

Od rovnomerného vzorkovania k Importance Samplingu v rovnici odrazu

Pri riešení rovnice odrazu v počítačovej grafike sa snažíme odhadnúť odrazenú radianciu L_o pomocou integrálu cez hemisféru smerov Ω :

$$L_o(\mathbf{x}, \omega_o) = \int_{\Omega} L_i(\mathbf{x}, \omega_i) f_r(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i = I.$$

V metóde Monte Carlo odhadujeme tento integrál pomocou sumy:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{L_i(\mathbf{x}, \omega_j) f_r(\mathbf{x}, \omega_j, \omega_o) \cos \theta_j}{p(\omega_j)}$$

Ak zvolíme **rovnomerné vzorkovanie** ($p(\omega) = \text{konštanta}$), každému smeru dávame rovnakú váhu. Avšak vieme, že príspevok integrandu je výrazne ovplyvnený kosínusovým útlom ($\cos \theta_i$) a vlastnosťami povrchu, t.j. dvojsmernou distribučnou funkciou odrazu $f_r(\mathbf{x}, \omega_j, \omega_o)$. **Importance sampling** nám umožňuje vyberať vzorky častejšie z oblastí, kde je hodnota integrandu vysoká, čím dramaticky znižujeme šum (rozptyl) pri rovnakom počte lúčov.

1 Rovnomerné vzorkovanie na hemisfére

Majme danú jednotkovú sféru ($r = 1$), vyjadrenú pomocou uhlov θ a φ :

$$x = \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = \cos \theta$$

a konštantnú (rovnomernú) funkciu hustoty $p(\omega) = C$.

1.1 Krok 1: Určenie normalizačnej konštanty

Hustota pravdepodobnosti $p(\omega) = C$ musí byť normalizovaná, teda jej integrál cez celú hemisféru musí byť rovný 1:

$$\int_{\Omega} p(\omega) d\omega = 1 \Rightarrow \int_{\Omega} C d\omega = 1.$$

Vypočítame integrál pre hemisféru:

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} [-\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \int_0^{2\pi} (1) d\varphi = 2\pi.$$

Z toho vyplýva:

$$C = \frac{1}{2\pi}.$$

Pre našu funkciu hustoty potom dostaneme:

$$p(\omega) = \frac{1}{2\pi}.$$

1.2 Krok 2: Transformácia funkcie hustoty smeru na funkciu hustoty uhlov a výpočet CDF

Našu funkciu hustoty $p(\omega)$ transformujeme na hustotu $p(\theta, \varphi)$ pomocou Jacobiánu:

$$p(\theta, \varphi) = p(\omega) |J| = p(\omega) \sin \theta = \frac{\sin \theta}{2\pi}.$$

Následne určíme marginálnu hustotu pre θ a podmienenú hustotu pre φ :

Marginálnu hustotu pre zvolený uhol θ vyjadríme pomocou nasledujúceho výpočtu:

$$p(\theta) = \int_0^{2\pi} p(\theta, \varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{2\pi} d\varphi = \sin \theta.$$

Podmienenu hustotu pre druhý uhol φ určíme zasa takto:

$$p(\varphi | \theta) = \frac{p(\theta, \varphi)}{p(\theta)} = \frac{\frac{\sin \theta}{2\pi}}{\sin \theta} = \frac{1}{2\pi}.$$

Z týchto dvoch funkcií teraz odvodíme **kumulatívne distribučné funkcie (CDF)**:

Kumulatívna distribučná funkcia $P(\theta)$ pre funkciu hustoty $p(\theta)$ je:

$$P(\theta) = \int_0^\theta p(t) dt = \int_0^\theta \sin t dt = [-\cos t]_0^\theta = 1 - \cos \theta.$$

Podobne, kumulatívna distribučná funkcia $P(\varphi | \theta)$ pre funkciu hustoty $p(\varphi | \theta)$:

$$P(\varphi | \theta) = \int_0^\varphi p(t | \theta) dt = \int_0^\varphi \frac{1}{2\pi} dt = \frac{\varphi}{2\pi}.$$

1.3 Krok 3: Inverzná transformácia a prechod ku karteziánskym súradniciam

Položíme CDF rovné náhodným číslam ξ_1, ξ_2 , t.j. $P(\theta) = \xi_1$ a $P(\varphi | \theta) = \xi_2$, kde $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{U}(0, 1)$ a vyjadríme uhly θ a φ :

$$1. P(\theta) = 1 - \cos \theta = \xi_1 \Rightarrow \cos \theta = 1 - \xi_1 \Rightarrow \theta = \arccos(1 - \xi_1)$$

$$2. P(\varphi | \theta) = \frac{\varphi}{2\pi} = \xi_2 \Rightarrow \varphi = 2\pi\xi_2$$

Dosadením do parametrického vyjadrenia sféry a použitím identity $\sin(\arccos a) = \sqrt{1 - a^2}$ dostaneme karteziánske súradnice náhodného smeru ω :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{1 - (1 - \xi_1)^2} \cos(2\pi\xi_2) = \sqrt{1 - \xi_1^2} \cos(2\pi\xi_2) \\ y &= \sqrt{1 - (1 - \xi_1)^2} \sin(2\pi\xi_2) = \sqrt{1 - \xi_1^2} \sin(2\pi\xi_2) \\ z &= \xi_1 \end{aligned}$$

Poznámka: Keďže $\xi_1 \sim \mathcal{U}(0, 1)$, aj výraz $1 - \xi_1$ má rovnaké rozdelenie, preto sa v implementáciách často zjednodušuje priamo na ξ_1 .

