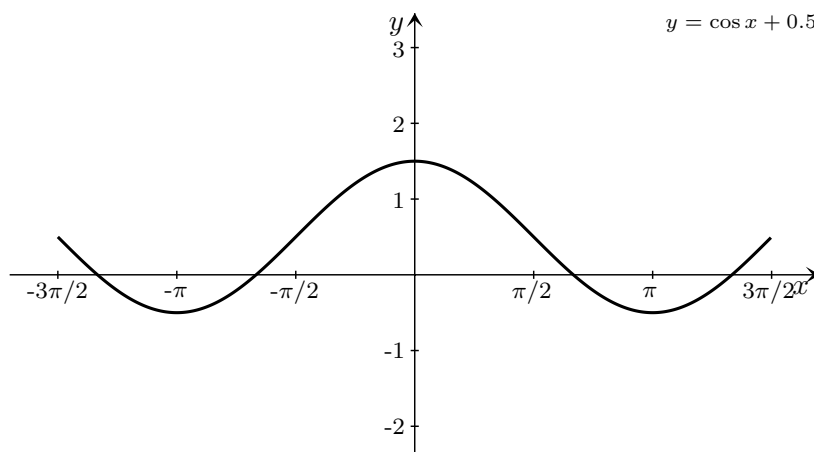
(a) Neohraničená funkcia



(b) Funkcia ohraničená zhora

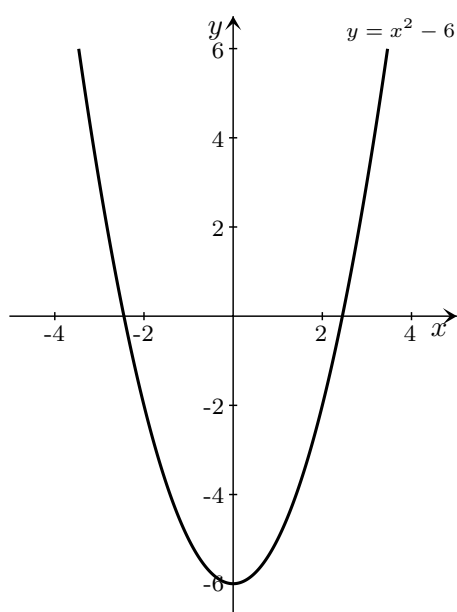


(c) Funkcia ohraničená zdola

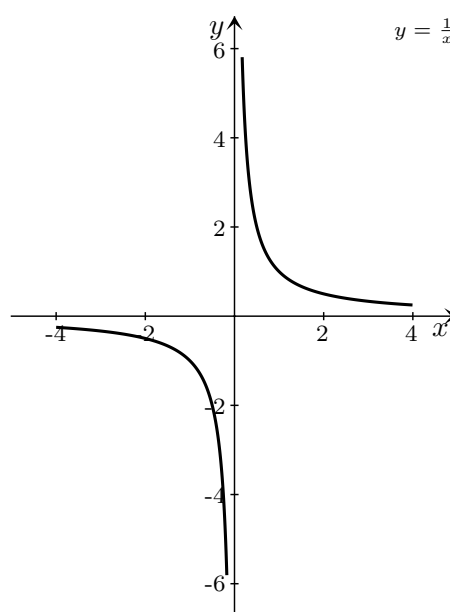


(d) Ohraničená funkcia

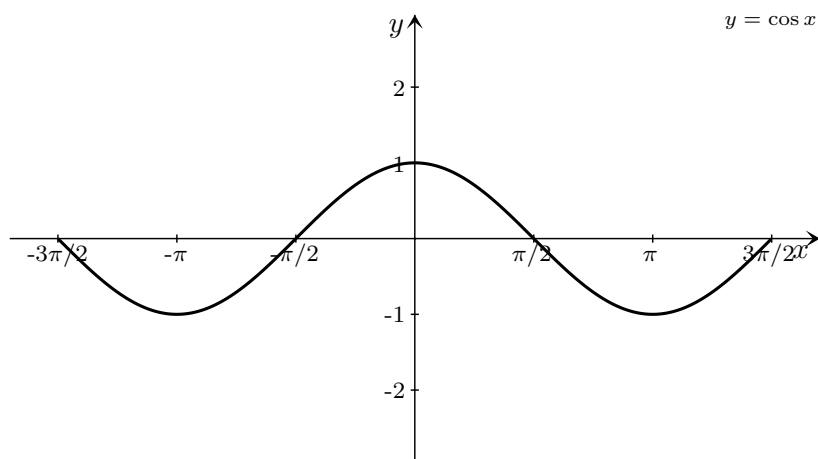
Obr. 2.6: Ohraničenosť funkcie



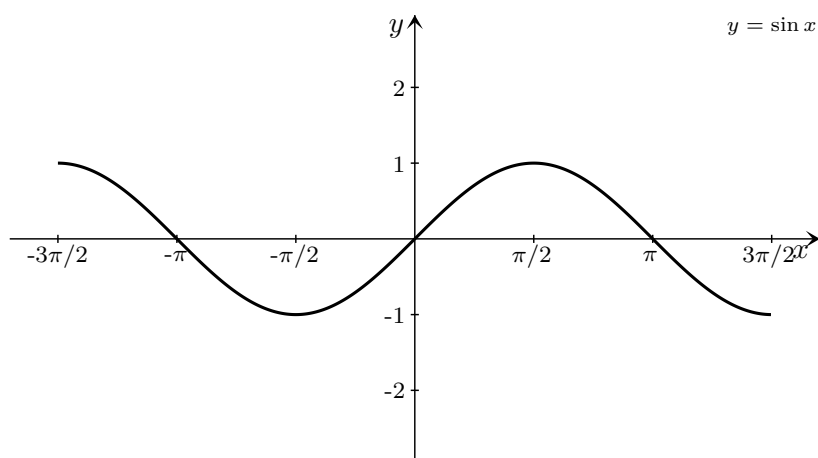
(a) Párna funkcia



(b) Nepárna funkcia

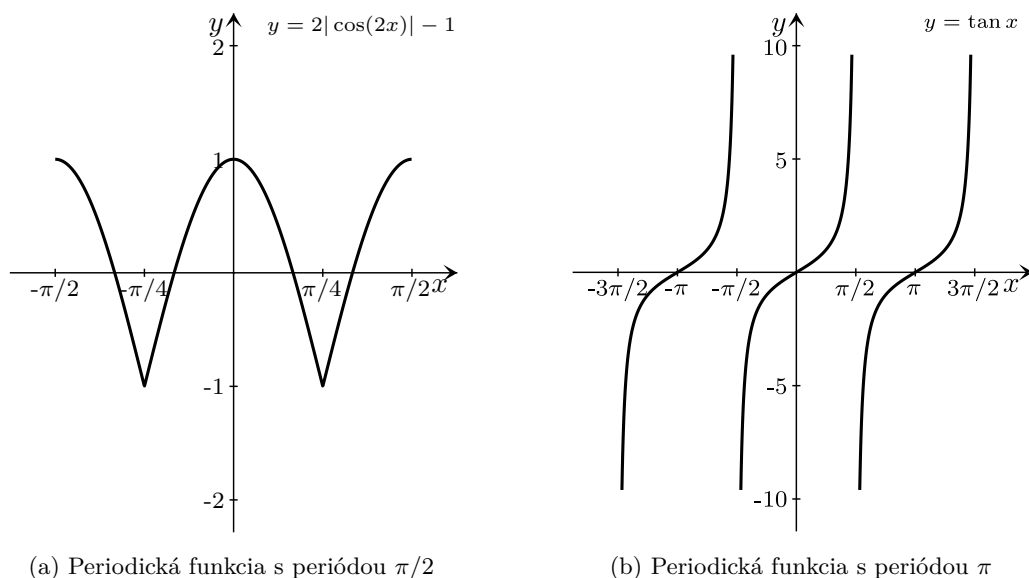


(c) Párna funkcia



(d) Nepárna funkcia

Obr. 2.7: Párnosť, nepárnosť funkcie



Obr. 2.8: Periodické funkcie

Definícia 2.9 *Konvexná a konkávna funkcia*

Funkciu $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ nazývame **konvexná** (resp. **konkávna**) na intervale $\mathcal{I} \subseteq D_f$, ak pre ľubovoľné dva rôzne body x_1, x_2 z intervalu $\mathcal{I}$ a reálne číslo λ , $0 \leq \lambda \leq 1$ platia nerovnosti:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \quad (2.4)$$

resp.

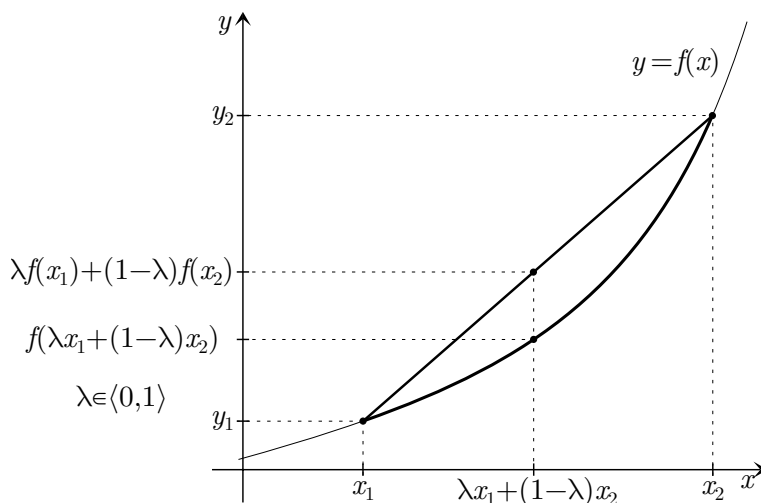
$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2). \quad (2.5)$$

V prípade ostrej nerovnosti hovoríme o rýdzo konvexnej (konkávnej) funkcii. V prípade konvexnej funkcie na intervale $\mathcal{I}$ platí: ak zvolíme v intervale $\mathcal{I}$ ľubovoľné dva body x_1, x_2 také že $x_1 < x_2$, tak v ľubovoľnom bode $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$, kde $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, je funkčná hodnota $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$ menšia ako hodnota $\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ (pozri Obr. 2.9).

2.3 Operácie s funkciami

Po oboznámení sa so základnými vlastnosťami funkcií jednej reálnej premennej môžeme pristúpiť k zavedeniu operácií s funkciami. Jednotlivé aritmetické operácie budeme aplikovať na elementárne funkcie, ktoré zavedieme v kapitole 2.4. Vďaka týmto operáciám môžeme vytvárať široké spektrum funkcií. Ide o nasledujúce operácie:

1. zúženie funkcie,
2. absolútna hodnota funkcie,
3. aritmetické operácie na funkciách (súčet, rozdiel, súčin a podiel),
4. skalárny násobok funkcie (súčin čísla s funkciou),



Obr. 2.9: Konvexná funkcia

5. zložená funkcia,

6. funkcia definovaná po častiach.

Proces vytvárania nových funkcií nazveme **generovanie** funkcií. Ak chceme vygenerovať funkciu h pomocou dvoch alebo viacerých funkcií, aplikujeme na dané funkcie nasledujúce operácie podľa potreby. Na obrázku 2.10 uvádzame niekoľko grafov funkcií získaných vyššie uvedenými operáciami.

Definícia 2.10 Zúženie funkcie

Nech $f : D_f \rightarrow H_f$ je daná funkcia, pričom $D_f \subseteq \mathbb{R}$. **Zúženie** funkcie $f(x)$ na množinu $M \subset D_f$ je funkcia $h = f|_M$ definovaná na množine M vzťahom $h(x) = f(x)$ pre každé $x \in M \cap D_f$.

Príklad 2.3

Funkcia $h(x) = (\sqrt{x})^2$ je zúžením funkcie $f(x) = x$ na intervale $\langle 0, \infty \rangle$.

Definícia 2.11 Absolútna hodnota funkcie

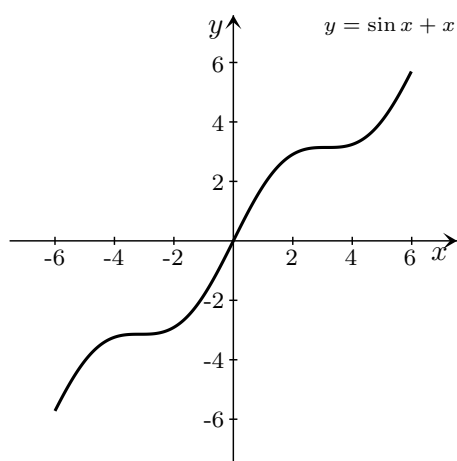
Nech $f : D_f \rightarrow H_f$ je funkcia definovaná na svojom definičnom obore D_f . Funkciu $h(x)$ definovanú na definičnom obore D_f funkcie $f(x)$ tak, že $h(a) = |f(a)|$ pre každé $a \in D_f$, nazývame **absolútnou hodnotou funkcie** $f(x)$ a označujeme $|f(x)|$.

Definícia 2.12 Súčet, rozdiel a súčin funkcií

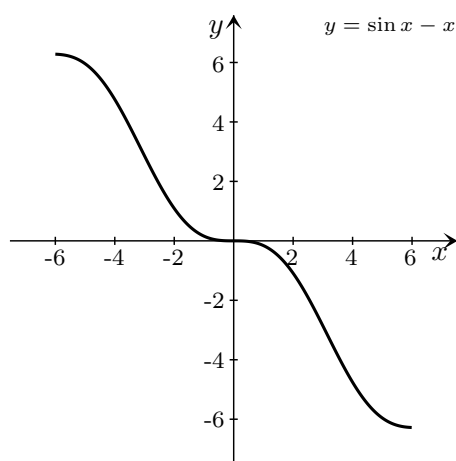
Nech $f : D_f \rightarrow H_f$ a $g : D_g \rightarrow H_g$ sú dve funkcie s definičnými obormi D_f a D_g . Funkciu $h : D_h \rightarrow H_h$ takú, že $D_h = D_f \cap D_g$ a určenú jedným z predpisov:

$$h(x) = f(x) + g(x), \quad h(x) = f(x) - g(x) \quad \text{alebo} \quad h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

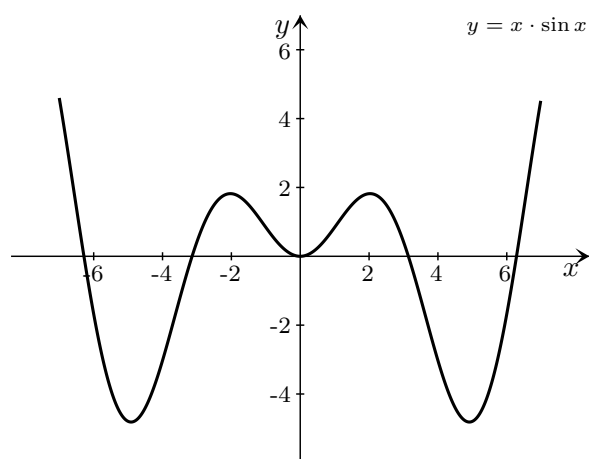
nazývame postupne **súčtom**, **rozdielom** či **súčinom** funkcií $f(x)$ a $g(x)$ pre každé $x \in D(h)$.



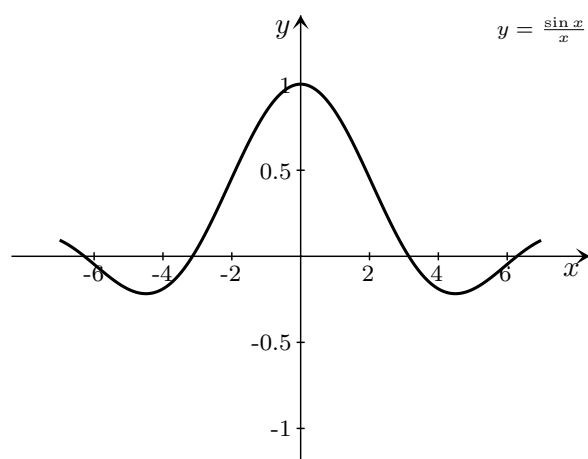
(a) Súčet funkcií



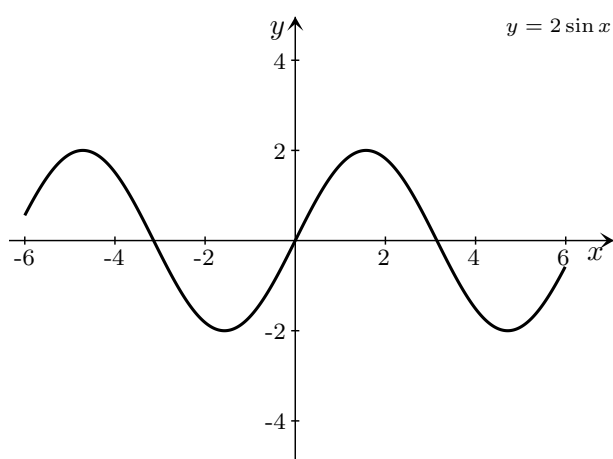
(b) Rozdiel funkcií



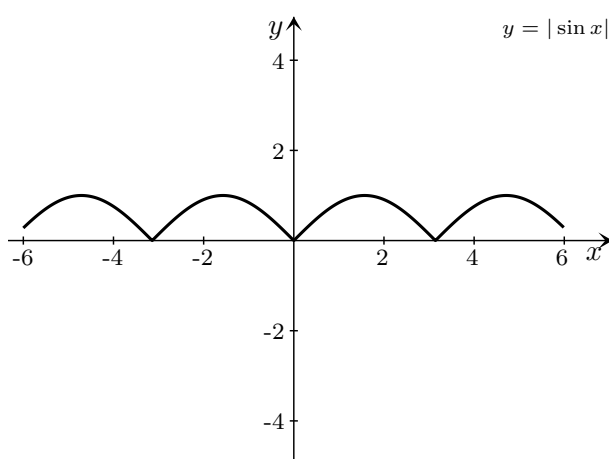
(c) Súčin funkcií



(d) Podiel funkcií



(e) Skalárny násobok funkcie



(f) Absolútna hodnota funkcie

Obr. 2.10: Operácie s funkciami

Definícia 2.13 Podiel funkcií

Nech $f : D_f \rightarrow H_f$ a $g : D_g \rightarrow H_g$ sú dve funkcie s definičnými obormi D_f a D_g , pričom pre každé $x \in D_g$ platí $g(x) \neq 0$. Funkciu $h : D_h \rightarrow H_h$ takú, že $D_h = D_f \cap D_g$ a určenú predpisom:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

nazývame **podielom funkcií** $f(x)$ a $g(x)$ pre každé $x \in D_h$.

Definícia 2.14 Skalárny násobok funkcie

Nech α je reálne číslo a $f : D_f \rightarrow H_f$. Funkciu $h : D_h \rightarrow H_h$ takú, že $D_h = D_f$ definovanú vzťahom:

$$h(x) = \alpha f(x)$$

nazývame **α -násobkom funkcie** $f(x)$ pre každé $x \in D_h$.

Poznámka:

Pre operáciu súčet a súčin platí komutatívny, asociatívny a distributívny zákon.

Teraz zavedieme zloženú funkciu reálnej premennej $g \circ f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, kde $y = g(f(x))$ pre $x \in D_f$. Nakoľko funkcia je špeciálny prípad zobrazení, koncept zloženej funkcie vychádza z konceptu zložených zobrazení.

Definícia 2.15 Zložená funkcia

Funkciu $h : D_h \rightarrow H_h$; $h(x) = (g \circ f)(x)$ nazývame **zloženou funkciou** utvorenou z funkcie $f : D_f \rightarrow H_f$ a funkcie $g : D_g \rightarrow H_g$ práve vtedy, keď definičný obor D_h je množina takých čísel x z definičného oboru D_f , v ktorých je hodnota $f(x)$ z definičného oboru D_g a platí $h(x) = g(f(x))$. Inak povedané, že platí:

$$D_h = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \quad \text{a} \quad \forall x \in D_h \text{ je } (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Ale aj funkcia $h(x) = (f \circ g)(x)$ je zložená funkcia utvorená z funkcií $f(x)$ a $g(x)$ ale v opačnom poradí. Najskôr na hodnotu $x \in D_g$ aplikujeme predpis funkcie $g(x)$ a potom na hodnotu $g(x) \in D_f$ aplikujeme predpis funkcie $f(x)$, t.j. $h(x) = f(g(x))$.

Príklad 2.4

Majme funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kde $f(x) = 5x - 3$ a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kde $g(x) = 2x^2 + x + 4$. Určte obe zložené funkcie $(f \circ g)(x)$ a $(g \circ f)(x)$.

