

# Modelovanie škálovacích exponentov zrážok interpolačnými metódami<sup>1</sup>

## Scaling exponent of rainfall modeling by interpolation methods

Bohdal Róbert, Bohdalová Mária

**Abstract:** The goal of this work is the modelling of spatial and temporal scaling exponent of rainfall over a range of scales. The interpolating spline methods are applied to the scaling exponent of rainfall. Three different interpolation methods are employed, and examples of the results are given. All three modeling approaches are used to predict the rainfall intensity over the all places in Slovakia. These model approaches gives acceptable forecasts. Its give consistently smaller prediction errors compared to triangular methods. The models can be used to predict in real time the spatial rainfall.

**Key words:** thin plate spline, Shepard's method, rainfall, scaling exponent

**Kľúčové slová:** tenkostenný splajn, Shepardova metóda, zrážky, škálovací exponent

### 1. Úvod

Cieľom tohto článku je modelovanie škálovacích koeficientov zrážok, ktoré boli získané metódou škálovania zrážok (pozri [5], [6]). Množstvo zrážok (ich hodnoty) poskytujú zrážkomerné prístroje. Väčšina zrážkomerných prístrojov dáva informácie o jednodenných zrážkových úhrnoch, avšak pre vodohospodárske účely sú často potrebné aj údaje s väčším časovým rozlíšením. Metóda škálovania zrážok umožňuje určiť návrhové hodnoty dažďov pre zvolenú dobu opakovania pre trvania kratšie ako jeden deň, s využitím denných zrážkomerných záznamov. Zrážkomerné prístroje sú nainštalované len v niekoľkých miestach na Slovensku, avšak pre vodohospodárske účely je potrebné poznať hodnoty škálovacích koeficientov aj v miestach, kde zrážkomerné prístroje nie sú. Z tohto dôvodu sme sa rozhodli použiť interpolačné metódy, ktoré umožňujú vytvoriť model plochy reprezentujúcej zrážkovú činnosť na celom území Slovenska. Z množstva známych interpolačných metód sme vybrali tie, ktoré sú použiteľné pre ľubovoľne rozmiestnené meracie stanice (čiže také, ktoré nie sú rozmiestnené v pravouhlej mriežke).

### 2. Interpolačné metódy

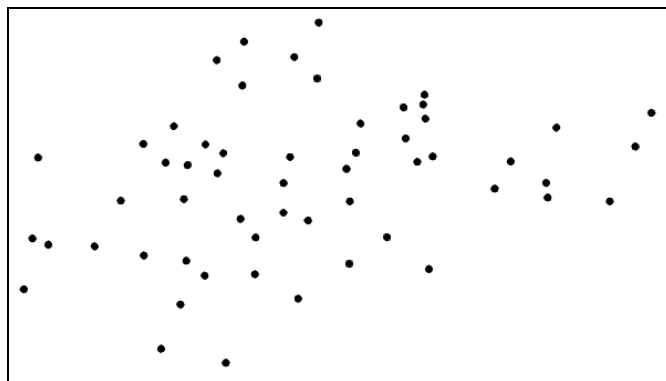
Majme dané geodetické súradnice  $\mathbf{p}_i[x_i, y_i] \in \mathbb{E}^2$ ;  $i = 1, \dots, n$ , a v nich zadané reálne hodnoty  $v_i \in \mathbb{R}$ , resp. namerané množstvo zrážok v jednotlivých meracích staniach Slovenska. Našou úlohou je nájsť takú interpolačnú funkciu  $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , pre ktorú platí  $f(\mathbf{p}_i) = v_i$ , pre  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Pri výbere interpolačnej plochy treba vziať do úvahy fakt, že merné stanice sú na Slovensku rozložené v nepravidelnej mriežke (pozri Obrázok 1).

---

<sup>1</sup> Článok vznikol za podpory grantu agentúry VEGA-1/4024/07

Obrázok 1: Rozmiestnenie zrážkomerných staníc na Slovensku



Z vyššie uvedeného dôvodu, sme z viacerých interpolačných metód vybrali interpoláciu pomocou radiálnych bázických funkcií, známu aj pod názvom tenkostenný splajn a Shepardovu metódu a jej modifikáciu. Ich stručný opis uvádzame v nasledujúcich častiach článku.