2 Importance Sampling: Kosínusovo vážené vzorkovanie

Pre difúzne (Lambertovské) povrchy je výhodné vzorkovať smer na jednotkovej sfére podľa hustoty, ktorá zodpovedá kosínusu uhla dopadu. Chceme teda, aby $p(\omega) \propto \cos \theta$.

2.1 Krok 1: Určenie normalizačnej konštanty

Hustota pravdepodobnosti $p(\omega) = C \cos \theta$ musí byť normalizovaná, teda jej integrál cez celú hemisféru musí byť rovný 1:

$$\int_{\Omega} p(\omega) d\omega = 1 \Rightarrow \int_{\Omega} C \cos \theta d\omega = 1.$$

Rozpíšeme tento integrál na zložky a s využitím Jacobianu dostaneme:

$$\int_{\Omega} C \cos \theta d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} C \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = 1.$$

Použitím jednoduchšej substitúcie $\sin \theta = t$ dostaneme:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 C t dt d\varphi = C \int_0^{2\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 d\varphi = \frac{C}{2} \cdot 2\pi = C\pi = 1 \implies C = \frac{1}{\pi}.$$

Teda naša normalizovaná hustota je:

$$p(\omega) = \frac{\cos \theta}{\pi}.$$

2.2 Krok 2: Transformácia funkcie hustoty smeru na funkciu hustoty uhlov a výpočet CDF

Našu funkciu hustoty $p(\omega)$ transformujeme na hustotu $p(\theta, \varphi)$ pomocou Jacobiánu:

$$p(\theta, \varphi) = p(\omega) |J| = p(\omega) \sin \theta = \frac{\cos \theta}{\pi} \cdot \sin \theta.$$

Marginálnu hustotu pre zvolený uhol θ vyjadríme pomocou nasledujúceho výpočtu:

$$p(\theta) = \int_0^{2\pi} p(\theta, \varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \sin \theta}{\pi} d\varphi = \frac{\cos \theta \sin \theta}{\pi} \cdot 2\pi = 2 \cos \theta \sin \theta.$$

Podmienenu hustotu pre druhý uhol φ určíme zasa takto:

$$p(\varphi | \theta) = \frac{p(\theta, \varphi)}{p(\theta)} = \frac{\cos \theta \sin \theta \frac{1}{\pi}}{2 \cos \theta \sin \theta} = \frac{1}{2\pi}.$$

Z týchto dvoch funkcií teraz odvodíme **kumulatívne distribučné funkcie (CDF)**:

Kumulatívna distribučná funkcia $P(\theta)$ pre funkciu hustoty $p(\theta)$ je:

$$P(\theta) = \int_0^\theta p(t) dt = \int_0^\theta 2 \sin t \cos t dt = 2 \int_0^{\sin \theta} x dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\sin \theta} = \sin^2 \theta.$$

Podobne, kumulatívna distribučná funkcia $P(\varphi | \theta)$ pre funkciu hustoty $p(\varphi | \theta)$:

$$P(\varphi | \theta) = \int_0^\varphi p(t | \theta) dt = \int_0^\varphi \frac{1}{2\pi} dt = \frac{\varphi}{2\pi}.$$

2.3 Krok 3: Inverzná transformácia a prechod ku karteziánskym súradniciam

Položíme CDF rovné náhodným číslam ξ_1, ξ_2 , t.j. $P(\theta) = \xi_1$ a $P(\varphi | \theta) = \xi_2$, kde $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{U}(0, 1)$ a vyjadríme uhly θ a φ :

1. $P(\theta) = \sin^2 \theta = \xi_1 \Rightarrow \sin \theta = \sqrt{\xi_1} \Rightarrow \theta = \arcsin(\sqrt{\xi_1})$
2. $P(\varphi | \theta) = \frac{\varphi}{2\pi} = \xi_2 \Rightarrow \varphi = 2\pi\xi_2$

Dosadením do parametrického vyjadrenia sféry a použitím identity $\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a}$ dostaneme karteziánske súradnice náhodného smeru ω :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\xi_1} \cos(2\pi\xi_2) \\ y &= \sqrt{\xi_1} \sin(2\pi\xi_2) \\ z &= \sqrt{1 - \xi_1} \end{aligned}$$

3 Praktická implementácia: Výpočet smeru lúča

Smer lúča $\omega_j = (x, y, z)$ v lokálnych súradniciach povrchu vypočítame tak, že najskôr vygenerujeme náhodné hodnoty ξ_1 a ξ_2 z rovnomerného rozdelenia $\mathcal{U}(0, 1)$ a potom ich dosadíme do nasledujúcej sústavy rovníc:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\xi_1} \cos(2\pi\xi_2) \\ y &= \sqrt{\xi_1} \sin(2\pi\xi_2) \\ z &= \sqrt{1 - \xi_1} \end{aligned}$$

Kľúčový postreh pre odhad integrálu: Všimnite si, čo sa stane v Monte Carlo estimátore. Ak vzorkujeme podľa $p(\omega) = \frac{\cos \theta}{\pi}$, tak v sume pre odhad očakávajúcej radiancie pomocou rovnice odrazu dostaneme:

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{L_i(\mathbf{x}, \omega_j) f_r(\mathbf{x}, \omega_j, \omega_o) \cos \theta_j}{p(\omega_j)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{L_i(\mathbf{x}, \omega_j) f_r(\mathbf{x}, \omega_j, \omega_o) \cos \theta}{\frac{\cos \theta}{\pi}} \\ &= \frac{\pi}{N} \sum_{j=1}^N L_i(\mathbf{x}, \omega_j) f_r(\mathbf{x}, \omega_j, \omega_o). \end{aligned}$$

Kosínusový člen sa vykráti! To znamená, že v odhade integrálu už nemusíme počítat člen $\cos \theta$, čím sa náš výpočet trochu zjednodušil.