Riešenie:

Obe zložené funkcie sú definované na $\mathbb{R}$, pretože obe funkcie majú definičný obor aj obor hodnôt všetky reálne čísla, t.j. $x \in \mathbb{R}$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x^2 + x + 4) = 5(2x^2 + x + 4) - 3 = 10x^2 + 5x + 17,$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x - 3) = 2(5x - 3)^2 + (5x - 3) + 4 = 50x^2 - 55x + 19.$$

Príklad 2.5

Majme dané funkcie $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$, určené nasledovne:

$$f(x) = \sqrt{x+3}, \quad g(x) = \cos(5x).$$

Určte definičné obory oboch funkcií a obe zložené funkcie $(f \circ g)(x)$ a $(g \circ f)(x)$.

Riešenie:

Pod odmocninou môže byť len nezáporné číslo, preto $D_f = \langle -3, \infty \rangle$. Definičný obor funkcie $g(x)$ sú všetky reálne čísla, t.j. $D_g = \mathbb{R}$. Zložené funkcie zapíšeme nasledovne:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\cos(5x)) = \sqrt{\cos(5x) + 3},$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+3}) = \cos(5\sqrt{x+3}).$$

Zložená funkcia $(f \circ g)(x)$ je definovaná, pretože $H_f = \langle -1, 1 \rangle$. Tento interval je podmnožina D_f (t.j. $H_f \subset D_f$). Aj zložená funkcia $(g \circ f)(x)$ je definovaná, pretože $H_f = \langle 0, \infty \rangle$ je podmnožinou D_g (t.j. $H_f \subset D_g$).

Poznamenajme, že ak existuje inverzná funkcia $f^{-1}(x)$ k funkcii $f(x)$ a zložíme ich, tak dostaneme $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I$ alebo $y = f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$, kde I je identická funkcia $y = x$.

Posledná možnosť ako generovať novú funkciu je definovať ju po častiach na zadaných intervaloch, čím získame **po častiach zloženú funkciu**.

Príklad 2.6

Predajca dostáva svoje odmeny dvojakým spôsobom. Bez ohľadu na to, koľko mesačne predá daných výrobkov, dostane 1000 peňažných jednotiek. Ale keď predá za mesiac viac ako 1000 výrobkov, jeho odmena sa zvýši o 1 p.j. za každý predaný kus. Maximálne môže zarobiť 2000 peňažných jednotiek. Akou matematickou funkciou vyjadríme odmeny daného predajcu?

Riešenie:

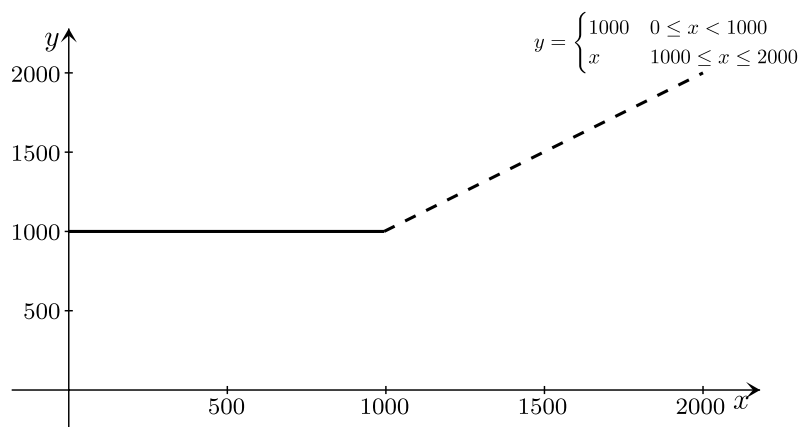
Nakreslíme graf funkcie podľa slovného popisu (pozri Obr. 2.11).

Matematicky zapíšeme po častiach zloženú funkciu $f(x)$ nasledovne:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1000 & 0 \leq x < 1000 \\ x & 1000 \leq x \leq 2000. \end{cases}$$

Príklad 2.7 Úloha na samoštúdium

Pre zadané funkcie určte ich definičný obor, obor hodnôt. Overte, či je funkcia prostá na svojom definičnom obore. Ak funkcia nie je prostá určte intervaly, na ktorých je prostá a určte inverznú funkciu k danej funkcii ak existuje. Inverznú funkciu nájdite na zadanom intervale. Nájdite zložené



Obr. 2.11: Graf funkcie k príkladu 2.6

funkcie $f \circ f^{-1}$ a $f^{-1} \circ f$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 1, \quad x \in \langle 0, +\infty \rangle, & f(x) &= 3 + 2 \cos x, \quad x \in \langle 0, \pi \rangle, \\ f(x) &= 1 - \sin 2x, \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\rangle, & f(x) &= 2^{2x+3}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2.4 Polynomické a racionálne funkcie jednej reálnej premennej

V nasledujúcom texte uvedieme vlastnosti polynomických funkcií a ich najdôležitejšie vlastnosti.

Definícia 2.16 Polynomická funkcia

Funkcia $P_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vyjadrená v tvare:

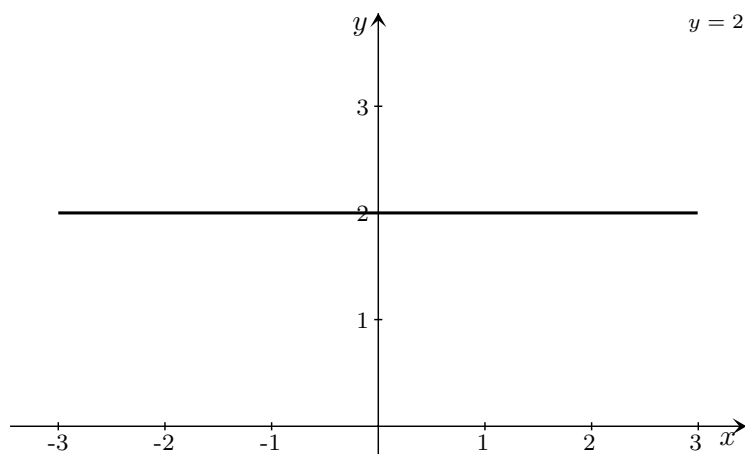
$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_n \neq 0$ sa nazýva **polynomická funkcia** (polynóm resp. mnohočlen) stupňa n . Čísla $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ nazývame koeficienty polynómu.

V závislosti od n môžeme uvažovať o niekoľkých základných typoch polynomických funkcií.

Ak $n = 0$, potom všeobecný predpis polynomickej funkcie nadobúda tvar $f(x) = a_0$. Takúto funkciu nazývame **konštantná funkcia**. Jej definičným oborom je množina reálnych čísel $D(f) = \mathbb{R}$. Obor hodnôt konštantnej funkcie pozostáva len z jednej hodnoty a_0 ($H(f) = \{a_0\}$). Graf konštantnej funkcie je vodorovná čiara, pozri obrázok 2.12. Konštantná funkcia je ohraničená. Zároveň môžeme konštatovať, že je nerastúca a neklesajúca, z čoho vyplýva, že nie je prostá. V každom $x \in \mathbb{R}$ má minimum a zároveň aj maximum.

Pre $n = 1$ má polynomická funkcia tvar $f(x) = a_1 x + a_0$, kde $a_1 \neq 0$. Takúto funkciu nazývame **lineárna funkcia**. Definičným oborom a oborom hodnôt lineárnej funkcie je množina reálnych

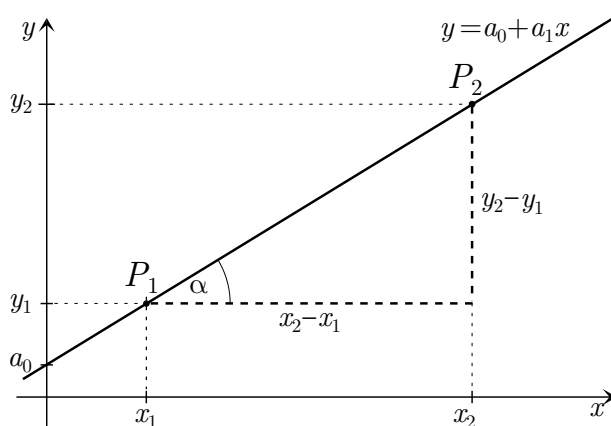


Obr. 2.12: Konštantná funkcia

čísel $\mathbb{R}$. Na rozdiel od konštantnej funkcie, lineárna funkcia nemá minimum ani maximum. Grafom lineárnej funkcie je priamka, ktorá pretína os x v bode so súradnicami $[0, a_0]$. Koeficient a_0 preto nazývame priesečník s osou x alebo tiež **konštanta**. Priamku vieme jednoznačne určiť pomocou dvoch bodov $P_1 = [x_1, y_1]$ a $P_2 = [x_2, y_2]$. Potom parameter a_1 je daný nasledovne:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (2.6)$$

Koeficient a_1 určuje o koľko sa zmení y -ová hodnota, ak hodnotu x zmeníme o 1 jednotku. Inými slovami, ak o jednu jednotku zväčšíme hodnotu x , y -ová hodnota sa zmení o hodnotu a_1 . Koeficient a_1 nazývame aj **smernica** priamky. Meria „sklon“ priamky a je rozhodujúci pre určenie, či je daná priamka rastúca alebo klesajúca. Z geometrického hľadiska a_1 je tangens uhla α , ktorý zvierajú priamka s osou x , pozri obrázok 2.13. Pre $a_1 > 0$, lineárna funkcia rastie, pre $a_1 < 0$ klesá. Keďže lineárna funkcia je na celom svojom definičnom obore buď rastúca alebo klesajúca, je prostá funkcia.



Obr. 2.13: Priamka s kladnou smernicou

Príklad 2.8

Predpokladajme, že dopyt D po výrobku závisí od jeho ceny p a tento vzťah je vyjadrený funkciou:

$$D = f(p) = 500 - \frac{1}{2}p. \quad (2.7)$$

Slovne popíšte daný vzťah. Určte definičný obor a obor hodnôt danej funkcie. Určte inverznú funkciu a ak existuje, slovne ju popíšte.

Riešenie:

Vyššie uvedená rovnica popisuje vzťah medzi cenou p výrobku a dopytom D po tomto výrobku, presnejšie vyjadruje množstvo výrobkov, ktoré sú zákazníci ochotní kúpiť za rôzne ceny. Cena p je nezávislá premenná a dopyt D je závislá premenná a $f(p)$ je funkcia dopytu. Pretože cena aj dopyt nemôžu byť záporné $500 - \frac{1}{2}p \geq 0$, definičný obor musí spĺňať túto nerovnosť. Po úprave dostaneme:

$$D_f = \{p \in \mathbb{R} \mid 0 \leq p \leq 1000\}.$$

Po dosadení krajných bodov definičného oboru do vzťahu (2.7) získame obor hodnôt:

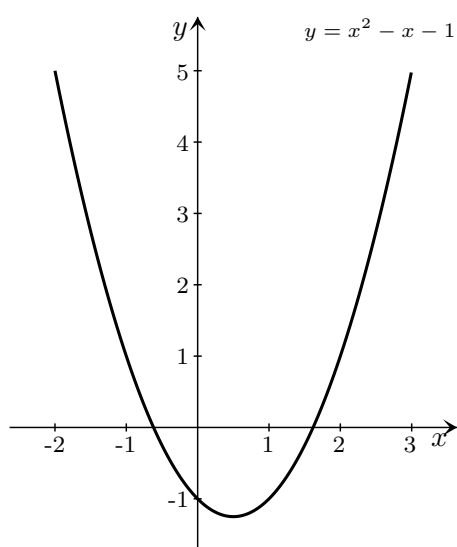
$$H_f = \{D \in \mathbb{R} \mid 0 \leq D \leq 500\}.$$

Ak chceme získať vyjadrenie ceny výrobku v závislosti od dopytu, musíme nájsť inverznú funkciu $f^{-1}(D)$. Rovnicu (2.7) upravíme nasledovne:

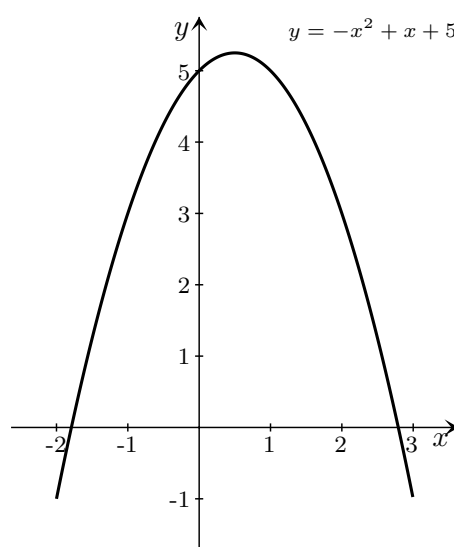
$$500 - D = \frac{1}{2}p \iff p = f^{-1}(D) = 2(500 - D) = 1000 - 2D.$$

Poznamenajme, že tu sme nezamieňali premenné navzájom. Je zrejmé, že $D_f^{-1} = H_f$ a $H_f^{-1} = D_f$.

Pre $n = 2$ je polynomická funkcia daná predpisom $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, kde $a_2 \neq 0$. Funkciu nazývame **kvadratická funkcia**, je definovaná na množine reálnych čísel $x \in \mathbb{R}$. Grafom je parabola s vrcholom v bode $V = [x_0, y_0]$, súmerná podľa svojej osi o , ktorá je rovnobežná s osou y a prechádza bodom V . Kvadratická funkcia je párna funkcia. Pre $a_2 > 0$ je parabola otvorená zhora, funkcia je konvexná (Obr. 2.14a). Pre $a_2 < 0$ je parabola otvorená zdola, funkcia je konkávna (Obr. 2.14b).

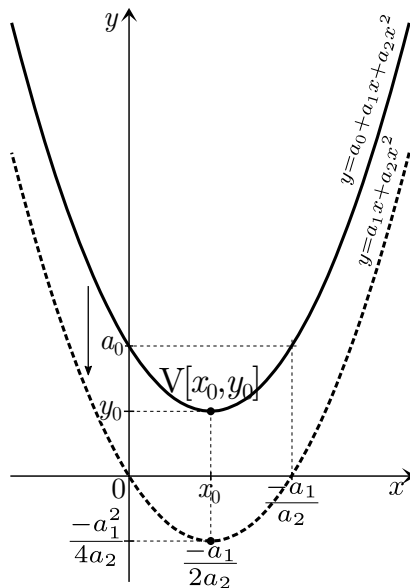


(a) Parabola s $a_2 > 0$, konvexná funkcia



(b) Parabola s $a_2 < 0$, konkávna funkcia

Obr. 2.14: Kvadratické funkcie



Obr. 2.15: Výpočet vrcholu paraboly

Vrchol V môžeme určiť buď upravením kvadratickej funkcie na tvar:

$$y - y_0 = a_2(x - x_0)^2 \quad (2.8)$$

alebo na základe nasledujúcich úprav. Parabolu posunieme o hodnotu $-a_0$ v smere osi y tak, aby prechádzala bodom $[0, 0]$ (pozri obrázok 2.15):

$$\begin{aligned} y &= a_2x^2 + a_1x + a_0 & / -a_0 \\ y - a_0 &= a_2x^2 + a_1x & / = 0 \\ 0 &= x(a_2x + a_1) \Leftrightarrow (x = 0) \vee (x = -\frac{a_1}{a_2}). \end{aligned}$$

Hľadáme nenulové riešenie a preto $x_0 = -\frac{a_1}{a_2}$. Po dosadení x_0 za x do pôvodného vyjadrenia kvadratickej funkcie a úpravách dostaneme pre y -ovú súradnicu vrcholu paraboly $y_0 = a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}$. Vrchol V paraboly má teda súradnice $\left[-\frac{a_1}{2a_2}, a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}\right]$.

Obor hodnôt kvadratickej funkcie je určený bodom V . Ak $a_2 > 0$, tak v bode V funkcia nadobúda najmenšiu hodnotu, funkcia je ohraničená zdola a preto $H_f = \left[a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}, \infty\right)$. Na intervale $\left(-\infty, -\frac{a_1}{2a_2}\right)$ funkcia klesá a na intervale $\left(-\frac{a_1}{2a_2}, \infty\right)$ rastie. Pre $a_2 < 0$ nadobúda kvadratická funkcia v bode V najväčšiu hodnotu, funkcia je ohraničená zhora, a preto $H_f = \left(-\infty, a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}\right]$. Kvadratická funkcia rastie na intervale $\left(-\infty, -\frac{a_1}{2a_2}\right)$ a klesá na intervale $\left(-\frac{a_1}{2a_2}, \infty\right)$.

Určme priesečníky kvadratickej funkcie s osou x , teda nájdime tie body x , pre ktoré $y = a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$. Tieto priesečníky nazývame nulové body alebo korene kvadratickej funkcie a môžeme ich nájsť úpravou rovnice na štvorec. V prípade, že vo výraze $D = a_1^2 - 4a_2a_0$ je $a_1^2 \geq 4a_2a_0$ má kvadratická funkcia dva reálne korene (výraz D nazývame diskriminant):

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}. \quad (2.9)$$

V prípade, že diskriminant $D = 0$ dostaneme dvojnásobný koreň $x_1 = x_2 = -\frac{a_1}{2a_2}$. Pre $D < 0$ existujú 2 korene kvadratickej funkcie iba v obore komplexných čísel (t.j. rovnica nemá reálne korene). V prípade, že $a_2 = 1$, čiže keď kvadratická funkcia má tvar $y = x^2 + a_1x + a_0$ vzťah (2.9) sa zjednoduší na:

$$x_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}. \quad (2.10)$$

Príklad 2.9

Majme kvadratickú funkciu $P_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danú nasledovne $P_2(x) = 2x^2 - 4x + 4$. Nájdite vrchol paraboly a zistite či existuje k danej funkcii inverzná funkcia.

Riešenie:

Funkciu upravíme na štvorec $y = P_2(x) = 2(x^2 - 2x + 2) = 2(x - 1)^2 + 2$ alebo $y - 2 = 2(x - 1)^2$. Z toho vidíme, že graf funkcie je konvexná parabola s vrcholom $V = [1, 2]$ (pozri vzťah (2.8)). Teraz zistíme či existuje inverzná funkcia $P_2^{-1}(x)$ k danej funkcii $P_2(x)$. Vyjadríme premennú x a dostaneme:

$$\frac{y - 2}{2} = (x - 1)^2$$

alebo

$$(x - 1) = \pm \sqrt{\frac{y - 2}{2}}.$$

Z toho vyplýva, že existujú 2 reálne čísla $x_1 = 1 + \sqrt{\frac{y-2}{2}}$ a $x_2 = 1 - \sqrt{\frac{y-2}{2}}$ a preto inverzná funkcia $P_2^{-1}(x)$ k funkcii $P_2(x)$ na celom definičnom obore neexistuje, keďže funkcia $P_2(x)$ nie je prostá. Ak ale obmedzíme definičný obor na interval $\langle 1, \infty \rangle$, vyberieme len riešenie x_1 . Teraz zameníme navzájom x a y a získame vyjadrenie inverznej funkcie $P_2^{-1}(x)$:

$$y = P_2^{-1}(x) = 1 + \sqrt{\frac{x - 2}{2}}, \quad D_{P_2^{-1}} = \langle 2, \infty \rangle.$$

Na záver si položíme otázku, mohli sme obmedziť definičný obor na interval $(-\infty, 1]$? Ak áno, ako bude vyjadrená inverzná funkcia? Nájdienie odpovede necháme na čteného čitateľa.

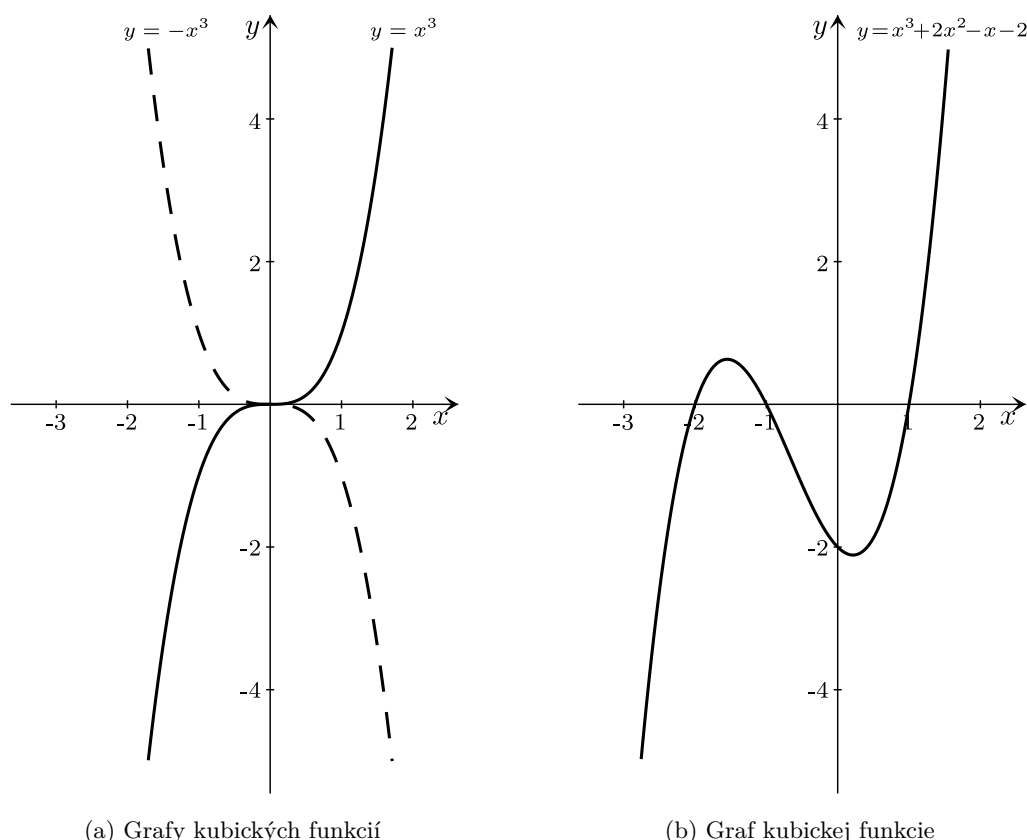
Príklad 2.10

Funkcia $f(t) = -1.05t^2 + 8.7t + 78$ opisuje zostatok fondu v miliónoch p.j., kde t je počet rokov po roku 2010. Na účely plánovania je dôležité vedieť, kedy bude zostatok uvedeného fondu nulový.