## 2.1. Tenkostenný splajn

Interpolácia pomocou tenkostenných splajnov (interpolácia pomocou *radiálnych bázických funkcií*) je jednou z najpoužívanejších metód určených na interpoláciu nerovnomerne rozložených dát.

Metóda interpolácie tenkostenným splajnom je špeciálnym prípadom všeobecných interpolačných metód pomocou radiálnych bázických funkcií. Interpoláčna funkcia  $f(\mathbf{x})$  týchto metód má v priestore  $\mathbb{E}^d$  nasledujúce vyjadrenie ([1]):

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i R_{d,k}(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|) + \sum_{|\alpha| < k} \mathbf{c}_\alpha \mathbf{x}^\alpha, \quad (1)$$

kde  $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$ ,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,

a  $R_{d,k}(r)$  je trieda radiálnych bázických funkcií v tvare:

$$R_{d,k}(r) = \begin{cases} r^{2k-d}, & \text{ak } d \text{ je nepárne} \\ r^{2k-d} \log(r), & \text{ak } d \text{ je párne} \end{cases} \quad \text{pre } 2k > d.$$

V prípade tenkostenných splajnov je  $d=2$  a  $k=2$ , z čoho dostaneme  $R_{2,2}(r) = r^2 \log(r)$ . Tenkostenný splajn má potom vyjadrenie:

$$f(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i^2 \log(r_i^2), \text{ pre } [x, y] \in \mathbb{E}^2, \quad (1)$$

pričom  $r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$  a  $c_1, c_2, c_3, \lambda_i$  sú neznáme. Parametre  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  musia spĺňať podmienky:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{p}_i = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Aplikovaním interpolačných podmienok  $f(\mathbf{p}_i) = v_i$ , kde  $i = 1, 2, \dots, n$  spolu s podmienkami (2) vypočítame neznáme zo systému rovníc:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 0 & 0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 1 & x_1 & y_1 & 0 & r_{21}^2 \log(r_{21}^2) & \cdots & r_{n1}^2 \log(r_{n1}^2) \\ 1 & x_2 & y_2 & r_{12}^2 \log(r_{12}^2) & 0 & \cdots & r_{n2}^2 \log(r_{n2}^2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & r_{1n}^2 \log(r_{1n}^2) & r_{2n}^2 \log(r_{2n}^2) & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \lambda_1/2 \\ \lambda_2/2 \\ \vdots \\ \lambda_n/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad (3)$$

kde  $r_{ij}^2 = r_{ji}^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2$ .

## 2.2. Shepardova metóda interpolácie

Shepardova metóda patrí k najjednoduchším prístupom k interpolácii nerovnomerne rozložených dát [2].

Analogicky ako v predchádzajúcej časti budeme hľadať interpolačnú funkciu vyhovujúcu podmienkam  $f(\mathbf{p}_i) = v_i$ , pre  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Shepard navrhol interpolačnú funkciu v tvare váženého priemeru hodnôt  $v_i$ .

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \omega_i(\mathbf{x}) v_i. \quad (5)$$

Váhovaciu funkciu  $\omega_i(\mathbf{x})$  zo vzťahu (5) môžeme vyjadriť v tvare:

$$\omega_i(\mathbf{x}) = \frac{\sigma_i(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^n \sigma_j(\mathbf{x})}, \quad (6)$$

kde  $\sigma_i(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|^{-\mu_i}$ , pre  $\mu_i > 0$ . Parameter  $\mu_i$  umožňuje ovplyvňovať tvar výslednej plochy v okolí interpolovaných bodov.

V literatúre (napr. v [3]) sa často vyskytuje zovšeobecnená Shepardova metóda používajúca lokálne interpolanty, ktoré nahrádzajú hodnoty  $v_i$  lokálnymi interpolačnými funkciami  $L_i(\mathbf{x})$  s vlastnosťou  $L_i(\mathbf{p}_i) = v_i$ . Potom funkcia  $f(\mathbf{x})$  zo vzťahu (5) bude mať tvar:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \omega_i(\mathbf{x}) L_i(\mathbf{x}). \quad (7)$$

Ak interpolačné funkcie budú kvadratické, tak dostaneme dostatočne hladkú plochu s relatívne malou výpočtovou náročnosťou.