Riešenie:

Ak chceme zistiť, kedy to nastane, vyriešime nasledujúcu kvadratickú rovnicu $-1.05t^2 + 8.7t + 78 = 0$. Diskriminant $D = -8.7 - 4 \cdot (-1.05) \cdot 78 = 403.29$. Preto $t = \frac{-8.7 \pm \sqrt{403.29}}{-2.1}$. Odtiaľ $t = -5.42$ alebo $t = 13.70$. Zápornú hodnotu t neberieme do úvahy a preto zostatok fondu dosiahne nulovú hodnotu po 13.7 rokoch, teda približne v auguste v roku 2024.

Ďalšou zaujímavou polynomicou funkciou je kubická funkcia, jej stupeň n sa rovná 3. Funkčný predpis kubickej funkcie je $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, kde $a_3 \neq 0$. Jej definičný obor a obor hodnôt je množina reálnych čísel $\mathbb{R}$. Grafy rôznych kubických funkcií vidíme na obrázku 2.16a a 2.16b.



Obr. 2.16: Kubické funkcie

Racionálne funkcie jednej reálnej premennej

Racionálna funkcia je funkcia vyjadrená v tvare podielu dvoch polynomických funkcií:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde $P(x)$ a $Q(x)$ sú polynómy. Takto zapísaná funkcia je definovaná na obore racionálnych čísel s výnimkou tých hodnôt x , pre ktoré sa polynóm $Q(x)$ rovná nule. Takto určený definičný obor môžeme vyjadriť ako $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$. V prípade, že stupeň polynómu $P(x)$ je menší ako stupeň polynómu $Q(x)$, hovoríme o **rýdzo racionálnych** funkciách. Niekedy sa racionálne funkcie zvyknú nazývať aj **lomené funkcie**. Alternatívnym zápisom racionálnej funkcie je:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

Všeobecné vlastnosti a grafy racionálnych funkcií nie je jednoduché popísať, nakoľko závisia od stupňa polynómov $P(x)$ a $Q(x)$. Uvádzame preto niekoľko základných typov racionálnych funkcií. Najjednoduchším príkladom racionálnej funkcie je funkcia, ktorá má v čitateli konštantu a v menovateli polynóm prvého stupňa. Takúto funkciu môžeme všeobecne zapísať nasledovne:

$$f(x) = \frac{a_0}{b_1 x + b_0}.$$

Predpokladajme, že $a_0 = 0$. V takom prípade je definičným oborom $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid b_1x + b_0 \neq 0\}$. Oborom hodnôt je množina obsahujúca jediný bod a to číslo 0, t.j. $H_f = \{0\}$. Grafom takto definovanej racionálnej funkcie je horizontálna priamka, totožná s osou x okrem jedného jediného bodu x , pre ktorý platí $b_1x + b_0 = 0$.

2.5 Spojitosť funkcie

Definícia 2.17 Okolie bodu

δ -okolím bodu a ($\delta > 0$) rozumieme takú množinu všetkých bodov (na reálnej osi), ktoré majú od bodu a vzdialenosť menšiu než δ . Body ležia v intervale $(a - \delta, a + \delta)$, resp. platí $|x - a| < \delta$.

Definícia 2.18 Cauchyho definícia spojitosti

Hovoríme, že $f(x)$ je spojitá v bode a ak pre ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$ existuje také $\delta > 0$ (vo všeobecnosti závisí na voľbe čísla $\varepsilon > 0$), že pre všetky x z δ okolia bodu a platí:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

O spojitosti funkcie $f(x)$ v bode a má zmysel uvažovať len ak existuje funkčná hodnota $f(a)$ a funkcia $f(x)$ je definovaná na nejakom okolí bodu a . Môže sa stať, že je funkcia definovaná len pre hodnoty $x \leq a$ (je definovaná v ľavom okolí bodu a , t.j. pre $x \rightarrow a_-$) resp. $x \geq a$ (je definovaná v pravom okolí bodu a , t.j. pre $x \rightarrow a_+$). Z tohto dôvodu zavedieme pojem spojitosti funkcie v bode a zľava resp. sprava.

Definícia 2.19 Jednostranná spojitosť

Hovoríme, že $f(x)$ je spojitá v bode a zľava resp. sprava ak pre ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$ existuje také $\delta > 0$ (vo všeobecnosti závisí na voľbe čísla $\varepsilon > 0$), že pre všetky $x \geq a$ resp. $x \leq a$ z δ okolia bodu a platí:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Príklad 2.11

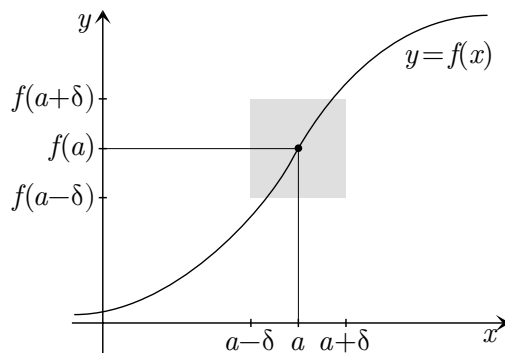
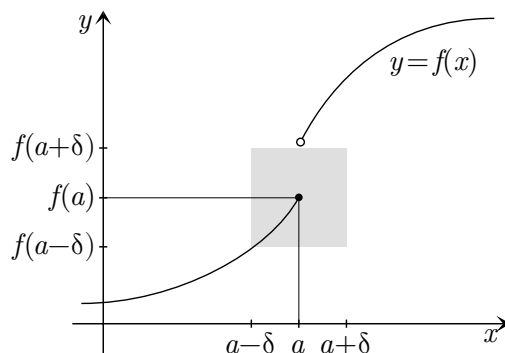
Overte spojitosť funkcie $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

Riešenie:

Definičný obor danej funkcie je interval $\langle -3, 3 \rangle$. Uvedená funkcia je v bode -3 spojitá sprava, pretože vľavo od bodu -3 nie je definovaná. V bode 3 je spojitá zľava, pretože vpravo od bodu 3 nie je definovaná.

Niektoré vlastnosti spojitých funkcií

1. Funkcia $f(x)$ je spojitá vo vnútornom bode a práve vtedy keď je spojitá v tomto bode zľava aj sprava.


 Obr. 2.17: Funkcia $f(x)$ je spojitá v bode a

 Obr. 2.18: Funkcia $f(x)$ je nespojitá v bode a

2. Funkcia $f(x)$ je spojitá na uzavretom intervale $\langle x_0, x_1 \rangle$, ak je spojitá vo všetkých vnútorných bodoch tohto intervalu, je spojitá sprava v ľavom krajnom bode intervalu a spojitá zľava v pravom krajnom bode intervalu.
3. Ak je funkcia $f(x)$ spojitá v každom bode svojho definičného oboru, potom ju nazývame spojitá funkcia.
4. Ak funkcia $f(x)$ je spojitá na intervale $\langle x_0, x_1 \rangle$, tak je na tomto intervale ohraničená.
5. **Weierstrassova veta:** Ak je funkcia $f(x)$ spojitá na intervale $\langle x_0, x_1 \rangle$, tak na tomto intervale nadobúda svoju maximálnu a minimálnu hodnotu.
6. Nech je funkcia $f(x)$ spojitá na intervale $\langle x_0, x_1 \rangle$. Potom pre každé číslo r medzi $f(x_0)$ a $f(x_1)$ existuje bod $a \in \langle x_0, x_1 \rangle$, taký že $f(a) = r$.
7. **Bolzanova veta:** Nech je funkcia $f(x)$ spojitá na intervale $\langle x_0, x_1 \rangle$ a nech $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$. Potom existuje taký bod $a \in \langle x_0, x_1 \rangle$, že platí $f(a) = 0$.

Príklad 2.12

Zistite, či je funkcia $f(x)$ spojitá, ak:

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Riešenie:

Definičný obor danej funkcie je $D(f) = \mathbb{R}$. Prípadný bod nespojitosti je bod $a = 0$. Overíme, či $f(a)$ v bode 0 je rovnaká pre $x \rightarrow 0_-$ a pre $x \rightarrow 0_+$, t.j. spočítame $f(0_-) = \cos 0_- = 1$, $f(0_+) = 0^2 + 1 = 1$. Funkčná hodnota v bode 0 zľava sa rovná funkčnej hodnote sprava a preto daná funkcia je spojitá v bode $a = 0$.

Príklad 2.13

Zistite, či je funkcia $f(x)$ spojitá, ak:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} + 2, & x > 1 \\ x^2 + x, & x \leq 1. \end{cases}$$

Riešenie:

Budeme postupovať obdobne ako v predchádzajúcom príklade. Definičný obor funkcie $f(x)$ je $D(f) = \mathbb{R}$. Prípadný bod nespojitosti je bod $a = 1$. Vypočítame $f(1_-) = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$ a $f(1_+) = 1^2 + 1 = 2$. Funkčná hodnota v bode 1 zľava sa nerovná funkčnej hodnote v bode 1 sprava a preto daná funkcia je nespojitá v bode $a = 1$.

Príklad 2.14 Úloha na samoštúdium

Nájdite body nespojitosti funkcie $f(x) = \frac{1}{x^3 - 3x^2 - 4x}$ a funkcie $f(x) = \frac{x}{\sin 2x}$.

Príklad 2.15 Úloha na samoštúdium

Ukážte, že funkcia $f(x)$ je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a nakreslite jej graf ak:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \leq 1 \\ 2, & -1 < x < 1 \\ 1 + x, & x \geq 1. \end{cases}$$

2.6 Limita funkcie

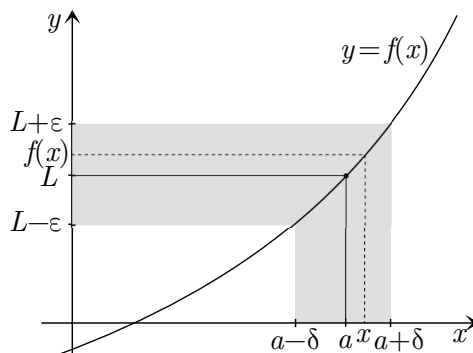
Jedným zo základných konceptov v matematike je koncept limity. V tejto kapitole budeme hľadať odpoveď na otázku: „Ku akej hodnote sa približuje závislá premenná y funkcie danej predpisom $y = f(x)$, keď sa hodnoty nezávislej premennej x približujú k danej hodnote a ?“

Uvažujme funkciu $f(x)$ a také číslo $a \in \mathbb{R}$, pre ktoré existuje jeho okolie $O(a)$, t.j. otvorený interval $(a - \delta, a + \delta)$, kde $\delta > 0$, na ktorom je funkcia definovaná pre každé $x \neq a$.

Definícia 2.20 Limita funkcie

Číslo L nazveme limitou funkcie $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ v čísle a práve vtedy, keď ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré je $0 < |x - a| < \delta$, platí $|f(x) - L| < \varepsilon$. Stručne píšeme:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$


 Obr. 2.19: Limita funkcie $f(x)$ v bode a

Príklad 2.16

Vypočítajte limitu funkcie $f(x) = x^2$ v bode $a = 2$, využite definíciu limity.

Riešenie:

Podľa definície, pre každé $\varepsilon > 0$ nájdeme také $\delta > 0$, že platí $|f(x) - 4| < \varepsilon$. Nerovnosť platí pre všetky x , ktoré spĺňajú nerovnicu $0 < |x - 2| < \delta$.

Hodnotu δ nájdeme nasledovným postupom. Majme $\varepsilon > 0$ a zvolme $\delta = \sqrt{\varepsilon + 4} - 2$, ktoré bude kladné, keďže $\sqrt{\varepsilon + 4} > 2$ ak $\varepsilon > 0$.

Ak $0 < |x - 2| < \delta$, potom podľa definície absolútnej hodnoty dostaneme:

$$\begin{aligned} -\delta < x - 2 < \delta & \quad / + 4 \\ -\delta + 4 < x - 2 + 4 < \delta + 4 \\ -\delta - 4 < -\delta + 4 < x + 2 < \delta + 4 \\ -\delta - 4 < x + 2 < \delta + 4 \\ |x + 2| < \delta + 4. \end{aligned}$$

Ak podľa predpokladu platí $0 < |x - 2| < \delta$, potom po využití $|x + 2| < \delta + 4$ dostaneme:

$$|x^2 - 4| = |x - 2| \cdot |x + 2| < \delta \cdot (\delta + 4).$$

Po dosadení $\delta = \sqrt{\varepsilon + 4} - 2$ dostaneme:

$$\begin{aligned} |x - 2| \cdot |x + 2| &< \delta \cdot (\delta + 4) = (\sqrt{\varepsilon + 4} - 2)(\sqrt{\varepsilon + 4} - 2 + 4) \\ |x^2 - 4| &< (\sqrt{\varepsilon + 4} - 2)(\sqrt{\varepsilon + 4} + 2) \\ |x^2 - 4| &< (\sqrt{\varepsilon + 4})^2 - 2^2 \\ |x^2 - 4| &< \varepsilon + 4 - 4 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Našli sme teda také $\delta = \sqrt{\varepsilon + 4} - 2$, že pre $0 < |x - 2| < \delta$ je nerovnosť $|f(x) - 4| < \varepsilon$ splnená, ak máme dané $\varepsilon > 0$. Preto limita funkcie $f(x) = x^2$ pre $x \rightarrow 2$ sa rovná 4, t.j. $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

Limita funkcie a postupnosti

Limitu funkcie môžeme definovať aj na základe postupnosti jej funkčných hodnôt.

Definícia 2.21 *Limita postupnosti funkčných hodnôt*

Číslo L nazveme limitou funkcie $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ v čísle a , ak existuje taká postupnosť čísel $\{x_n \in D_f \mid x_n \neq a\}_{n=1}^\infty$, konvergujúcich k číslu a , že postupnosť funkčných hodnôt $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$ konverguje k hodnote L .

V prípade vyšetřovania priebehu funkcie môžu nastať situácie, keď nás bude zaujímať k akej hodnote sa budú približovať funkčné hodnoty, keď číslo a sa bude stále zmenšovať, alebo zväčšovať. Budeme teda uvažovať rozšírenú množinu reálnych čísel o hodnotu $-\infty$ a ∞ , t.j. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Príklad 2.17

Uvažujme postupnosť hodnôt definovanú predpisom $x_n = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$. Nájdite limitu tejto postupnosti pre $n \rightarrow \infty$.

Riešenie:

- Intuitívne je limita tejto postupnosti rovná 2.
- Čiže keď vezmeme malé okolie bodu 2, potom všetky body postupnosti, pre dostatočne veľké n , budú v tom okolí.

Príklad 2.18 *Úloha na samoštúdium*

Uvažujme teraz postupnosť hodnôt definovanú nasledovne $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{1 + \frac{1}{n}}$. Nájdite limitu tejto postupnosti pre $n \rightarrow \infty$.

Limita funkcie v špeciálnych bodoch

Ak a je reálne číslo (tzn. x sa neblíži k $\pm\infty$), tak hovoríme o **limite vo vlastnom bode**. Ak L je reálne číslo (tzn. $y = f(x)$ sa neblíži k $\pm\infty$), tak hovoríme o **vlastnej limite**. Môžu nastať tieto štyri typy limít:

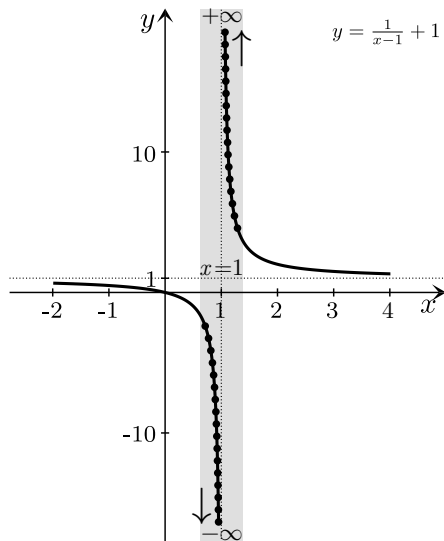
1. vlastná limita vo vlastnom bode, t.j. $L \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$,
2. vlastná limita v nevlastnom bode, t.j. $L \in \mathbb{R}, a = \pm\infty$,
3. nevlastná limita vo vlastnom bode, t.j. $L = \pm\infty, a \in \mathbb{R}$,
4. nevlastná limita v nevlastnom bode, t.j. $L = \pm\infty, a = \pm\infty$.

Jednostranné limity funkcie

- Ak sa pri vyšetřovaní limity vo vlastnom bode a obmedzíme len na argumenty $x < a$, tak hovoríme o **limite zľava** a označujeme ju $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$.

- Ak sa pri vyšetrowaní limity vo vlastnom bode a obmedzíme len na argumenty $x > a$, tak hovoríme o **limite sprava** a označujeme ju $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$.

Tieto limity nazývame **jednostrannými limitami**. Môžu byť vlastné alebo nevlastné.



Obr. 2.20: Funkcia nemá limitu v bode 1

Definícia 2.22 Bod nespojitosti funkcie a limita

Hovoríme, že bod a je **bodom nespojitosti** funkcie $f(x)$ ak:

1. funkcia $f(x)$ nemá limitu v bode a ,
2. funkcia $f(x)$ nie je definovaná v bode a ,
3. funkcia $f(x)$ má limitu v bode a , je aj v bode a definovaná, ale $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

Definícia 2.23 Spojitosť funkcie

Nech je funkcia $f(x)$ definovaná v nejakom okolí bodu a . Hovoríme, že funkcia je **spojitá**, **zľava spojitá** alebo **sprava spojitá** v bode a práve vtedy keď:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= f(a) \quad (\text{spojitá}), \\ \lim_{x \rightarrow a-} f(x) &= f(a) \quad (\text{zľava spojitá}), \\ \lim_{x \rightarrow a+} f(x) &= f(a) \quad (\text{sprava spojitá}). \end{aligned}$$

Výpočet limity funkcie

Pri výpočte limít využívame nasledujúce pravidlá:

1. Ak vo vlastnom bode a existujú obe jednostranné limity funkcie $f(x)$ a rovnajú sa L , potom v bode a existuje limita a tiež sa rovná L :

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

2. Ak vo vlastnom bode a existujú obe jednostranné limity funkcie $f(x)$ a sú rôzne, potom limita v bode a neexistuje:

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ neexistuje.}$$

Elementárne funkcie sú spojité na celom svojom definičnom obore, preto v každom bode $a \in D_f$ sa limita rovná funkčnej hodnote:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Limita funkcií tvorených aritmetickými operáciami

Predpokladáme, že existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$, potom existujú aj nasledujúce limity:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x), \\ \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x), \\ \lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x)) &= k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad k \in \mathbb{R}, \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \text{pre } L_2 \neq 0, \\ \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt{L_1}, \quad \text{pre } L_1 \geq 0, \\ \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n &= (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n = L_1^n, \\ \lim_{x \rightarrow a} (k^{f(x)}) &= k^{(\lim_{x \rightarrow a} f(x))} = k^{L_1}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Uvedené vzťahy platia aj pre jednostranné limity. Nedajú sa však použiť, ak niektorá z limít $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ alebo $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ neexistuje.

Veta 2.1 Existencia limity

Ak pre $x \rightarrow a$ je limita funkcie $f(x)$ rovná:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0,$$

a v určitom okolí bodu a , okrem samotného bodu a platí $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$), potom:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty \quad (\text{resp. } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = -\infty).$$

Ak funkcia $f(x)$ v ľubovoľnom okolí bodu a mení znamienko, tak $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$ neexistuje.

Príklad 2.19

Zistite, či existuje limita funkcie $f(x)$ v bode $x_0 = 0$ pre:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Riešenie:

V príklade 2.12 sme zistili, že definičný obor danej funkcie je $D(f) = \mathbb{R}$, a že daná funkcia je v bode 0 spojitá. Overíme, či limita danej funkcie pre $x \rightarrow 0_-$, t.j. $\lim_{x \rightarrow 0_-} \cos(x) = \cos(0_-) = 1$ sa rovná limite danej funkcie pre $x \rightarrow 0_+$: $\lim_{x \rightarrow 0_+} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow 0_+} x^2 + \lim_{x \rightarrow 0_+} 1 = 0 + 1 = 1$.

Platí $\lim_{x \rightarrow 0_-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Obe jednostranné limity sa rovnajú a rovnajú sa aj funkčnej hodnote vo vyšetrovanom bode a preto limita v bode $x_0 = 0$ existuje a rovná sa 1.

Príklad 2.20

Zistite, či existuje limita funkcie $f(x)$ v bode $x_0 = 1$ pre:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} + 2, & x > 1 \\ x^2 + x, & x \leq 1. \end{cases}$$

Riešenie:

V príklade 2.13 sme zistili, že definičný obor danej funkcie je $D(f) = \mathbb{R}$. Tiež sme zistili, že v danom bode je funkcia nespojitá. Limita v tomto bode môže existovať, preto vypočítame obe jednostranné limity: $\lim_{x \rightarrow 1_-} (\frac{x}{4} + 2) = \lim_{x \rightarrow 1_-} \frac{x}{4} + \lim_{x \rightarrow 1_-} 2 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$ a limitu $\lim_{x \rightarrow 1_+} (x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow 1_+} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1_+} x = 1 + 1 = 2$.

Dostali sme, že $\lim_{x \rightarrow 1_-} f(x) = f(1_-) \neq \lim_{x \rightarrow 1_+} f(x) = f(1_+)$. Keďže sa jednostranné limity navzájom líšia, preto limita funkcie $f(x)$ v bode $x_0 = 1$ neexistuje.

Príklad 2.21

Určte definičný obor funkcie $f(x) = \frac{2x}{\sqrt[3]{9-x^2}}$ a vypočítajte limitu pre $x = -3$.

Riešenie:

Definičný obor funkcie $f(x)$ je interval $(-3, 3)$. Vypočítame limitu: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x}{\sqrt[3]{9-x^2}} = \frac{2 \cdot (-3)}{\sqrt[3]{9-(-3)^2}} = \frac{-6}{\sqrt[3]{9-9}} = \frac{-6}{0} = -\infty$.

Príklad 2.22

Určte definičný obor funkcie $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 8x}$ a vypočítajte limitu pre $x \rightarrow \infty$.

Riešenie:

Definičný obor funkcie $f(x)$ je $D(f) = (-\infty, 0) \cup \langle 8, \infty \rangle$. Spravíme algebraickú úpravu, použijeme vetu o aritmetických operáciach 2.11 a vypočítame limitu: $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 8x}) =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 8x}) \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - 8x}}{x + \sqrt{x^2 - 8x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 8x})(x + \sqrt{x^2 - 8x})}{x + \sqrt{x^2 - 8x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - (\sqrt{x^2 - 8x})^2}{x + \sqrt{x^2 - 8x}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + 8x}{x + \sqrt{x^2 - 8x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{x + \sqrt{x^2 - 8x}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{1 + \sqrt{1 - \frac{8}{x}}} = \frac{8}{1 + \sqrt{1}} = 4$.

Príklad 2.23

Nech je funkcia $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná predpisom $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Riešenie:

Uvažujme 2 prípady, pre $x > 0$ ($|x| = x$) a pre $x < 0$ ($|x| = -x$):

1. $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1,$
2. $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x}{x} = -1.$

Limita zľava sa nerovná limite sprava, preto limita v bode 0 neexistuje.

Príklad 2.24

Nech je funkcia $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná nasledovne $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+3x-1}{x}}$. Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Riešenie:

Použijeme vetu o aritmetických operáciach 2.11 a vypočítame limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2+3x-1}{x}} = \sqrt{\frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x - 1}{\lim_{x \rightarrow 1} x}} = \sqrt{\frac{1+3-1}{1}} = \sqrt{3}.$$

Príklad 2.25

Nech funkcia $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ je definovaná predpisom $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$. Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

Riešenie:

Ak použijeme vetu o aritmetických operáciach 2.11 a samostatne určíme limitu čitateľa a menovateľa, zistíme, že oba členy sa blížia k nule a týmto spôsobom nevieme nájsť limitu. Preto čitateľa a menovateľa upravíme nasledovne:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{(\sqrt{4}+2)} = \frac{1}{4}.$$

Limita zloženej funkcie**Veta 2.2 Limita zloženej funkcie**

Nech $a \in \mathbb{R}^*$ a nech existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \in \mathbb{R}$ a $\lim_{y \rightarrow B} f(y) = C \in \mathbb{R}^*$, pričom pre všetky $x \neq a$ z D_g platí $g(x) \neq B$, potom v bode a existuje limita zloženej funkcie $(f \circ g)(x)$ a platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow B} f(y) = C.$$

Predošlá veta sa dá rozšíriť aj pre nevlastnú limitu vnútornej funkcie $g(x)$:

Nech $a \in \mathbb{R}^*$ a nech existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ a $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(y) = C \in \mathbb{R}^*$, potom v bode a existuje limita zloženej funkcie $(f \circ g)(x)$ a platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(y) = C.$$

Pokiaľ je vonkajšia funkcia $f(y)$ spojitá v bode B , môžeme zameniť poradie vonkajšej funkcie a limity:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right).$$

Príklad 2.26

Nech je funkcia $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná predpisom $f(x) = e^{\frac{-3}{x^2}}$. Vypočítajte limitu: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Riešenie:

Ide o výpočet limity zloženej funkcie. Vnútoraná funkcia je $g(x) = \frac{-3}{x^2}$ a vonkajšia funkcia je $f(y) = e^y$.

Vypočítame limitu vnútornej funkcie:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{x^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (-3)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2)} = \frac{-3}{\infty^2} = 0 = B.$$

V bode $B = 0$ je vonkajšia funkcia $f(y)$ spojitá a teda platí:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-3}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{x^2}} = e^0 = 1.$$

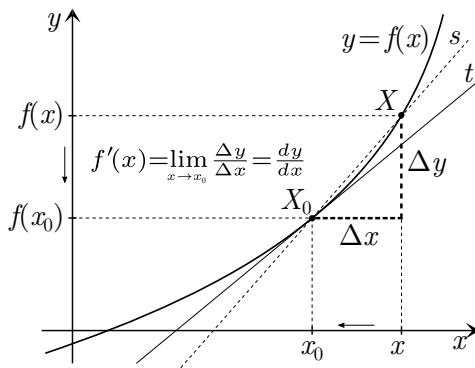
Príklad 2.27 Úloha na samoštúdium

Nájdite nasledujúce limity: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x}$ a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\tan x}$.

2.7 Derivácia funkcie jednej reálnej premennej

Nech je funkcia $f(x)$ spojitá v nejakom okolí $O(x_0)$ bodu x_0 . Chceme nájsť dotyčnicu t grafu funkcie $f(x)$ v bode $X_0 = [x_0, f(x_0)]$. Jeden bod priamky t poznáme, treba určiť smernicu dotyčnice t . Nech x je ľubovoľný bod z okolia bodu x_0 . Na grafe mu zodpovedá bod $X = [x, f(x)]$.

Označme $\Delta x = x - x_0$ prírastok argumentu a $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ zodpovedajúci prírastok funkcie $f(x)$ na intervale $\langle x, x_0 \rangle$. Podiel $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nazývame **diferenčným podielom** funkcie $f(x)$ v bode x_0 pre prírastok argumentu Δx . Diferenčný podiel vyjadruje **priemernú** veľkosť zmeny hodnoty funkcie $f(x)$, ktorá prislúcha jednotkovej zmene argumentu na intervale $\langle x, x_0 \rangle$. Geometrický význam diferenčného podielu spočíva v tom, že jeho hodnota je smernicou priamky X_0X .



Obr. 2.21: Ilustrácia definície derivácie funkcie $f(x)$ v bode x_0

Príklad 2.28

Nech je funkcia celkových nákladov $N(x)$ v závislosti od počtu x jednotiek vyrobených výrobkov definovaná vzťahom:

$$N(x) = \frac{1}{10}x^3 - 3x^2 + 50x.$$

Aké sú priemerné náklady na jeden kus výrobku pri zvýšení produkcie z 10 na 15 výrobkov?

Riešenie:

Priemerné náklady na jeden kus výrobku pri zvýšení produkcie z 10 na 15 výrobkov sú určené diferenčným podielom na intervale $\langle 10, 15 \rangle$:

$$\frac{N(15) - N(10)}{15 - 10} = \frac{412.5 - 300}{5} = 22.5.$$

Definícia 2.24 Derivácia funkcie

Nech je funkcia $f(x)$ definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$. Ak existuje (vlastná) limita zlomku $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ pre $x \rightarrow x_0$, potom limitu:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (2.12)$$

nazývame **deriváciou** funkcie $f(x)$ v bode x_0 a označujeme ju $f'(x_0)$.

Funkciu $f(x)$, ktorá má v bode x_0 deriváciu $f'(x_0)$ nazývame **derivovateľnou** v bode x_0 . Ak je limita (2.12) vlastná (výsledok je reálne číslo), tak hovoríme o **vlastnej derivácii**. Ak je limita (2.12) nevlastná (výsledok je $\pm\infty$), tak hovoríme o **nevlastnej derivácii**. Derivácia $f'(x_0)$ vyjadruje okamžitú zmenu, resp. rýchlosť zmeny funkcie v bode x_0 .

V ekonomických modeloch sa niekedy hovorí o medzných hodnotách:

- medzná miera substitúcie,
- medzná miera transformácie produktu,
- medzná miera výnosu investícií...

V týchto prípadoch ide o deriváciu. Voľne povedané, ide o okamžitú zmenu závislej premennej, spôsobenú prírastkom nezávislej premennej o jednotku.

Hraničný (marginálny) náklad**Príklad 2.29 Úloha na samoštúdium**

Uvažujme funkciu celkových nákladov z predchádzajúceho príkladu. Potom limita:

$$N'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{N(x) - N(x_0)}{x - x_0}$$

vyjadruje okamžitú rýchlosť zmeny nákladov v bode x_0 . Nazývame ju aj hraničný (marginálny) náklad v bode x_0 .

Určite hraničný náklad funkcie N pri výrobe 10 výrobkov.

Geometrický význam derivácie spojitých funkcií

Vlastná derivácia spojitej funkcie v bode x_0 sa rovná smernici k jej dotyčnice v tomto bode. Označme $\Delta x = x - x_0$, t.j. $x = x_0 + \Delta x$. Ak $x \rightarrow x_0$, potom $\Delta x \rightarrow 0$. Za tohto predpokladu môžeme deriváciu zapísať v tvare:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \tan \alpha = k. \quad (2.13)$$

Limitným prechodom $\Delta x \rightarrow 0$ splynú body X_0X do jedného a sečnica s sa zmení na dotyčnicu t (pozri obrázok 2.21).

Na ľavej strane vzťahu 2.13 máme deriváciu funkcie $f(x)$ v bode x_0 a na pravej strane smernicu k dotyčnice ku grafu funkcie $f(x)$ v bode x_0 .

Poznámka:

Ak nemá funkcia $f(x)$ v bode x_0 deriváciu, tak má graf funkcie $f(x)$ v tomto bode „hrot“.

Dotyčnica ku grafu funkcie

Rovnica dotyčnice t funkcie $f(x)$ v bode x_0 má tvar:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ak je derivácia funkcie $f(x)$ v bode x_0 nevlastná, tak dotyčnicou je kolmica na os x s rovnicou $x = x_0$.

Derivácie najpoužívanějších funkcií

$$\begin{aligned} (a)' &= 0, & (\sin x)' &= \cos x, \\ (x^a)' &= ax^{a-1}, \quad a \in \mathbb{R}, & (\cos x)' &= -\sin x, \\ (a^x)' &= a^x \ln a, \quad a > 0, & (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, \\ (e^x)' &= e^x, & (\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}, \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x}, & (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a}, \quad a \neq 1, a > 0, & (\arctan x)' &= \frac{1}{(1+x^2)}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Derivácia funkcií tvorených aritmetickými operáciami

Nech $f(x)$ a $g(x)$ sú dve diferencovateľné funkcie premennej x , $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$, potom platí:

$$\begin{aligned}(k \cdot f(x))' &= k \cdot f'(x), \\ (f(x) \pm g(x))' &= f'(x) \pm g'(x), \\ (f(x) \cdot g(x))' &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Derivácia zloženej funkcie $(f \circ g)(x)$:

$$(f \circ g)(x)' = (f(g(x)))' = f'(y)g'(x),\tag{2.16}$$

kde po zderivovaní dosadíme $y = g(x)$.

Príklad 2.30

Zderivujte funkciu $f(x) = 4x^4 - 2x + \ln x + \sqrt{x}$.

Riešenie:

Označíme $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, použijeme vzorce 2.14 a dostaneme:

$$f'(x) = 16x^3 - 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Príklad 2.31

Sú dané funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$ a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = e^x$. Vypočítajte $(f(x) \cdot g(x))'$ a $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$.

Riešenie:

1. $(f(x) \cdot g(x))' = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2 + x),$
2. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{2xe^x - x^2e^x}{(e^x)^2} = \frac{x(2-x)}{e^x}.$

Príklad 2.32

Zderivujte funkciu $f(x) = \cos(x^3)$.

Riešenie:

Ide o derivovanie zloženej funkcie. Označme $f(y) = \cos y$, $y = g(x) = x^3$. Zderivujeme obe zložky zloženej funkcie: $f'(y) = -\sin y$, $g'(x) = 3x^2$. Podľa pravidla (2.16) dostaneme:

$$(f(g(x)))' = f'(y)g'(x) = -\sin y \cdot 3x^2.$$

Po dosadení $y = x^3$ dostaneme $f'(x) = -\sin(x^3) \cdot 3x^2 = -3x^2 \cdot \sin(x^3)$.

Príklad 2.33

Zderivujte funkciu $f(x) = \ln(\sin x)$.

Riešenie:

Ide o derivovanie zloženej funkcie. Označme $f(y) = \ln y$, $y = g(x) = \sin x$. Zderivujeme obe zložky zloženej funkcie: $f'(y) = \frac{1}{y}$, $g'(x) = \cos x$. Potom:

$$(f(g(x)))' = f'(y)g'(x) = \frac{1}{y} \cos x.$$

Po dosadení $y = \sin x$ dostaneme $f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cos x = \cot x$.

Príklad 2.34 Úloha na samoštúdium

Zderivujte nasledujúce funkcie:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 5x^2 + 4x - 1, & f(x) &= \frac{2-3x}{x+1}, & f(x) &= \sqrt{4x-1}, & f(x) &= x\sqrt{x^3}, \\ f(x) &= \cos x \sqrt{1+\sin^2 x}, & f(x) &= \frac{4\sqrt[3]{x^2}}{3}, & f(x) &= (x+3)\sqrt[4]{x}, & f(x) &= x^5 \cos x. \end{aligned}$$

2.8 L'Hospitalovo pravidlo

L'Hospitalovo pravidlo používame na výpočet limit, pri ktorých po priamom dosadení hodnoty $x = a$ dostaneme neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$ alebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Inými slovami, toto pravidlo nám pomáha vypočítať $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, kde $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ alebo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$.

Veta 2.3 L'Hospitalovo pravidlo

Ak máme funkcie $f(x)$ a $g(x)$, pre ktoré v bode a platí $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ alebo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$, potom v prípade, že existuje limita $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (2.17)$$

Pravidlo môžeme použiť aj pre jednostranné limity. Ak získame opäť neurčitý typ limity, tak opäť použijeme l'Hospitalovo pravidlo.

Príklad 2.35

Vypočítajte limitu funkcie $f(x) = \frac{\sin x}{2x}$ pre $x \rightarrow 0$ (t.j. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$).

Riešenie:

Do vyjadrenia funkcie $f(x)$ dosadíme 0 a zistíme, že sa jedná o limitu typu $\frac{\sin 0}{2 \cdot 0} = \frac{0}{0}$. Ak teraz použijeme l'Hospitalovo pravidlo dostaneme:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Príklad 2.36

Vypočítajte limitu funkcie $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$ pre $x \rightarrow \infty$ (t.j. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2^x}$).

Riešenie:

Do vyjadrenia funkcie $f(x)$ dosadíme ∞ a zistíme, že sa jedná o limitu typu $\frac{\infty^2}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$. Opäť použijeme l'Hospitalovo pravidlo a dostaneme:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2)'}{(2^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2^x \ln 2}.$$

Keďže sme opäť dostali neurčitý výraz $\frac{\infty}{\infty}$, použijeme l'Hospitalovo pravidlo druhý krát a dostaneme:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x)'}{(2^x \ln 2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln 2} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

Výpočet limity zložených funkcií**Príklad 2.37**

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln \frac{e^{4x} - e^x}{\sin 3x})$.

Riešenie:

Vypočítame limitu vnútornej zložky zloženej funkcie $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^x}{\sin 3x}$, ktorá je typu $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{4x} - e^x)'}{(\sin 3x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{4x} - e^x}{3 \cos 3x} = \frac{4e^{4 \cdot 0} - e^0}{3 \cos 3 \cdot 0} = \frac{4 - 1}{3} = 1.$$

Dosadíme do vonkajšej funkcie: $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln \frac{e^{4x} - e^x}{\sin 3x}) = \lim_{x \rightarrow 0} (\ln 1) = 0$.

Výpočet limity typu $\infty - \infty$

Prevedieme úpravu podľa vzťahu $A - B = A(1 - \frac{B}{A})$, pričom limitu zlomku $\frac{B}{A}$ počítame pomocou l'Hospitalovho pravidla.

Príklad 2.38

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x)$.

Riešenie:

Výraz upravíme:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right).$$

Pomocou l'Hospitalovho pravidla spočítame limitu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{\frac{1}{\infty}}{1} = 0.$$

Dosadíme do pôvodnej limity: $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = \infty \cdot (1 - 0) = \infty \cdot 1 = \infty$.

Príklad 2.39

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

Riešenie:

Zlomky prevedieme na spoločného menovateľa a sčítame:

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\sin x - x}{x \sin x}.$$

Dostaneme sme limitu typu $\frac{0}{0}$, preto použijeme l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{(\sin x - x)'}{(x \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x}.$$

Opäť dostaneme limitu typu $\frac{0}{0}$ a znova použijeme l'Hospitalovho pravidlo:

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{-0}{1 + 1 + 0} = 0.$$

Výpočet limity typu $0 \cdot \pm\infty$, resp. $A \cdot B$, kde $\lim A = 0, \lim B = \pm\infty$

Limitu prevedieme na podiel nasledovne: $A \cdot B = \frac{A}{B^{-1}} = \frac{0}{0}$, alebo $A \cdot B = \frac{B}{A^{-1}} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ a použijeme l'Hospitalovo pravidlo.

Príklad 2.40

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 0_+} (x^2 \ln x)$.

Riešenie:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0_+} x^2 \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\ln x}{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{(\ln x)'}{(x^{-2})'} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{(\frac{1}{x})}{-2x^{-3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{x^2}{-2} = \frac{0}{-2} = 0. \end{aligned}$$

Výpočet limity typu $1^{\pm\infty}, 0^0, \infty^0$

1. Limitu tohto typu prevedieme na konštantný základ: $A^B = e^{\ln A^B} = e^{B \ln A}$.
2. Ďalej počítame ako limitu zloženej funkcie. Vnútorou zložkou funkcie je exponent $B \ln A$ a jeho limitu už vieme vypočítať, keďže je typu $0 \cdot \pm\infty$. Výsledok limity exponentu dosadíme do vonkajšej funkcie.

Príklad 2.41

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 0_+} x^x$.

Riešenie:

Limita $\lim_{x \rightarrow 0_+} x^x$ je typu 0^0 , preto použijeme vyššie uvedenú myšlienku:

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0_+} e^{x \ln x}.$$

Spočítame limitu exponentu:

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{x}{-1} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Výsledná limita je potom $\lim_{x \rightarrow 0_+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$.

Príklad 2.42

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 0+} (2x + 1)^{\frac{1}{x}}$.

Riešenie:

Limita $\lim_{x \rightarrow 0+} (2x + 1)^{\frac{1}{x}}$ je typu 1^∞ , preto ju prevedieme na:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} e^{\frac{1}{x} \ln 2x + 1}.$$

Spočítame limitu exponentu:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x} \ln 2x + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln 2x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln 2x + 1)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{2x+1} \cdot 2}{1} = \frac{2}{1} = 2.$$

Výsledná limita je $\lim_{x \rightarrow 0+} e^{\frac{1}{x} \ln 2x + 1} = e^2$.