Modifikovaná kvadratická Shepardova metóda má tvar (pozri [4]):

$$f(\mathbf{x}) = f(x, y) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x, y) Q_i(x, y), \quad (8)$$

pričom lokálny kvadratický interpolant  $Q_i(x, y)$  je určený predpisom:

$$Q_i(x, y) = c_{i,1}(x - x_i)^2 + c_{i,2}(x - x_i)(y - y_i) + c_{i,3}(y - y_i)^2 + c_{i,4}(x - x_i) + c_{i,5}(y - y_i) + v_i. \quad (9)$$

Neznáme koeficienty  $c_{ij}$  v  $Q_i(x, y)$  sú vypočítané metódou najmenších štvorcov s použitím podmienok:

$$\sum_{k=1, k \neq i}^n \omega_k(x_i, y_i) [c_{i,1}(x_k - x_i)^2 + \cdots + c_{i,5}(y_k - y_i) + f_i - f_k]^2 \rightarrow \min, \quad (10)$$

kde  $\omega_k(x, y) = \left( \frac{R_q - d_k(x, y)}{R_q d_k(x, y)} \right)_+^2$  a  $R_q$  je polomer vplyvu okolia bodu  $p_i[x_i, y_i]$ .

### 3. Praktická časť

Vstupné údaje tvorili maximálne intenzity zrážok z 56 zrážkomerných staníc z celého územia Slovenska, spracované postupom podľa Šamaja a Valoviča ([8]), pre trvania 5 až 180 min, doplnené o denné údaje. V týchto merných staniaciach sme použili metódu jednoduchého škálovania na určenie návrhových dažďových intenzít na Slovensku (pozri [5]). Metóda jednoduchého škálovania umožňuje určiť návrhové hodnoty zrážok pre trvania dažďov kratších než jeden deň a pre zvolenú dobu opakovania využíva denné záznamy o úhrnoch zrážok. Metóda bola aplikovaná vo viacerých oblastiach Európy, ako i zámoria, a osvedčila sa ako vhodná na vyjadrenie vzťahov medzi intenzitou, trvaním a periodicitou zrážok ([6], [9], [7]).

Našou úlohou bolo nameranými hodnotami preložiť dostatočne vhodnú interpolačnú splajnovú plochu s využitím rôznych metód a overiť ich presnosť pomocou známych štatistických mier. Overovanie modelu sme uskutočnili pomocou známej metódy, v ktorej sa postupne vylúči vždy jedno meranie (z nameraných hodnôt) a následne sa spočíta chyba interpolácie pre vylúčené meranie. Takto sme postupovali u všetkých interpolačných metód. Grafické výstupy interpolačných plôch získaných jednotlivými metódami uvádzame na obrázku 2, 3 a 4.

Pre jednotlivé metódy sme analyzovali ich chyby. V nasledujúcej tabuľke uvádzame prehľad popisných štatistík podľa jednotlivých metód:

**Tabuľka 1: Porovnanie interpolačných splajnových modelov**

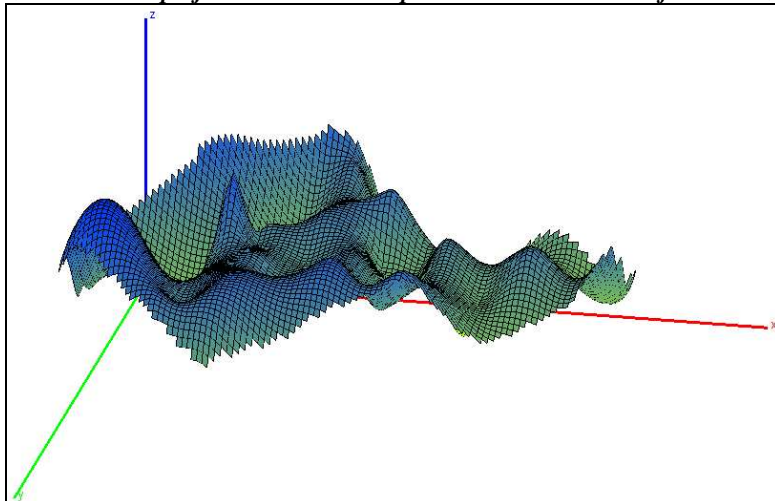
	<i>Tenkosplajnová metóda</i>	<i>Shepardova metóda</i>	<i>Kvadratická Shepardova metóda</i>
<b>Priemer</b>	0,0007	-0,0004	-0,0006
<b>Štandardná chyba</b>	0,0047	0,0038	0,0071
<b>Medián</b>	-0,0009	0,0017	0,0020
<b>Smerodajná odchýlka</b>	0,0354	0,287	0,0531
<b>Rozptyl výberu</b>	0,0013	0,0008	0,0028
<b>Štrmost'</b>	-0,1010	-0,2412	3,9433
<b>Šikmost'</b>	-0,1816	-0,0560	-0,6079
<b>Rozsah</b>	0,1619	0,1240	0,3423
<b>Minimum</b>	-0,0834	-0,0724	-0,2000
<b>Maximum</b>	0,0785	0,0516	0,1423