Príklad 2.43

Vypočítajte limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 5x - 1}{\sin^2 x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

2.9 Diferenciál funkcie

Hovoríme, že funkcia $f(x)$ je v bode x_0 diferencovateľná, ak možno prírastok $f(x) - f(x_0)$ vyjadriť v tvare súčtu:

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0),$$

kde A je reálne číslo, $\omega(x)$ je spojitá funkcia v bode x_0 a má hodnotu 0 v tomto bode, t.j. $\lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0$.

Nutná a postačujúca podmienka diferencovateľnosti $f(x)$ v bode x_0 je existencia derivácie $f'(x_0)$. Číslo A je derivácia funkcie $f(x)$ v bode x_0 :

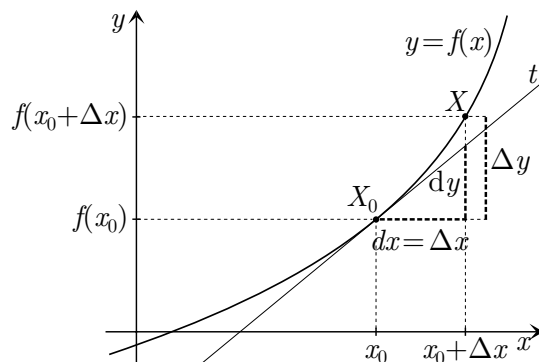
$$A = f'(x_0).$$

Definícia 2.25 Diferenciál funkcie

Lineárnu funkciu $f'(x)(x - x_0)$ nazývame **diferenciálom funkcie** $f(x)$.

Diferenciál označujeme $df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ resp. $dy = f'(x_0) \cdot dx$. Číselná hodnota diferenciálu $df(x) = dy$ je určená prírastkom $\Delta x = x - x_0$ a faktorom proporcionality $f'(x_0)$.

Hodnota prírastku $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ sa dá približne odhadnúť pomocou hodnoty $dy = f'(x_0) \cdot dx$ (pozri obrázky 2.22).



Obr. 2.22: Ilustrácia diferenciálu funkcie

Využitie diferenciálu

Diferenciál sa dá využiť na odhad absolútnej a relatívnej chyby výpočtu určitej veličiny z nameraných hodnôt, pričom:

- **absolútna chyba** predstavuje maximum rozdielu skutočnej veľkosti a nameranej hodnoty a aproximujeme ju **diferenciálom**,
- **relatívna chyba** je určená podielom absolútnej chyby (diferenciálu) k nameranej hodnote.

2.10 Využitie derivácie v ekonómii

Derivácia funkcie charakterizuje zmenu funkčnej hodnoty pre „veľmi malú“ zmenu premennej funkcie. V ekonómii sa často používa modifikovaná miera na opis zmeny hodnoty danej funkcie. Dôvodom je, že napr. zmena ceny chleba o 1 p.j. by bola v porovnaní so súčasnou cenou veľmi veľká, pričom zmena ceny auta o 1 p.j. by bola veľmi malá. Ekonómovia uprednostňujú na charakterizáciu zmien funkčnej hodnoty proporcionálnu mieru zmeny funkcie uvedenú v nasledujúcej definícii.

Tempo rastu funkcie $f(x)$ v bode x_0

Definícia 2.26 Relatívna zmena

Nech funkcia $f(x)$ definovaná na intervale I nadobúda v každom jeho bode x_0 kladné hodnoty, t.j. $f(x_0) > 0$. Ak existuje derivácia $f'(x_0)$, tak číslo:

$$\rho_f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$$

nazývame **relatívnou zmenou** funkcie $f(x)$ v bode x_0 .

Proporcionálne miery zmeny sa často uvádzajú v percentách. Relatívna zmena funkcie vyjadrená v percentách sa nazýva **tempom rastu** funkcie $f(x)$. Ak je čas nezávislou premennou, tak hovoríme o percentuálnej zmene za danú časovú jednotku, napr. za rok. Percentuálna miera zmeny sa získa pomocou vzťahu: $\rho_f(x_0) \cdot 100\%$.

Elasticita funkcie $f(x)$ v bode x_0 **Definícia 2.27 Elasticita funkcie**

Ak má funkcia $f(x)$ v každom bode $x_0 \in (0, \infty)$ deriváciu $f'(x_0)$ a $f(x_0) > 0$, potom číslo:

$$Ef(x_0) = \frac{x_0}{f(x_0)} \cdot f'(x_0) = x_0 \cdot \rho_f(x_0)$$

nazývame **elasticitou** (pružnosťou) funkcie $f(x)$ v bode x_0 a označujeme ju $Ef(x_0)$.

Elasticita produkcie

Ak podnik vyrába x jednotiek produktu pri celkových nákladoch $f(x)$, tak pružnosť celkových nákladov je:

$$Ef(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx}.$$

Elasticita $Ef(x)$ nezávisí ani od jednotiek nákladov, ani od produkcie a je mierou úmernej rýchlosti rastu celkových nákladov pre úmerný rast produkcie vzhľadom na príslušnú hladinu. Elasticita $Ef(x)$ sa rovná pomeru hraničných nákladov k priemerným nákladom.

Definícia n -tej derivácie

Symbolom $f^{(n)}(x)$ označujeme **n -tú deriváciu** (resp. deriváciu n -tého rádu) funkcie $f^{(n-1)}(x)$ pre $n \geq 1$. Je určená rekurentným vzťahom, pomocou ktorého vyjadrujeme n -tú deriváciu pomocou derivácie rádu $(n-1)$:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))', \text{ pre } n \geq 1.$$

Niekedy sa používa označenie $f^{(0)}(x) = f(x)$ pre samotnú funkciu $f(x)$.

Príklad 2.44

Vypočítajte všetky derivácie funkcie $f(x) = x^4 - 3x^2$ až do 4. rádu v bode $x = 2$.

Riešenie:

Podľa vzorcov 2.14 derivácií najpoužívanějších funkcií, vypočítame nultú až štvrtú deriváciu a dosadíme $x = 2$:

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= x^4 - 3x^2, & f^{(0)}(2) &= 2^4 - 3 \cdot 2^2 = 4, \\ f^{(1)}(x) &= 4x^3 - 6x, & f^{(1)}(2) &= 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 = 20, \\ f^{(2)}(x) &= 12x^2 - 6, & f^{(2)}(2) &= 12 \cdot 2^2 - 6 = 42, \\ f^{(3)}(x) &= 24x, & f^{(3)}(2) &= 24 \cdot 2 = 48, \\ f^{(4)}(x) &= 24, & f^{(4)}(2) &= 24. \end{aligned}$$

2.11 Taylorov rozvoj funkcie $f(x)$ v okolí bodu x_0

Je daná funkcia $f(x)$, bod x_0 a prirodzené číslo n . Nech má funkcia $f(x)$ derivácie v okolí bodu x_0 až do rádu $n + 1$. Potom platí:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x) \quad (2.18)$$

pričom zvyšok $R_{n+1}(x)$ je vyjadrený vzťahom:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

kde u je isté číslo z otvoreného intervalu $\mathcal{I}$, ktorého krajnými bodmi sú x_0 a x (tzv. Lagrangeov tvar zvyšku $R_{n+1}(x)$).

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x).$$

Polynóm $T_n(x)$ nazývame **Taylorov polynóm** stupňa n .

Posledný člen $R_{n+1}(x)$ vo vzťahu 2.18 nazývame zvyšok po n -tom člene Taylorového polynómu. Je to chyba, ktorej sa dopustíme, ak funkciu $f(x)$ nahradíme v okolí bodu x_0 polynómom $T_n(x)$. Veľkosť chyby závisí od vzdialenosti x od x_0 . Presnosť je väčšia, čím je x bližšie k bodu x_0 a čím väčšie n zvolíme.

Taylorov rozvoj funkcie $f(x)$ v bode x_0 používame:

1. pre funkcie, ktorých hodnoty sa nedajú vypočítať základnými výpočtami,
2. pre numerický výpočet hodnôt týchto funkcií,
3. pre štúdium vlastností funkcie na základe vlastností polynómu ako základnej funkcie.

Príklad 2.45

Aproximujte funkciu $f : \langle -4, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \sqrt{x+4}$ Taylorovým polynómom $T_2(x)$ v okolí bodu $x_0 = 0$.

Riešenie:

Vypočítame 1. a 2. deriváciu funkcie $f(x)$ a ich hodnoty v okolí bodu $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= (x+4)^{\frac{1}{2}}, & f^{(0)}(0) &= \sqrt{0+4} = 2, \\ f^{(1)}(x) &= \frac{1}{2} \cdot (x+4)^{-\frac{1}{2}}, & f^{(1)}(0) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \\ f^{(2)}(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (x+4)^{-\frac{3}{2}}, & f^{(2)}(0) &= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2^3} = -\frac{1}{32}. \end{aligned}$$

Využijeme predošlé derivácie a dostaneme:

$$T_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2 = 2 + \frac{1}{4}(x-0) + \frac{-\frac{1}{32}}{2!}(x-0)^2 = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2.$$

Príklad 2.46 Úloha na samoštúdium

Aproximujte nasledujúce funkcie na ich definičných oboroch polynómom $T_n(x)$ v okolí bodu a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x), \quad a = \pi, \quad n = 3, & f(x) &= \frac{1}{x}, \quad a = 1, \quad n = 4, \\ f(x) &= \log(1+x), \quad a = 0, \quad n = 2, & f(x) &= e^{x^2}, \quad a = 1, \quad n = 3. \end{aligned}$$

2.12 Asymptoty grafu funkcie

Pri skúmaní priebehu grafu funkcie je dôležité zistiť, ako sa daný graf správa, ak sa jeho body vzdalujú do nekonečna, prípadne ako sa správa v bodoch, ktoré nie sú v definičnom obore danej funkcie. Často sa stáva, že sa pritom body grafu približujú k bodom akejsi priamky, ktorú voláme **asymptota**.

Asymptoty grafu funkcie bez smernice

Definícia 2.28 Asymptota bez smernice

Priamku s rovnicou $x = k$ nazveme **asymptotou bez smernice** grafu funkcie $f(x)$, ak má v bode k buď nevlastnú limitu alebo nevlastnú limitu zľava, alebo nevlastnú limitu sprava (t.j. platí aspoň jeden zo vzťahov):

$$\lim_{x \rightarrow k_+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow k_+} f(x) = -\infty,$$

alebo

$$\lim_{x \rightarrow k_-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow k_-} f(x) = \infty.$$

Asymptoty grafu funkcie so smernicou

Definícia 2.29 Asymptota so smernicou

Priamku s rovnicou $y = k \cdot x + q$ nazývame **asymptotou so smernicou** grafu funkcie $f(x)$, ak platí:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (k \cdot x + q)) = 0,$$

alebo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (k \cdot x + q)) = 0.$$

Výpočet asymptoty so smernicou grafu funkcie

Priamka $y = k \cdot x + q$ je **asymptota so smernicou** grafu funkcie $f(x)$ pre $x \rightarrow \infty$ práve vtedy, keď súčasne platí:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - k \cdot x).$$

Podobná veta platí aj pre $x \rightarrow -\infty$.

Príklad 2.47

Nájdite asymptotu bez smernice a so smernicou pre funkciu $f(x) = \frac{2x^2-5x-1}{2-x}$.

Riešenie:

Najskôr určíme definičný obor funkcie $f(x) = \frac{2x^2-5x-1}{2-x}$. Funkcia $f(x)$ nie je definovaná v reálnom čísle 2, keďže menovateľ sa rovná nule pre $x = 2$ (pozri obrázok 2.23). Ďalej overíme, či priamka $x = 2$ je asymptotou bez smernice.

Limita $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-5x-1}{2-x}$ je typu $\frac{-3}{0}$, vypočítame preto jednostranné limity $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2-5x-1}{2-x}$ a $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2-5x-1}{2-x}$, ktoré budú nevlastné.

V našom prípade je možné určiť znamienko limity podľa znamienka podielu čitateľa a menovateľa. Dosadíme hodnoty blízke číslu 2 zľava a sprava, napr. hodnoty 1.9 a 2.1.

Pre číslo 1.9 dostávame hodnotu limity:

$$\lim_{x \rightarrow 1.9} \frac{2x^2 - 5x - 1}{2 - x} = \frac{2 \cdot 1.9^2 - 5 \cdot 1.9 - 1}{2 - 1.9} = -32.8,$$

preto:

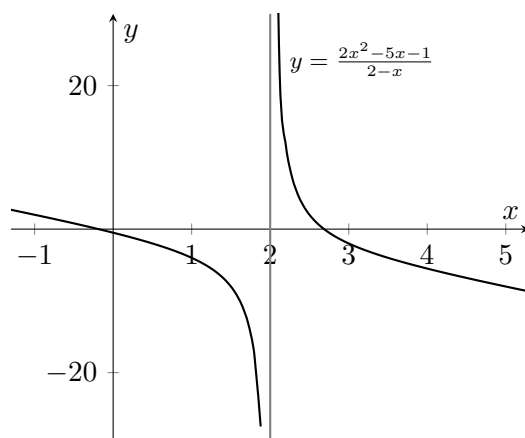
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 5x - 1}{2 - x} = -\infty.$$

Pre číslo 2.1 bude limita rovná:

$$\lim_{x \rightarrow 2.1} \frac{2x^2 - 5x - 1}{2 - x} = \frac{2 \cdot (2.1)^2 - 5 \cdot (2.1) - 1}{2 - 2.1} = 26.8,$$

preto:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 5x - 1}{2 - x} = \infty.$$



Obr. 2.23: Graf funkcie $f(x) = \frac{2x^2-5x-1}{2-x}$ s asymptotou bez smernice

Teraz určíme asymptotu grafu funkcie $\frac{2x^2-5x-1}{2-x}$ so smernicou $y = kx + q$.

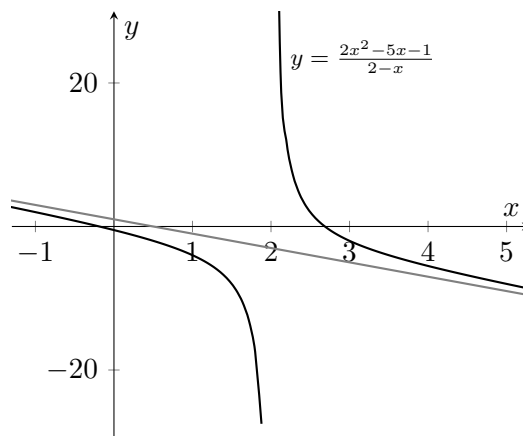
Najskôr vypočítame sklon smernice:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2-5x-1}{2-x}}{x} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x} - 1} = -2.$$

Ďalej určíme konštantný člen smernice:

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - k \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 5x - 1}{2 - x} - (-2x) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x - 1 + 4x - 2x^2}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x - 1}{2 - x} = 1. \end{aligned}$$

Asymptota so smernicou je priamka $y = -2x + 1$.



Obr. 2.24: Graf funkcie $f(x) = \frac{2x^2 - 5x - 1}{2 - x}$ s asymptotou so smernicou

Príklad 2.48 Úloha na samoštúdium

Pre zadané funkcie určte ich definičný obor a ak existujú, nájdite asymptoty so smernicou a bez smernice.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{(3+x)^2}, & f(x) &= \frac{6x - x^2 - 9}{x - 2}, & f(x) &= \frac{x + 4}{x^2 - 9}, & f(x) &= \frac{3x^2 - 2x - 1}{x + 3}, \\ f(x) &= \frac{x^2 - 1}{25x^2 - 4}, & f(x) &= \frac{x^3 - 1}{x^2 + 5x + 6}, & f(x) &= \frac{3x^2 - 2x - 1}{x + 3}, & f(x) &= \frac{x + 1}{x^2 + 2x - 3}. \end{aligned}$$

2.13 Derivácia funkcie a vlastnosti funkcií

V predchádzajúcich kapitolách sme objasnili čitateľovi vlastnosti funkcií (2.2), pojem spojitosť funkcie (2.5), limitu funkcie (2.6). Pomocou limity sme zadefinovali deriváciu funkcie (2.7). V tejto kapitole ukážeme ako pomocou derivácie určíme či je funkcia rastúca, alebo klesajúca, či je konvexná alebo konkávna a naučíme sa nájsť extrémny funkcií.

2.13.1 Využitie 1. derivácie pri určovaní vlastností funkcií

Rollova a Lagrangeova veta sú 2 základné vety diferenciálneho počtu a využívajú sa pri riešení praktických úloh. Ak vyšetřovaná funkcia spĺňa predpoklady či už Rollovej alebo Lagrangeovej vety, jej grafom je na intervale (a, b) plynulá krivka bez hrotov, ktorej krajné body ležia na osi x . Rollova veta hovorí o existencii extrému na intervale (a, b) a Lagrangeova veta o type monotónnosti grafu funkcie.

Veta 2.4 Rollova veta o strednej hodnote

Nech funkcia $f(x)$ spĺňa na intervale $\langle a, b \rangle$ predpoklady:

1. je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$,
2. na otvorenom intervale (a, b) je derivovateľná,
3. $f(a) = f(b)$.

Potom platí, že na intervale (a, b) existuje bod, v ktorom je derivácia funkcie nulová, t.j. $\exists c \in (a, b)$ taký, že $f'(c) = 0$.

Veta 2.5 Lagrangeova veta o prírastku funkcie

Nech funkcia $f(x)$ spĺňa na intervale $\langle a, b \rangle$ predpoklady:

1. je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$,
2. na otvorenom intervale (a, b) je derivovateľná.

Potom $\exists c \in (a, b)$ taký, že $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dôsledky Rollovej a Lagrangeovej vety:

- $\forall x \in (a, b)$ platí, že ak $f'(x) = 0$, potom je $f(x)$ **konštantná** na (a, b) ,
- $\forall x \in (a, b)$ platí, že ak $f'(x) > 0$, potom je $f(x)$ **rastúca** na (a, b) ,
- $\forall x \in (a, b)$ platí, že ak $f'(x) < 0$, potom je $f(x)$ **klesajúca** na (a, b) .

Metóda na určenie intervalov monotónnosti:

1. Nájdeme 1. deriváciu funkcie $f(x)$.
2. Určíme intervaly, na ktorom je funkcia $f(x)$ rastúca, t.j. $f'(x) > 0$, alebo klesajúca, t.j. $f'(x) < 0$.

Príklad 2.49

Určte intervaly monotónnosti funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = e^x(x^2 + 2x + 1)$.

Riešenie:

Najskôr zderivujeme funkciu $f(x)$:

$$f'(x) = e^x(x^2 + 2x + 1) + e^x(2x + 2) = e^x(x^2 + 4x + 3)$$

a nájdeme body funkcie $f(x)$, v ktorých je $f'(x) = 0$, t.j. vyriešime kvadratickú rovnicu:

$$x^2 + 4x + 3 = 0.$$

Pre túto kvadratickú rovnicu dostaneme 2 reálne korene:

$$x_1 = -2 + \sqrt{4-3} = -1 \quad \text{a} \quad x_2 = -2 - \sqrt{4-3} = -3.$$

Našli sme 2 rôzne stacionárne body, v ktorých je derivácia funkcie nulová. Budeme teda vyšetrovať funkciu na intervale $(-3, -1)$ a na jeho doplnku. Keďže $f'(0) = 3 > 0$, dostaneme, že:

1. $f'(x) > 0$ pre $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$,
2. $f'(x) < 0$ pre $x \in (-3, -1)$.

Funkcia $f(x)$ je rastúca na intervaloch $(-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$ a klesajúca na intervale $(-3, -1)$.

2.13.2 Využitie 2. derivácie pri určovaní vlastností funkcií

V predchádzajúcej podkapitole sme sa oboznámili s významom 1. derivácie pre určenie intervalov monotónnosti. Teraz uvedieme ako využiť 2. deriváciu pre určenie konvexnosti resp. konkávnosti funkcie.

Definícia 2.30 Konkávná funkcia

Funkcia $f(x)$ je **konkávná v bode** x_0 , ak existuje také okolie $O(x_0)$ bodu x_0 , že pre všetky body $x_0 + \Delta x \in O(x_0)$, kde $\Delta x \neq 0$ platí:

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0) + \Delta x f'(x_0).$$

Graf funkcie $f(x)$ leží pod dotyčnicou t zostrojenou v bode $X_0 = [x_0, f(x_0)]$.

Definícia 2.31 Konvexná funkcia

Funkcia $f(x)$ je **konvexná v bode** x_0 , ak existuje také okolie $O(x_0)$ bodu x_0 , že pre všetky body $x_0 + \Delta x \in O(x_0)$, kde $\Delta x \neq 0$ platí:

$$f(x_0 + \Delta x) > f(x_0) + \Delta x f'(x_0).$$

Graf funkcie $f(x)$ leží nad dotyčnicou t zostrojenou v bode $X_0 = [x_0, f(x_0)]$.

Určovanie konkávnosti (resp. konvexnosti)

Ak má funkcia $f(x)$ v každom bode x otvoreného intervalu (a, b) :

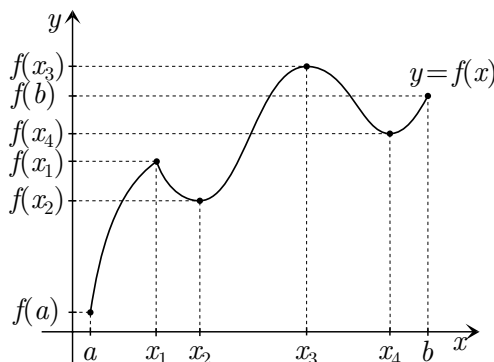
- **zápornú 2. deriváciu**, tak je funkcia $f(x)$ na tomto intervale **konkávná**,
- **kladnú 2. deriváciu**, tak je funkcia $f(x)$ na tomto intervale **konvexná**.

Príklad 2.50

Zistite, či je funkcia $f(x) = \ln x$ konvexná alebo konkávná.

Riešenie:

Vypočítame 1. a 2. deriváciu danej funkcie: $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Druhá derivácia je záporná pre všetky $x > 0$, t.j. pre celý definičný obor. Preto je funkcia $f(x) = \ln x$ konkávná na celom definičnom obore.



Obr. 2.25: Príklad funkcie s rôznymi druhmi extrémov

Príklad 2.51

Cenu určitého tovaru vyjadruje funkcia $f(x) : y = \frac{500}{x+30}, x > 0$, kde y je cena a x nech vyjadruje dopyt po tovare. Vyjadrite, ako sa menia tržby v závislosti od dopytu.

Riešenie:

Tržba $U(x)$ je daná súčinom ceny a dopytu: $U(x) = x \cdot y = \frac{500x}{x+30}$. Vypočítame $U'(x) = \frac{(x+30)500 - 500x}{(x+30)^2} = \frac{1500}{(x+30)^2} > 0$ a $U''(x) = \frac{30000}{(x+30)^3}$. Zistili sme, že $U'(x) > 0$ a $U''(x) < 0$, preto s rastom dopytu bude rásť tržba konvexne, t.j. s rastom dopytu bude mať tržba tendenciu stále narastať.

2.14 Extrémy funkcie jednej reálnej premennej

Definícia 2.32 Lokálne maximum a minimum funkcie

1. Funkcia $f(x)$ má v bode x_0 **lokálne maximum**, ak existuje také okolie $O(x_0)$ bodu x_0 , že pre každý bod $x_0 \in O(x_0)$, kde $\Delta x \neq 0$ platí:

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0).$$

2. Funkcia $f(x)$ má v bode x_0 **lokálne minimum**, ak existuje také okolie $O(x_0)$ bodu x_0 , že pre každý bod $x_0 \in O(x_0)$, kde $\Delta x \neq 0$ platí:

$$f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0).$$

Definícia 2.33 Ostré lokálne maximum a minimum funkcie

1. Funkcia $f(x)$ má v bode x_0 **ostré lokálne maximum**, ak existuje také okolie $O(x_0)$ bodu x_0 , že pre každý bod $x_0 \in O(x_0)$, kde $\Delta x \neq 0$ platí:

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0).$$

2. Funkcia $f(x)$ má v bode x_0 **ostré lokálne minimum**, ak existuje také okolie $O(x_0)$ bodu x_0 , že pre každý bod $x_0 \in O(x_0)$, kde $\Delta x \neq 0$ platí:

$$f(x_0 + \Delta x) > f(x_0).$$

Nutná a postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému

Ak má funkcia $f(x)$ v bode x_0 lokálny extrém a ak existuje v tomto bode derivácia $f'(x_0)$, tak platí:

$$f'(x_0) = 0.$$

Veta 2.6 Ostré lokálne extrémy funkcie

Nech $f'(x_0) = 0$ a nech v bode x_0 existuje 2. derivácia $f''(x_0) \neq 0$. Ak je funkcia $f''(x)$ v okolí bodu x_0 spojitá, potom má funkcia $f(x)$ v bode x_0 :

- ostré lokálne maximum, ak $f''(x_0) < 0$,
- ostré lokálne minimum, ak $f''(x_0) > 0$.

Metóda určovania ostrých lokálnych extrémov

Najskôr nájdeme 1. deriváciu funkcie $f(x)$ a položíme ju rovnú nule:

$$f'(x_0) = 0.$$

Korene tejto rovnice sa nazývajú **stacionárne body** funkcie $f(x)$. Ďalej nájdeme $f''(x)$. Ak bod x_0 je stacionárnym bodom tak:

- funkcia $f(x)$ má v bode x_0 ostré lokálne maximum, ak $f''(x_0) < 0$,
- funkcia $f(x)$ má v bode x_0 ostré lokálne minimum, ak $f''(x_0) > 0$.

Veľkosť ostrého lokálneho extrému je hodnota funkcie $f(x_0)$ v bode x_0 .

Poznámka:

Predošlá metóda sa nedá použiť ak v bode x_0 neexistuje 1. derivácia alebo je 1. aj 2. derivácia funkcie $f(x)$ v tomto bode nulová (t.j. $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) = 0$). Avšak aj v tomto prípade extrém funkcie $f(x)$ existovať môže!

Ak funkcia $f(x)$ **nemá v bode x_0 deriváciu**, tak má v bode x_0 :

- ostré lokálne maximum, ak platí: $f'_-(x_0) > 0 \wedge f'_+(x_0) < 0$,
- ostré lokálne minimum, ak platí: $f'_-(x_0) < 0 \wedge f'_+(x_0) > 0$.

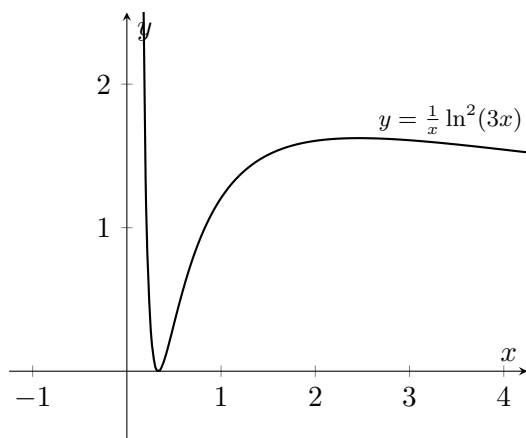
Príklad 2.52

Nájdite všetky lokálne extrémy funkcie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln^2(3x)$.

Riešenie:

Najskôr nájdeme všetky stacionárne body funkcie, pričom pri ich hľadaní využijeme 1. deriváciu funkcie $f(x)$. Vypočítajme teda $f'(x)$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln^2(3x) + \frac{1}{x} \cdot 2 \ln(3x) \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x^2} \cdot (2 - \ln(3x)) \ln(3x),$$


 Obr. 2.26: Lokálne extrémny funkcie $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln^2(3x)$

Stacionárny bod nájdeme tak, že vyriešime rovnicu $f'(x) = 0$. Pre 1. koreň použijeme rovnicu $\ln(3x) = 0$, a z nej dostaneme $3x = e^0 = 1$, preto $x_1 = \frac{1}{3}$. Pre 2. koreň použijeme rovnicu $2 - \ln(3x) = 0$, a z nej dostaneme $\ln(3x) = 2$, preto $x_2 = \frac{e^2}{3}$.

Určíme typ extrémov v stacionárnych bodoch pomocou 2. derivácie a následne zistíme typ extrém:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(-\frac{2}{x^3} \cdot \ln(3x) + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3 \right) (2 - \ln(3x)) - \frac{1}{x^2} \cdot \ln(3x) \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3 = \\ &= \left(-\frac{2}{x^3} \cdot \ln(3x) + \frac{1}{x^3} \right) (2 - \ln(3x)) - \frac{1}{x^3} \cdot \ln(3x) = \\ &= \frac{2}{x^3} (1 - 3 \ln(3x) + \ln^2(3x)). \end{aligned}$$

Dosadíme vyššie vypočítané stacionárne body do druhej derivácie danej funkcie a podľa znamienka určíme typ extrém:

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 54 > 0 \quad \text{a} \quad f''\left(\frac{e^2}{3}\right) = \frac{54}{e^6} \cdot (1 - 3 \cdot 2 + 2^2) = -\frac{54}{e^6} < 0.$$

Podľa predošlej vety 2.6 o ostrých lokálnych extrémoch má funkcia $f(x)$ v bode $x_1 = \frac{1}{3}$ lokálne minimum s hodnotou $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ a v bode $x_2 = \frac{e^2}{3}$ lokálne maximum s hodnotou $f\left(\frac{e^2}{3}\right) = \frac{12}{e^2}$.

Všeobecná postačujúca podmienka pre ostrý lokálny extrém

Veta 2.7 Postačujúca podmienka pre ostrý lokálny extrém

Nech má funkcia $f(x)$ v bode x_0 derivácie $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ a nech $f^{(n)}(x)$ je spojitá v okolí bodu x_0 . Potom ak:

1. n je **párne číslo**, tak funkcia $f(x)$ má v bode x_0 **ostré lokálne maximum**, ak $f^{(n)}(x_0) < 0$,
2. n je **párne číslo**, tak funkcia $f(x)$ má v bode x_0 **ostré lokálne minimum**, ak $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Absolútne extrémny funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$

Absolútne maximum a absolútne minimum funkcie $f(x)$, ktorá je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$ a má deriváciu na intervale (a, b) , určíme nasledovne:

1. Nájďme stacionárne body funkcie $f(x)$ v intervale $\langle a, b \rangle$. Ak ich je konečný počet, zistíme v ktorých z nich nastáva ostrý lokálny extrém. Označíme ich $x_1, x_2, \dots, x_k$.
2. Vypočítame hodnoty $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k), f(b)$. Najväčšie z týchto čísel je absolútne maximum M , najmenšie z nich je absolútne minimum m funkcie $f(x)$ v intervale $\langle a, b \rangle$.
3. Ak je funkcia $f(x)$ spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$ a nemá v niektorých bodoch intervalu (a, b) deriváciu, určíme hodnoty funkcie v týchto bodoch a vyberieme najmenšiu a najväčšiu hodnotu z týchto čísel a z čísel uvedených v bode 2.

Príklad 2.53

Majme monopol, ktorý vyrába určitý výrobok. Uvažujme nasledujúce funkcie:

1. Funkcia dopytu $p(x)$, ktorá vyjadruje vzťah medzi vyrobeným množstvom x daného výrobku a cenou p , za ktorú sa výrobok predáva, je daná vzťahom:

$$p(x) = -0.04x + 200.$$

Funkcia dopytu je striktne klesajúca funkcia a je definovaná pre $0 \leq x \leq 5000$. Možno ju interpretovať nasledovne:

- ak sa cena výrobku blíži k 200 jednotkám, počet zákazníkov ochotných kúpiť výrobok má tendenciu smerovať k nule,
- ak sa cena výrobku blíži k 0, predané množstvo výrobkov má tendenciu rásť k 5000 jednotkám.

2. Výnos $R(x)$ v závislosti na počte vyrobených výrobkov x je daný funkciou:

$$R(x) = p(x) \cdot x = (-0.04x + 200)x = -0.04x^2 + 200x.$$

3. Nákladová funkcia $N(x)$, popisujúca náklady firmy v závislosti od vyrobeného množstva výrobkov x , je daná vzťahom:

$$N(x) = 80x + 22400.$$

4. Výsledná funkcia zisku $P(x)$ je daná nasledovne:

$$P(x) = R(x) - N(x) = -0.04x^2 + 200x - (80x + 22400) = -0.04x^2 + 120x - 22400.$$

Určte koľko výrobkov má firma vyrobiť, aby maximalizovala zisk.

Riešenie:

Najskôr nájdeme stacionárne body x_P funkcie zisku $P(x)$ pomocou derivácie:

$$P'(x) = -0.08x + 120 = 0.$$

Riešením tejto lineárnej funkcie je jediný bod $x_P = 1500$. Ďalej určíme, aký typ extrému v tomto bode nastáva s využitím vety 2.6:

$$P''(x_P) = -0.08 < 0.$$

Firma teda dosiahne pre $x_P = 1500$ vyrobených výrobkov maximálny zisk vo výške $P(1500) = 67600$ peňažných jednotiek.

Body funkcie $P(x)$, pre ktoré platí $P(x) = 0$ (t. j. výnos $R(x)$ sa rovná nákladom $N(x)$) sa nazývajú **body zlomu**. V našom príklade položíme $P(x) = 0$ a dostaneme rovnicu $x^2 - 3000x + 560000 = 0$, ktorej riešením sú body zlomu $x_1 = 1500 - \sqrt{1690000} = 200$ a $x_2 = 1500 + \sqrt{1690000} = 2800$. To znamená, že ak firma bude vyrábať od 200 do 2800 výrobkov (t.j. ak $x \in (200, 2800)$), tak bude mať zisk.

Pomocou funkcie zisku $R(x)$ môžeme určiť maximálne výnosy, ktoré firma môže dosiahnuť, t.j. určíme stacionárny bod $R'(x) = -0,08x + 200 = 0$. Koreňom tejto rovnice je hodnota $x_R = 2500$. Ešte overíme typ extrém dosadením hodnoty x_R do derivácie funkcie výnosu: $R'(x_R) = -0,08 < 0$. Opäť využitím vety 2.6 dostávame, že firma dosiahne maximálny zisk, keď bude vyrábať 2500 výrobkov, pričom jej zisk vtedy bude $P(2500) = 27600$ peňažných jednotiek.

Príklad 2.54

Majme danú nákladovú funkciu $N : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ podniku vyrábajúceho x výrobkov:

$$N(x) = 0.1x^2 - 30x + 25000.$$

Určte priemerné minimálne náklady na jeden výrobok.

Riešenie:

Určíme funkciu priemerných nákladov N_a , ktorá meria náklady na vyrobenú jednotku:

$$N_a(x) = \frac{N(x)}{x} = 0.1x - 30 + \frac{25000}{x}.$$

Určíme lokálne minimá funkcie priemerných nákladov N_a , t.j. nájdeme stacionárne body funkcie pomocou derivácie funkcie $N_a(x)$:

$$N'_a(x) = 0.1 - \frac{25000}{x^2}.$$

Položíme ju rovnú 0 a dostaneme dve riešenia: $x_1 = 500$ a $x_2 = -500$.

Riešenie x_2 je mimo definičného oboru funkcie $N_a(x)$, preto vezmeme do úvahy len stacionárny bod $x_1 = 500$. Overíme typ extrém tak, že vyčíslime 2. deriváciu vo vypočítanom stacionárnom bode x_1 : $N''_a(x) = 2 \cdot \frac{25000}{x^3} \Rightarrow N''_a(500) = 2 \cdot \frac{25000}{500^3} = \frac{50000}{125000000} > 0$. Z predošlého výsledku môžeme usúdiť, že ak chce podnik minimalizovať priemerné náklady na vyrobenú jednotku, bude musieť vyrábať práve $x_1 = 500$ výrobkov. Minimálne náklady podniku budú vo výške $N_a(500) = 70$ peňažných jednotiek.

Príklad 2.55

Nájdite lokálne extrémy funkcie $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$ na jej definičnom obore a určte hodnotu funkcie v nich.

Riešenie:

Najskôr určíme definičný obor $D(f) = \mathbb{R}$. Potom vypočítame 1. deriváciu $f'(x) = 3 \cdot 2x^{3-1} - 2 \cdot 6x^{2-1} - 18 + 0 = 6x^2 - 12x - 18$ a určíme stacionárne body, t.j. položíme 1. deriváciu rovnú nule $f'(x) = 0$ a dostaneme $6x^2 - 12x - 18 = 6(x-3)(x+1) = 0$. Z kvadratickej rovnice vypočítame stacionárne body $x_1 = 3$ a $x_2 = -1$. Spočítame 2. deriváciu $f''(x) = 12x^{2-1} - 12 = 12x - 12$. Dosadíme jednotlivé stacionárne body do 2. derivácie a dostaneme: $f''(3) = 12 \cdot 3 - 12 = 24$ a $f''(-1) = 12 \cdot (-1) - 12 = -24$.

Funkcia má v bode $x_1 = 3$ lokálne minimum s hodnotou funkcie $f(3) = 2 \cdot 3^3 - 6 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 7 = -47$ a v bode $x_2 = -1$ má lokálne maximum s hodnotou $f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 - 18 \cdot (-1) + 7 = 17$.

Príklad 2.56 Úloha na samoštúdium

Nájdite, ak existujú, lokálne extrémny funkcií na ich definičnom obore a určte v nich hodnotu funkcie.

$$f(x) = \frac{x-3}{x-5}, \quad g(x) = \frac{4x-x^2-4}{x-1}, \quad h(x) = \frac{x^2+2}{x^2-1}, \quad r(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

2.15 Inflexné body funkcie jednej reálnej premennej

Definícia 2.34 Inflexný bod funkcie

Nech je funkcia $f(x)$ derivovateľná v bode x_0 . Ak existuje také okolie $O(x_0)$ bodu x_0 , že pre všetky body $x_0 + \Delta x \in O(x_0)$, kde $\Delta x \neq 0$ platí:

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0) + \Delta x f'(x_0), \text{ pre } \Delta x < 0,$$

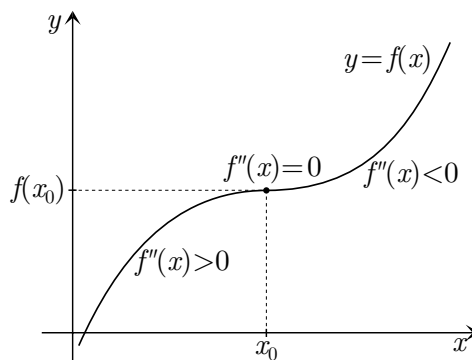
$$f(x_0 + \Delta x) > f(x_0) + \Delta x f'(x_0), \text{ pre } \Delta x > 0,$$

alebo platí:

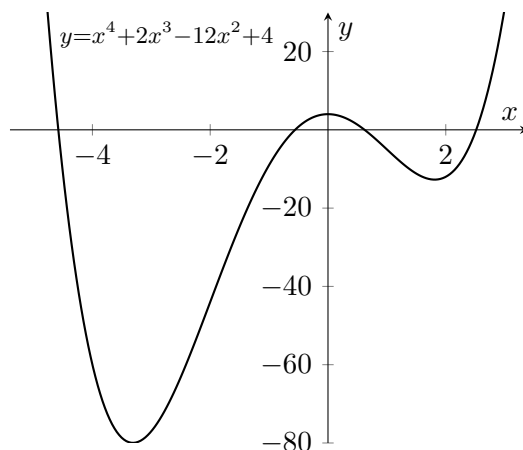
$$f(x_0 + \Delta x) > f(x_0) + \Delta x f'(x_0), \text{ pre } \Delta x < 0, \quad (2.19)$$

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0) + \Delta x f'(x_0), \text{ pre } \Delta x > 0, \quad (2.20)$$

tak bod x_0 nazývame **inflexným bodom** funkcie $f(x)$, resp. bod $X_0 = [x_0, f(x_0)]$ je inflexným bodom grafu funkcie $f(x)$.



Funkcia $f(x)$ má v bode x_0 inflexný bod práve vtedy, keď existuje také okolie $O(x_0)$ bodu x_0 , že funkcia $f(x)$ je v ľavom okolí bodu x_0 konkávna a súčasne je v pravom okolí bodu x_0 konvexná, alebo opačne.


 Obr. 2.27: Graf funkcie $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 4$

Všeobecné kritérium pre určenie inflexných bodov funkcie

Kritérium pre určenie inflexného bodu:

Ak je x_0 inflexným bodom funkcie $f(x)$ a ak má funkcia $f(x)$ v tomto bode 2. deriváciu, tak:

$$f''(x_0) = 0.$$

Poznámka:

Pozor, môže sa stať, že funkcia **nemá** v x_0 inflexný bod, aj keď $f''(x_0) = 0$.

Veta 2.8 Všeobecné kritérium pre určenie inflexných bodov

Nech má funkcia $f(x)$ v bode x_0 nulové derivácie $f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ a nech $f^{(n)}(x)$ je spojitá v okolí bodu x_0 a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Potom ak n je nepárne číslo, tak funkcia $f(x)$ má v bode x_0 inflexný bod.

Príklad 2.57

Nech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je daná nasledovne $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 4$. Určte jej inflexné body.