Pre chyby jednotlivých modelov sme otestovali hypotézu:  $H_0$ : priemerná chyba sa rovná nule, oproti alternatíve, že priemerná chyba nie je rovná nule. Pre všetky metódy Studentov  $t$ -test nezamietol nulovú hypotézu na ľubovoľnej hladine významnosti  $\alpha$ . Ďalej sme overili normalitu chýb. Pomocou *Kolmogorovho-Smirnovho* testu, sme zistili, že tenkosplajnová a Shepardova metóda majú normálne rozdelené chyby pre  $\alpha = 0,05$  ale kvadratická Shepardova metóda má normálne rozdelené chyby len pre  $\alpha = 0,01$ . Výsledky týchto hypotéz uvádzame v nasledujúcej tabuľke:

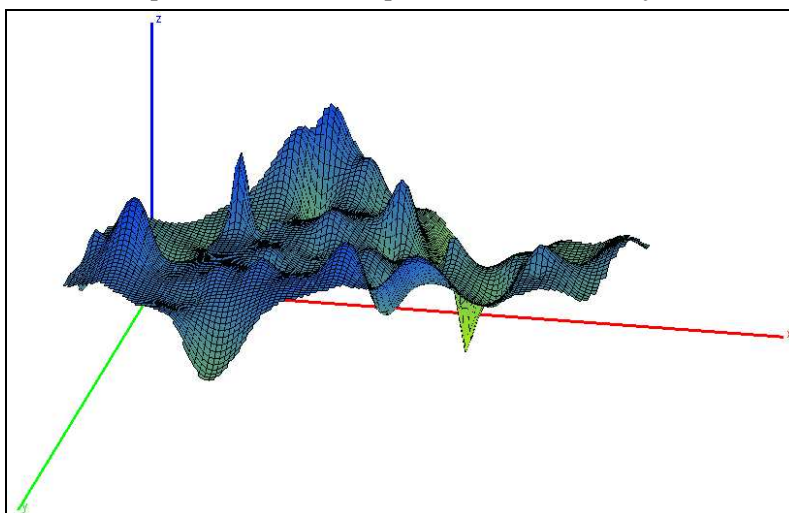
**Tabuľka 2: Výsledky testu: priemerná chyba je nulová a testu normality**

<i>Tenkosplajnová metóda</i>		<i>Shepardova metóda</i>		<i>Kvadratická Shepardova metóda</i>	
Student $t$ -test ( $p$ -value)	test normality	Student $t$ -test ( $p$ -value)	test normality	Student $t$ -test ( $p$ -value)	test normality
0,8866	0,1500	0,9128	0,1500	0,9280	0,0306