Riešenie:

Vypočítame 1. a 2. deriváciu: $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x$ a $f''(x) = 12x^2 + 12x - 24$. Vyriešime rovnicu $f''(x) = 0$, t.j. nájdeme korene kvadratickej rovnice:

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Možné inflexné body budeme hľadať v koreňoch kvadratickej rovnice $x_1 = 1$ a $x_2 = -2$. Vypočítame $f'''(x) = 24x + 12$, dosadíme $x_1 = 1$ a $x_2 = -2$ a dostaneme $f'''(1) = 36 \neq 0$ a $f'''(-2) = -36 \neq 0$. Preto oba body $x_1 = 1$ a $x_2 = -2$ sú inflexné body zadanej funkcie.

2.16 Primitívna funkcia a neurčitý integrál

Definícia 2.35 *Primitívna funkcia*

Nech sú funkcie $F(x)$ a $f(x)$ definované na otvorenom intervale $\mathcal{I}$, ktorý môže byť aj nekonečný. Funkcia $F(x)$ sa nazýva **primitívna funkcia** k funkcii $f(x)$ na intervale $\mathcal{I}$, ak:

$$\forall x \in \mathcal{I} : F'(x) = f(x).$$

Nech $F(x)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na intervale $\mathcal{I}$. Potom každá funkcia v tvare:

$$G(x) = F(x) + C,$$

kde C je ľubovoľná reálna konštanta je tiež primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na intervale $\mathcal{I}$.

Čiže ak k danej funkcii $f(x)$ na danom intervale $\mathcal{I}$ existuje jedna primitívna funkcia $F(x)$, potom ich existuje nekonečne veľa a všetky sa navzájom líšia iba o konštantu.

Definícia 2.36 *Neurčitý integrál*

Množinu všetkých primitívnych funkcií k danej funkcii $f(x)$ premennej x definovanej na intervale $\mathcal{I}$ nazveme **neurčitý integrál** funkcie $f(x)$ a označujeme ho:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad x \in \mathcal{I}.$$

Proces hľadania neurčitého integrálu sa nazýva **integrovanie** a konštantu C nazývame integračnou konštantou. Ak je funkcia $f(x)$ na danom intervale $\mathcal{I}$ spojitá, existuje k nej na tomto intervale neurčitý integrál.

Derivovanie a integrovanie sú v určitom zmysle obrátené procesy, pričom platí:

$$\begin{aligned} \left(\int f(x)dx \right)' &= (F(x) + C)' = f(x), \\ \int F'(x)dx &= \int f(x)dx = F(x) + C. \end{aligned}$$

Integrály najpoužívanějších funkcí

$$\begin{aligned}
 \int 0 dx &= C, \\
 \forall k, \forall x \in \mathbb{R} : \int k dx &= kx + C, \\
 \forall x \in \mathbb{R} : \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ ak } n \neq -1, \\
 \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 : \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + C, \\
 \forall x \in \mathbb{R} : \int e^x dx &= e^x + C, \\
 \forall a > 0, \forall x \in \mathbb{R} : \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ ak } a \neq 1. \\
 \forall x \in \mathbb{R} : \int \cos x dx &= \sin x + C, \\
 \forall x \in \mathbb{R} : \int \sin x dx &= -\cos x + C, \\
 \forall x \in \mathbb{R}, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} : \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C, \\
 \forall x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi : \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C, \\
 \forall x \in (-1, 1) : \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C, \\
 \forall x \in \mathbb{R} : \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x + C. \\
 \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0 : \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln |f(x)| + C, \\
 \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} : \int \frac{1}{a^2+x^2} dx &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \\
 \forall x \in (-a, a), a \in \mathbb{R} : \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx &= \arcsin \frac{x}{a} + C.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Aj keď vieme, že integrál k danej funkcii existuje, nie vždy ho vieme nájsť. Vtedy treba použiť numerické metódy pre výpočet integrálu.

Integrovanie lineárnej kombinácie funkcií

Veta 2.9 *Linearita integrálu*

Nech na intervale $\mathcal{I}$ existujú primitívne funkcie $F_1(x)$ a $F_2(x)$ k funkciám $f_1(x)$ a $f_2(x)$. Potom je funkcia $F(x) = k_1 F_1(x) + k_2 F_2(x)$ na intervale $\mathcal{I}$ primitívna funkcia k funkcii $f(x) = k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)$, kde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ a platí:

$$\int (k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)) dx = k_1 \int f_1(x) dx + k_2 \int f_2(x) dx.$$

Výpočet integrálov priamym integrovaním

Príklad 2.58

Pre $x \geq 0$ vypočítajte integrál:

$$\int (\sqrt{x} + 3^x + 2x - 4) dx.$$

Riešenie:

Ľubovoľnú integračnú konštantu C pripíšeme až na konci, po vypočítaní všetkých primitívnych funkcií, pričom budeme brať do úvahy, že súčet ľubovoľných konštánt je ľubovoľná konštanta. Použijeme vetu 2.9 o linearite integrálu a vyššie uvedené vzorce základných neurčitých integrálov:

$$\begin{aligned} \int (\sqrt{x} + 3^x + 2x - 4) dx &= \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int 3^x dx + \int 2x dx - \int 4 dx = \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{3^x}{\ln 3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 4x + C = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + \frac{3^x}{\ln 3} + x^2 - 4x + C. \end{aligned}$$

Príklad 2.59

Vypočítajte integrál:

$$\int \cot^2 x dx,$$

pre x na ľubovoľnom reálnom intervale, ktorý neobsahuje reálne čísla v tvare $k = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Riešenie:

Integrovanú funkciu najskôr vyjadríme pomocou podielu $\cos x$ a $\sin x$, potom použijeme vyššie uvedené vzorce a vetu o linearite:

$$\begin{aligned} \int \cot^2 x dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \\ &= \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int 1 dx = -\cot x - x + C, \text{ pričom } x \neq 0. \end{aligned}$$

Príklad 2.60

K funkcii $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^3}$ nájdite takú primitívnu funkciu $F(x)$, ktorá prechádza bodom $[1, -1]$.

Riešenie:

Najskôr určíme množinu všetkých primitívnych funkcií $f(x)$:

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-1)^2}{x^3} dx &= \int \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int x^{-2} dx - \int x^{-3} dx = \\ &= \ln |x| - 2 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-2}}{-2} + C, \text{ pričom } x \neq 0. \end{aligned}$$

Nájdeme takú primitívnu funkciu, ktorej graf prechádza bodom $[1, -1]$, t.j. takú ktorá vyhovuje podmienke $F(1) = -1$. Dosadíme $x = 1$ a dostaneme $F(1) = \ln 1 + 2 - \frac{1}{2} + C = \frac{3}{2} + C$, pričom má platiť $\frac{3}{2} + C = -1$. Odtiaľ dostaneme $C = -\frac{5}{2}$.

Hľadaná funkcia má tvar $F(x) = \ln |x| + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{5}{2}$, kde $x \neq 0$.

Z vety o derivácii súčinu funkcií vyplýva integrovanie metódou per partes.

Veta 2.10 *Integrovanie metódou per partes*

Nech $f(x)$ a $g(x)$ sú na intervale (a, b) sú spojité a majú spojitú 1. deriváciu. Potom na danom intervale platí:

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx \quad (2.22)$$

Príklad 2.61

Metódou per partes vypočítajte pre $x \in \mathbb{R}$ integrál:

$$\int x \cdot e^x dx.$$

Riešenie:

Položme $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$ a dostaneme $f'(x) = 1$, $g(x) = e^x$. Ďalej pokračujeme podľa predpisu 2.22:

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C.$$

Poznámka:

Funkcie $f(x)$ a $g(x)$ treba voliť tak, aby vznikol jednoduchý integrál, nie zložitejší. Niekedy je potrebné použiť metódu per partes aj viac krát.

Príklad 2.62

Metódou per partes vypočítajte pre $x \in \mathbb{R}$ integrál:

$$\int x^2 \sin x dx.$$

Riešenie:

Položme $f(x) = x^2$, $g'(x) = \sin x$ a vypočítame $f'(x) = 2x$, $g(x) = -\cos x$. Využijeme metódu per partes a dostaneme:

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx.$$

Pre výpočet $\int x \cos x dx$ opäť použijeme metódu per partes. Položme $f(x) = x$, $g'(x) = \cos x$ a dostaneme $f'(x) = 1$, $g(x) = \sin x$. Podľa (2.22) vypočítame:

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Nakoniec dosadíme do pôvodného vzťahu a máme výsledok:

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Integrovanie substitučnou metódou

Substitučná metóda vychádza z vety o derivácii zloženej funkcie.

Veta 2.11 Integrál zloženej funkcie

Nech $f(x)$ a $g(x)$ sú dané funkcie a nech funkcia $F(x)$ je primitívna k funkcii $f(x)$. Ďalej nech je funkcia $g'(x)$ spojitá na nejakom intervale $\mathcal{I}$, potom platí:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C, \quad x \in \mathcal{I}.$$

Funkciu $F(g(x))$ môžeme zapísať ako $\int f(y) dy$, kde za pomocnú premennú y po vypočítaní integrálu dosadíme funkciu $g(x)$. Dostaneme tak vzťah pre integrovanie substitučnou metódou:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(y) dy, \quad (2.23)$$

pričom v integráli na pravej strane treba dosadiť za y funkciu $g(x)$.

Príklad 2.63

Pre $x \in \mathbb{R}$ vypočítajte integrál:

$$\int (\sin^3 x \cdot \cos x) dx.$$

Riešenie:

Ide o súčin zloženej funkcie $\sin^3 x$, kde $\sin x$ je vnútorná funkcia a derivácia vnútornej funkcie je $\cos x$. Použijeme preto substitúciu $y = \sin x$. Odtiaľ vyplýva $dy = (\sin x)' dx$, t.j. $dy = \cos x dx$. Integrál prepíšeme do nového tvaru a po využití substitúcie dostaneme:

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int y^3 dy = \frac{y^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Príklad 2.64

Pre $x \in \mathbb{R}$ vypočítajte integrál:

$$\int e^{3x+5} dx.$$

Riešenie:

Použijeme substitúciu $y = 3x + 5$, zderivujeme túto rovnosť a dostaneme $dy = 3dx$. Keďže v zadanom integráli sa výraz $3dx$ nevyskytuje, treba integrál upraviť:

$$\int e^{3x+5} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x+5} 3dx = \frac{1}{3} \int e^y dy = \frac{1}{3} e^y + C = \frac{1}{3} e^{3x+5} + C.$$

Príklad 2.65

Pre $x \in \mathbb{R}$ vypočítajte integrál:

$$\int x \sqrt{x^2 + 3} dx.$$

Riešenie:

Použijeme substitúciu $y = x^2 + 3$, z čoho dostávame $dy = 2xdx$. Potom postupujeme podobne ako v predošlých príkladoch:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2+3}dx &= \frac{1}{2} \int 2x\sqrt{x^2+3}dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{y}dy = \frac{1}{2} \int y^{\frac{1}{2}}dy = \\ &= \frac{1}{2} \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} \sqrt{y^3} + C = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2+3)^3} + C.\end{aligned}$$

Príklad 2.66

Riešte nasledujúce integrály v obore reálnych čísel:

$$\begin{array}{lll}\int \frac{2}{3x^5}dx, & \int x\sqrt[3]{x}dx, & \int \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\sin^2 x}dx, \\ \int (5-2x)^9dx, & \int \sqrt[3]{4x+3}dx, & \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx, \\ \int \ln(x^2+1)dx, & \int \ln xdx, & \int e^x \cos xdx.\end{array}$$

Riešenie:

- $\int \frac{2}{3x^5}dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^5}dx = \frac{2}{3} \int x^{-5}dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{6x^4} + C.$
- $\int x\sqrt[3]{x}dx = \int x \cdot x^{\frac{1}{3}}dx = \int x^{1+\frac{1}{3}}dx = \int x^{\frac{4}{3}}dx = \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^7}}{7} + C.$
- $\int \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{\sin^2 x}dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{2} \cot x + C.$
- Použijeme substitúciu $5-2x=t$, zderivujeme obe strany a dostaneme $dx = \frac{dt}{-2}$. Vyjadríme integrál pre novú premennú t :

$$\int (5-2x)^9dx = \int t^9 \frac{dt}{-2} = -\frac{1}{2} \int t^9dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{10}}{10} + C = -\frac{t^{10}}{20} + C = -\frac{(5-2x)^{10}}{20} + C.$$

Riešenie ďalších integrálov nechávame na čteného čitateľa.

2.17 Určitý integrál

V mnohých praktických úlohách často potrebujeme určiť dĺžku krivky, obsah rovinných útvarov a objem či povrch telies. V iných praktických aplikáciach potrebujeme vypočítať ťažisko, statické momenty a momenty zotrvačnosti, diskontovanú hodnotu príjmov za určitý počet rokov, priemerný stav zásob v určitom časovom intervale či funkcie charakterizujúce rast ekonomiky v čase. Všetky tieto úlohy vedú k zavedeniu pojmu **určitý integrál**, pomocou ktorého ich vieme vypočítať.

Základné pojmy z teórie obsahov

Obsah obdĺžnika je rovný súčinu dĺžok jeho strán. Obsah útvaru, ktorý je zložený z niekoľkých vzájomne sa neprekrývajúcich útvarov, sa rovná súčtu obsahov týchto útvarov. Obsah ľubovoľného útvaru vieme približne určiť pomocou vpísaných a opísaných mnohoúhelníkov.

Meranie obsahu rovinných útvarov

Definícia 2.37 *Krivkový lichobežník*

Nech je daná spojitá nezáporná funkcia $f(x)$ definovaná na intervale $\langle a, b \rangle$. Potom rovinný útvar $\mathcal{U} = [f(x), a, b]$ ohraničený osou x , priamkami $x = a$, $x = b$ a grafom $y = f(x)$ funkcie $f(x)$ nad intervalom $\langle a, b \rangle$ nazývame **krivkový lichobežník**.

Každý rovinný útvar možno rozložiť na určitý počet krivkových lichobežníkov, a teda jeho obsah možno vyjadriť ako algebraický súčet obsahov krivkových lichobežníkov.

Definícia 2.38 *Delenie intervalu*

V intervale $\langle a, b \rangle$ zvolíme deliace body $x_0, x_1, \dots, x_n$ tak, aby platilo $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Množinu deliacich bodov $\mathcal{D} = x_0, x_1, \dots, x_n$ nazývame delením intervalu $\langle a, b \rangle$, pričom dĺžky jednotlivých čiastočných intervalov sú $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, pre $i = 1, 2, \dots, n$.

Označme m_i najmenšiu hodnotu funkcie $f(x)$ na intervale $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Podobne M_i je najväčšia hodnota funkcie $f(x)$ na intervale $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Urobme súčty:

$$s(\mathcal{D}) = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i,$$

$$S(\mathcal{D}) = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

Ďalej nech $s(\mathcal{D})$ je súčet obsahov obdĺžnikov vpísaných do útvaru $\mathcal{U}$ a $S(\mathcal{D})$ je súčet obsahov obdĺžnikov opísaných útvaru $\mathcal{U}$. Súčty $s(\mathcal{D})$, $S(\mathcal{D})$ nazývame **dolným**, resp. **horným integrálnym súčtom** funkcie $f(x)$ pre delenie $\mathcal{D}$.

Zavedieme nové delenie $\mathcal{D}'$ také, že obsahuje všetky deliace body delenia $\mathcal{D}$ a okrem nich aspoň jeden ďalší deliaci bod. Delenie $\mathcal{D}'$ nazývame zjemnením delenia $\mathcal{D}$. Pre každé delenie $\mathcal{D}$ platí $s(\mathcal{D}) \leq S(\mathcal{D})$. Ak delenie $\mathcal{D}'$ je zjemnením delenia $\mathcal{D}$, tak $s(\mathcal{D}) \leq s(\mathcal{D}')$, $S(\mathcal{D}') \leq S(\mathcal{D})$. Pre ľubovoľné delenia $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ platí $s(\mathcal{D}_1) \leq S(\mathcal{D}_2)$.

Postupnosti horných a dolných integrálnych súčtov

Nech $\{\mathcal{D}_n\}_{n=1}^{\infty}$ je taká postupnosť delení intervalu $\langle a, b \rangle$, ktorá zjemňuje vždy predchádzajúce delenie a zodpovedajú jej postupnosti $\{s(\mathcal{D}_n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{S(\mathcal{D}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ dolných a horných integrálnych súčtov (pozri obrázok 2.28).

Postupnosť $\{s(\mathcal{D}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca, zhora ohraničená a má limitu, ktorá sa rovná jej suprému (t.j. najmenšiemu hornému ohraničeniu):

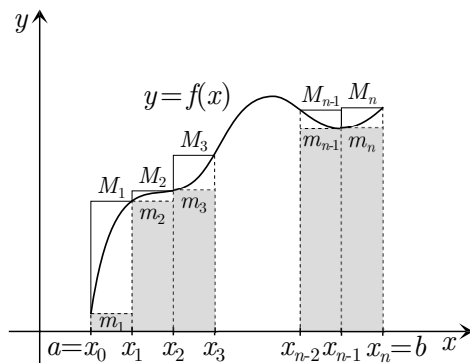
$$\sup \{s(\mathcal{D}_n)\} = \int_a^b f(x) dx,$$

čo predstavuje **dolný integrál** funkcie $f(x)$ od a po b .

Postupnosť $\{S(\mathcal{D}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca, zdola ohraničená a má limitu, ktorá sa rovná jej infimu (t.j. najväčšiemu dolnému ohraničeniu):

$$\inf \{S(\mathcal{D}_n)\} = \int_a^b f(x)dx,$$

čo je to **horný integrál** funkcie $f(x)$ od a po b .



Obr. 2.28: Dolné a horné integrálne súčty

Cauchyho-Riemannova definícia určitého integrálu

Definícia 2.39 Určitý integrál

Ak sa dolný integrál rovná hornému integrálu funkcie $f(x)$ od a do b :

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b f(x)dx} = \int_a^b f(x)dx,$$

tak toto číslo voláme **určitý integrál** funkcie $f(x)$ od a do b .

Ak má funkcia $f(x)$ určitý integrál od a do b , hovoríme o nej, že je **integrovateľná** na intervale $\langle a, b \rangle$.

Veta 2.12 Newtonova-Leibnizova veta

Nech je funkcia $f(x)$ integrovateľná a teda aj spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$. Nech $F(x)$ je ľubovoľná primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$. Potom:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Čísla a, b nazývame **integračné hranice**.

Určitý integrál

Newtonov určitý integrál je rozdiel hodnôt primitívnej funkcie v krajných bodoch príslušného intervalu. Je to teda **reálne číslo**, zatiaľ čo neurčitý integrál je množina nekonečne veľa primitívnych funkcií k danej funkcii.

Pre rozdiel $F(b) - F(a)$ je zaužívané označenie $[F(x)]_a^b$. Zapisujeme to ako $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$. Pri výpočte určitého integrálu používame primitívnu funkciu bez integračnej konštanty. Výsledok to neovplyvní.

Vlastnosti a výpočet určitého integrálu funkcie

1. Nech je funkcia $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$. Potom existuje určitý integrál:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \quad (2.24)$$

2. Ak sa horná hranica rovná dolnej hranici, tak integrál vymedzuje nulovú plochu:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3. Ak v určitom integráli zameníme hranice integrovania, tak integrál zmení znamienko:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

4. Ak je funkcia $f(x)$ nezáporná na intervale $\langle a, b \rangle$, tak aj určitý integrál funkcie $f(x)$ je nezáporný:

$$\forall x \in \langle a, b \rangle : \left[f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0 \right].$$

5. Nech funkcie $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojité na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle \subseteq D_f \cap D_g$. Potom integrovanie lineárnej kombinácie funkcií je lineárna kombinácia integrálov:

$$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} : \int_a^b (k_1 f(x) + k_2 g(x)) dx = k_1 \int_a^b f(x)dx + k_2 \int_a^b g(x)dx.$$

6. Aditivita určitého integrálu predstavuje možnosť rozdeliť jeden určitý integrál na súčet dvoch. Nech $a \leq c \leq b$, potom:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7. Pre absolútnu hodnotu určitého integrálu platí:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Definícia 2.40 Integrál hornej hranice

Nech $x \in \langle a, b \rangle$. Potom je funkcia $f(x)$ spojitá aj na intervale $\langle a, x \rangle$ a teda existuje určitý integrál od a do x :

$$\int_a^x f(t)dt.$$

Tu sme formálne preznačili premennú x na t vo funkcii $f(x)$, pretože premenná x je hornou hranicou integrálu. Tento integrál je funkcia $F(x)$ premennej x a nazývame ju **integrál ako funkcia hornej hranice**. Geometricky vyjadruje obsah krivkového lichobežníka $\mathcal{T} = [f(x), a, x]$.