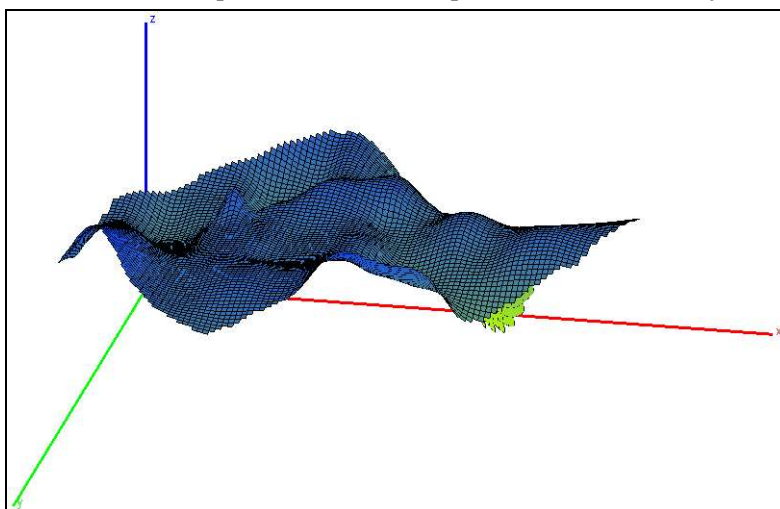
**Obrázok 2: Tenkosplajnová metóda interpolácie škálovacích koeficientov zrážok**



**Obrázok 3: Shepardova metóda interpolácie škálovacích koeficientov zrážok**



**Obrázok 4: Kvadratická Shepardova metóda interpolácie škálovacích koeficientov zrážok**



#### 4. Záver

Pre modelovanie škálovacích exponentov zrážok sme okrem vyššie uvedených troch interpolačných metód použili aj interpolačné metódy založené na trianguláciách (*Cloughovu-Tocherovu*, *Powellovu-Sabinovu* metódu a iné), avšak ich výsledky boli menej presné a preto ich v článku neuvádzame. Výsledky získané tenkosplajnovou metódou, Shepardovou metódou a kvadratickou Shepardovou metódou budú ďalej podrobené analýzám pre vodohospodárske účely, prípadne budeme ďalej uvažovať o využití interpolačných metód založených na radiálnych bázičných funkciách s lokálnym nosičom ([10]).

#### 5. Literatúra

- [1] DUCHON, J. 1977. Lecture Notes in Mathematics 571. Springer-Verlag, Berlin, 1977, s. 85–100.
- [2] SHEPARD, D. 1968. A two dimensional interpolation function for irregular spaced data. Proceedings 23rd ACM. National Conference, 1968, s. 517–524.
- [3] FRANKE, R., NIELSON, G. 1980. Smooth interpolation of large sets of scattered data. In International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 15, no. 11, 1980, s. 1691–1704.
- [4] RENKA, R. 1988. Multivariate interpolation of large sets of scattered data. In: ACM Transactions on Mathematical Software, vol. 14, no. 2, 1988, s. 139–148.
- [5] BARA, M., GAÁL, L., KOHNOVÁ, S., SZOLGAY, J., HLAVČOVÁ, K. 2008. Simple scaling of extreme rainfall in Slovakia: a case study. In: Meteorological Journal. ISSN 1335–339X. 2008, 11, č.4, s. 153–157.
- [6] MENABDE, M. – SEED, A. – PEGRAM, G. 1999. A simple scaling model for extreme rainfall. Water Resour. Res., 35 (1), 1999, s. 335–339
- [7] MOLNAR, P. - BURLANDO, P. 2005. Preservation of rainfall properties in stochastic disaggregation by a simple random cascade model. Atmospheric Research, 77, 2005, s. 137–151
- [8] ŠAMAJ, F. – VALOVIČ, Š. 1973, Intensities of short-term rainfall in Slovakia. Proceedings of works of HMI, Nr. 5. SPN Bratislava. (in Slovak)
- [9] YU, P.SH. – YANG, T.CH. – LIN, CH.SH. 2004, Regional rainfall intensity formulas based on scaling property of rainfall. In: Journal of Hydrology, 295 (1-4), 2004 s. 108–123
- [10] FORNEFETT, M. – ROHR, K. – STIEHL, H. 1999 Elastic Registration of Medical Images Using Radial Basis Functions with Compact Support. Computer Vision and Pattern Recognition, 1999, s. 402–407.

#### Adresy autorov:

Bohdal Róbert, RNDr., PhD.  
FMFI UK, Mlynská dolina  
842 48 Bratislava  
Robert.bohdal@fmph.uniba.sk

Bohdalová Mária, RNDr., PhD.  
FM UK, Odbojárov 10  
825 05 Bratislava  
maria.bohdalova@fm.uniba.sk