Vlastnosť monotónnosti určitého integrálu

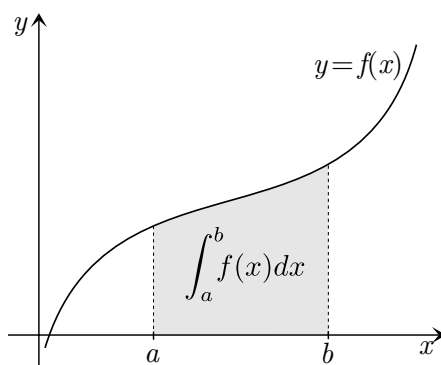
Veta 2.13 Monotónnosť určitého integrálu

Nech sú funkcie $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ spojité na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle \subseteq D_f \cap D_g$, pričom platí $f(x) \leq g(x)$ pre $x \in \langle a, b \rangle$. Potom platí vlastnosť monotónnosti:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Dôsledok vety o monotónnosti určitého integrálu

Keď sme zaviedli určitý integrál uvažovali sme prípad, keď funkcia $f(x)$ nenadobúdala záporné hodnoty na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle \subseteq D_f$. Určitý integrál je plocha útvaru, ktorý je ohraničený funkciou $f(x)$, osou x a pásom vymedzeným priamkami $x = a$ a $x = b$ (pozri obrázok 2.29).



Obr. 2.29: Výpočet obsahu plochy pomocou určitého integrálu

V prípade, keď je funkcia $f(x)$ záporná na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$, z vety o monotónnosti vyplýva, že určitý integrál nadobudne zápornú hodnotu. V tomto prípade určitý integrál udáva plochu ohraničenú funkciou $f(x)$, osou x a pásom vymedzeným priamkami medzi $x = a$ a $x = b$ so záporným znamienkom. V dôsledku toho, ak má funkcia $f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$ nulové body, v ktorých funkcia $f(x)$ pretína os x , musíme interval $\langle a, b \rangle$ rozdeliť na podintervaly podľa nulových bodov, aby sme dostali oblasť ohraničenú funkciou $f(x)$, osou x a pásom vymedzeným priamkami $x = a$ a $x = b$.

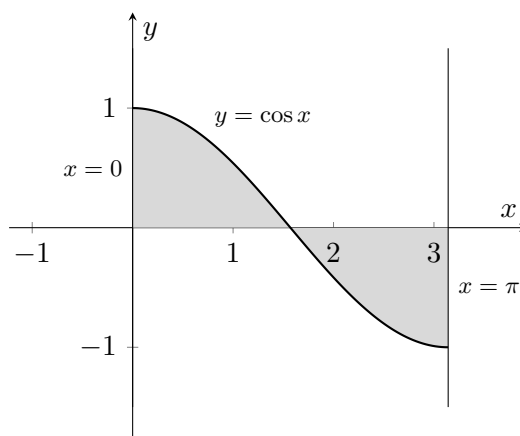
Príklad 2.67

Vypočítajte plochu oblasti určenú funkciou $f(x) = \cos x$, osou x a pásom určeným priamkami $a = 0$ a $b = \pi$.

Riešenie:

Funkcia $f(x)$ nadobúda na intervale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ nezáporné hodnoty a na intervale $\langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$ nadobúda nekladné hodnoty. Využijeme vlastnosť monotónnosti a aditivitu integrálu:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = (1 - 0) - (0 - 1) = 2.$$

Obr. 2.30: Určitý integrál funkcie $y = \cos x$

Uvedomme si, že ak by sme nezobrali do úvahy vlastnosť monotónnosti pri výpočte určitého integrálu, dostali by sme plochu rovnú 0, pretože plocha pod kosínusovou funkciou a osou x v prvom podintervale sa rovná ploche medzi osou x a funkciou kosínus v druhom podintervale.

Pravidlá pre počítanie určitých integrálov

Pri počítaní určitých integrálov platia podobné zákonitosti ako pri neurčitých integráloch. Ak sú funkcie $f(x)$ a $g(x)$ spojité na intervale $\langle a, b \rangle$ a k je ľubovoľná reálna konštanta, tak:

$$\int_b^a k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_b^a f(x) dx,$$

a

$$\int_b^a (f(x) \pm g(x)) dx = \int_b^a f(x) dx \pm \int_b^a g(x) dx.$$

Príklad 2.68

Pre $x \in \langle -2, 1 \rangle$ vypočítajte určitý integrál:

$$\int_{-2}^1 x^2 dx.$$

Riešenie:

$$\int_{-2}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1 = \frac{1}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3.$$

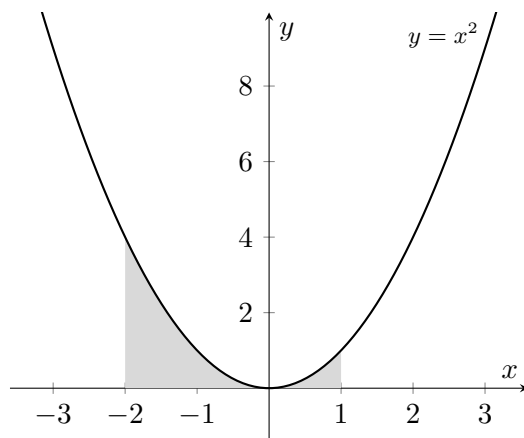
Príklad 2.69

Majme danú funkciu $f(x)$ definovanú po častiach:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \langle 0, 3 \rangle \\ 2x + 3 & x \in \langle 3, 8 \rangle. \end{cases}$$

Vypočítajte určitý integrál:

$$\int_0^8 f(x) dx.$$


 Obr. 2.31: Určitý integrál funkcie $y = x^2$
Riešenie:

Overíme spojitosť funkcie v bode $x = 3$: $f(3) = 3^2 = 9$ a $f(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9$.

Využijeme aditivitu integrálu:

$$\begin{aligned} \int_0^8 f(x) dx &= \int_0^3 x^2 dx + \int_3^8 (2x + 3) dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 + [x^2 + 3x]_3^8 = \\ &= 9 + 88 - 18 = 79. \end{aligned}$$

Substitučná metóda pri výpočte určitého integrálu

Substitučnú metódu môžeme použiť dvojako:

1. najskôr nájdeme primitívnu funkciu použitím substitučnej metódy pre neurčitý integrál a potom použijeme na výpočet určitého integrálu Newtonov-Leibnizov vzorec 2.24,
2. priamo použijeme substitúciu pri výpočte určitého integrálu, avšak okrem substitúcie za premennú musíme určiť nové hranice integrálu na základe substitúcie.

Príklad 2.70

Pre $x \in \langle 0, 1 \rangle$ vypočítajte určitý integrál:

$$\int_0^1 \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Riešenie:

Podľa predchádzajúcich úvah o využití substitučnej metódy, vypočítame určitý integrál oboma spôsobmi.

1. Použijeme substitúciu $x^2 + 1 = t$ a po zderivovaní oboch strán dostaneme $2x dx = dt$. Ďalej vypočítame neurčitý integrál:

$$\int \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} dx = 2 \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{2}{t} + C = -\frac{2}{x^2 + 1} + C.$$

Nakoniec dosadíme hranice určitého integrálu a využijeme Newtonovu-Leibnizovu vetu 2.12:

$$\left[-2 \cdot \frac{1}{x^2 + 1}\right]_0^1 = -2 \left(\frac{1}{2} - 1\right) = 1.$$

2. Určitý integrál vyriešime priamo pomocou substitúcie $x^2 + 1 = t$, preto $2x \, dx = dt$. Pre dolnú hranicu $x = 0$ dostaneme po substitúcii $t = 1$ a pre hornú hranicu $x = 1$ máme $t = 2$. Prepíšeme na nové hranice a dopočítame pomocou Newton-Leibnizovej vety 2.12:

$$\int_0^1 \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \, dx = \int_1^2 \frac{2dt}{t^2} = 2 \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = 2 \left(-\frac{1}{2} + 1\right) = 1.$$

Príklad 2.71

Pre $x \in \langle 1, e \rangle$ vypočítajte určitý integrál:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx.$$

Riešenie:

Funkcia $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ je spojitá na uzavretom intervale $\langle 1, e \rangle$ a preto k nej na tomto intervale existuje neurčitý integrál. Vypočítame ho pomocou substitúcie $y = \ln x$, preto $dy = \frac{1}{x} dx$:

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int y \cdot dy = \frac{y^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

Teraz podľa Newton-Leibnizovej vety 2.12 o určitom integráli dostaneme:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx = \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e = \frac{\ln^2 e}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Príklad 2.72

Hraničné náklady firmy vyrábajúcej jeden výrobok sú dané funkciou:

$$N'(x) = 6 - \frac{60}{x+1}, \quad 0 \leq x \leq 1000,$$

kde x je množstvo vyrobených výrobkov. Ak sa vyrobené množstvo zmení z 300 na 400, určte k akej zmene nákladov v peňažných jednotkách dôjde.

Riešenie:

$$\begin{aligned} N(400) - N(300) &= \int_{300}^{400} N'(x) \, dx = \int_{300}^{400} \left(6 - \frac{60}{x+1}\right) \, dx = [(6x - 60 \ln |x+1|)]_{300}^{400} = \\ &\approx (2400 - 359.64) - (1800 - 342.43) = 582.79 \text{ p.j.} \end{aligned}$$

Pri zvýšení výroby z 300 kusov na 400 kusov sa náklady firmy zvýšia približne o 582.79 p.j.

Príklad 2.73

Nech $N'(x) = \frac{a}{\sqrt{ax+b}}$, kde $a > 0$, $b > 0$, sú hraničné náklady pri výrobe x výrobkov a nech náklady nulovej produkcie sú nulové. Určte celkové náklady pri výrobe 50 výrobkov.

Riešenie:

Treba vypočítať $N(x) = \int_0^x \frac{a}{\sqrt{at+b}} dt$. Použijeme substitúciu pre premennú t : $y = at + b$ a po zderivovaní oboch strán dostaneme $dy = a dt$. Ďalej vypočítame hranice pre novú premennú y . Pre $t = 0$ dostaneme $y = b$ a pre $t = x$ zasa $y = ax + b$. Použitím substitúcie dostaneme:

$$N(x) = \int_0^x \frac{a}{\sqrt{at+b}} dt = \int_b^{ax+b} \frac{a}{\sqrt{y}} \frac{dy}{a} = [2\sqrt{y}]_b^{ax+b} = 2\sqrt{ax+b} - 2\sqrt{b}.$$

Celkové náklady pri výrobe 50 výrobkov teda sú $N(50) = 2\sqrt{50a+b} - 2\sqrt{b}$.

Metóda per partes pre výpočet určitého integrálu

Výpočet robíme analogicky ako pri neurčitom integráli 2.22:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx. \quad (2.25)$$

Príklad 2.74

Pre $x \in \langle 1, 2 \rangle$ vypočítajte určitý integrál:

$$\int_1^2 (x-1)e^x dx.$$

Riešenie:

Na výpočet integrálu $\int_1^2 (x-1)e^x dx$ použijeme metódu per partes (2.25):

$$\begin{aligned} f(x) &= x-1, & f'(x) &= 1, \\ g'(x) &= e^x, & g(x) &= e^x, \end{aligned}$$

a dostaneme:

$$\int_1^2 (x-1) \cdot e^x dx = [(x-1) \cdot e^x]_1^2 - \int_1^2 1 \cdot e^x dx = e^2 - [e^x]_1^2 = e.$$

Príklad 2.75

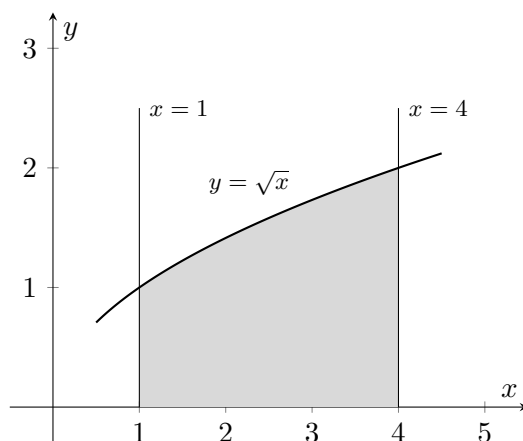
Vypočítajte obsah plochy ohraňenej grafom funkcie $f(x) = \sqrt{x}$, osou x a priamkami $x = 1$ a $x = 4$.

Riešenie:

Funkcia $f(x)$ je spojitá a nezáporná na intervale $\langle 1, 4 \rangle$, preto môžeme obsah plochy vypočítať ako:

$$\int_1^4 \sqrt{x} dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right]_1^4 = \frac{2}{3} \cdot 8 - \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{14}{3}.$$

Hľadaný obsah plochy je $\frac{14}{3}$.

Obr. 2.32: Určitý integrál funkcie $y = \sqrt{x}$

Výpočet obsahov rovinných útvarov

Zaoberajme sa teraz otázkou, ako vypočítať obsah plochy P v prípade, že spojitá funkcia $f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$ nadobúda aj záporné hodnoty.

Nech je funkcia $f(x)$ na celom uvažovanom intervale nekladná, potom výsledný integrál bude záporný, zatiaľ čo plocha je vždy kladné číslo alebo nula.

Uvažujme pomocnú funkciu $y = -f(x)$, ktorá je na danom intervale $\langle a, b \rangle$ nezáporná a spočítajme obsah plochy P' , ktorý na intervale $\langle a, b \rangle$ vymedzuje nová pomocná funkcia $-f(x)$:

$$P' = \int_a^b -f(x)dx.$$

Je zrejmé, že obsahy plôch P a P' sa rovnajú, čiže platí:

$$P = P' = \int_a^b -f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx.$$

Inými slovami, ak máme spočítať plochu pod osou x je treba brať príslušný integrál so záporným znamienkom.

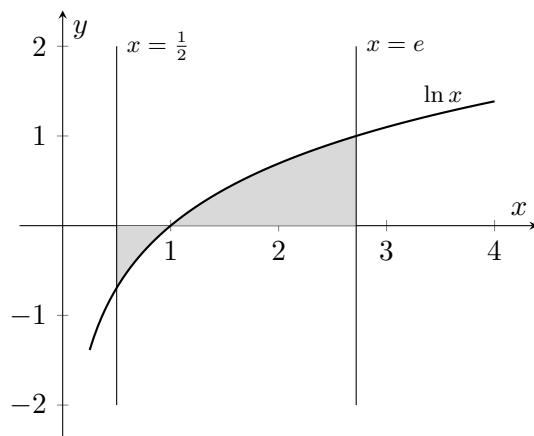
Vo všeobecnosti môžeme povedať, že ak graf funkcie $y = f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$ pretína os x , tak musíme nájsť x -ové súradnice týchto priesečníkov a výpočet integrálu rozdelíme na jednotlivé intervaly, v ktorých sa nemení znamienko (pozri dôsledok vety o monotónnosti určitého integrálu 2.17).

Príklad 2.76

Vypočítajte obsah plochy ohraničenej grafom funkcie $f(x) = \ln x$, osou x a priamkami $x = \frac{1}{2}$ a $x = e$.

Riešenie:

Funkcia je na intervale $\langle \frac{1}{2}, e \rangle$ spojitá, pričom na intervale $\langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$ je nekladná a na intervale $\langle 1, e \rangle$


 Obr. 2.33: Určitý integrál funkcie $f(x) = \ln x$

nezáporná. Preto výsledný obsah plochy P vypočítame ako súčet obsahov P_1 a P_2 nasledovne:

$$P = P_1 + P_2 = - \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx.$$

Vypočítame neurčitý integrál $\int \ln x dx$ nasledovne:

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \cdot \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C,$$

pričom sme položili: $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ a $g'(x) = 1$, $g(x) = x$.

Platí teda:

$$\begin{aligned} P &= -[x \ln x - x]_{\frac{1}{2}}^1 + [x \ln x - x]_1^e = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \ln 1 + 1 + e \ln e - e - \ln 1 + 1 = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \ln(2^{-1}) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(3 - \ln 2). \end{aligned}$$

Obsah plochy je $\frac{1}{2}(3 - \ln 2)$.

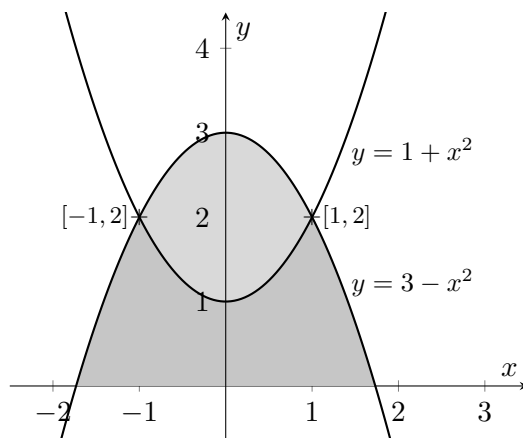
Výpočet obsahu plochy ohraničenej grafom dvoch funkcií $f(x)$ a $g(x)$

Príklad 2.77

Vypočítajte obsah plochy medzi grafmi funkcií $f(x) = 3 - x^2$ a $g(x) = 1 + x^2$.

Riešenie:

Obsah P plochy vymedzenej grafmi funkcií $f(x)$ a $g(x)$ vypočítame ako rozdiel obsahov plôch $P_1 - P_2$, kde P_1 je obsah plochy vymedzenej grafom funkcie $y = f(x)$ a osou x na intervale $\langle a, b \rangle$ a P_2 je obsah plochy vymedzenej grafom funkcie $y = g(x)$ a osou x na intervale $\langle a, b \rangle$. Interval $\langle a, b \rangle$ je daný x -ovými súradnicami priesečníkov oboch funkcií. Nájdeme ho riešením rovnice $3 - x^2 = 1 + x^2$.



Obr. 2.34: Obsah plochy medzi grafmi funkcií $f(x) = 3 - x^2$ a $g(x) = 1 + x^2$

Odtiaľ $x = \pm 1$, čiže $a = -1$ a $b = 1$. Potom pre obsah plochy P platí:

$$\begin{aligned} P &= \int_{-1}^1 (3 - x^2 - (1 + x^2)) \, dx = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) \, dx = \\ &= \left[2x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^1 = 2 - \frac{2}{3} - (-2 + \frac{2}{3}) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Hľadaný obsah plochy je $\frac{8}{3}$.

Bibliografia

- ANTHONY, Martin; BIGGS, Norman, 2010. *Mathematics 1*. University of London.
- BATÍKOVÁ, Barbora et al., 2009. *Učebnice matematiky pro ekonomické fakulty*. Oeconomica.
- BAUER, Luboš et al., 2015. *Matematika v ekonomii a ekonomice*. Grada Publishing, Praha.
- BENKO, Eduard et al., 1984. *Matematika pre ekonómov 2*. Alfa Bratislava, SNTL Praha.
- BERGIN, James, 2015. *Mathematics for Economist with Applications*. Routledge.
- BLUME, Lawrence; SIMON, Carl P., 1994. *Mathematics for economists*. W. W. Norton & Company Ltd.
- BRADLEY, Teresa; PATTON, Paul, 2002. *Essential Mathematics for Economics and Business*. John Wiley & Sons Ltd.
- HARSHBARGER, Ronald J.; REYNOLDS, James J., 2019. *Mathematical Applications for the Management, Life, and Social Sciences*. Cengage.
- HEATHER, Ken; STEFANOVA, Simka, 2017. *Maths for Economics: A Companion to Mankiw and Taylor Economics*. Cengage Learning.
- HUŤKA, Vladimír et al., 1984. *Matematika pre ekonómov 1*. Alfa Bratislava, SNTL Praha.
- CHIANG, Alpha C., 1984. *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. McGraw-Hill Book.
- KAŇKA, Miloš, 2010. *Matematické praktikum: Sběrka řešených příkladů z matematiky pro studenty vysokých škol*. Ekopress, Praha.
- KLEIN, Michael, 2014. *Mathematical Methods for Economics*. Pearson.
- LOVELOCK, David et al., 2007. *An Introduction to the Mathematics of Money: Saving and Investing*. Springer.
- ORSZÁGHOVÁ, Dana; HORNYÁK GREGÁŇOVÁ, Radomíra, 2020. *Hodnotenie matematických kompetencií v období revolúcie zručností*. SPU v Nitre.
- REKTORYS, Karel, 2009. *Přehled užití matematiky I*. Prometheus.
- RENSHAW, Geoff, 2021. *Maths for Economics*. Oxford University Press.
- ROSEN, Kenneth H., 2019. *Discrete Mathematics and Its Applications Seventh Edition 8th Edition*. McGraw-Hill Education.
- RUUD, Warren; SHELL, Terry, 2003. *Prelude to Calculus*. Wadsworth Publishing Co.
- STEWART, James, 2007. *Essential Calculus: Early Transcendentals*. Cengage Learning.
- STRANG, Gilbert, 2005. *Linear Algebra and Its Applications*. Cengage Learning.

SYDSAETER, Knut et al., 2012. *Essential Mathematics for Economic Analysis*. Pearson.

UMMER, E.K., 2012. *Basic Mathematics for Economics, Business, and Finance*. Routledge.

WERNER, Frank; SOTSKOV, Yuri N., 2006. *Mathematics of Economics and Business*. Routledge.

