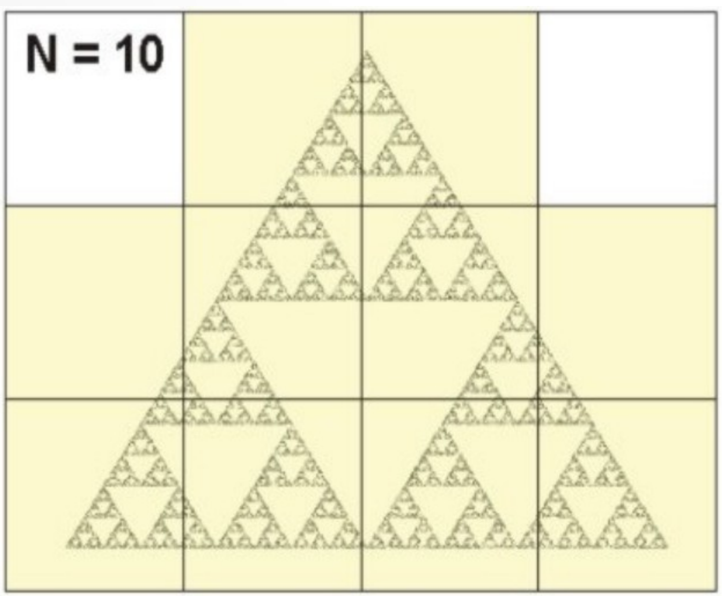
Fraktály

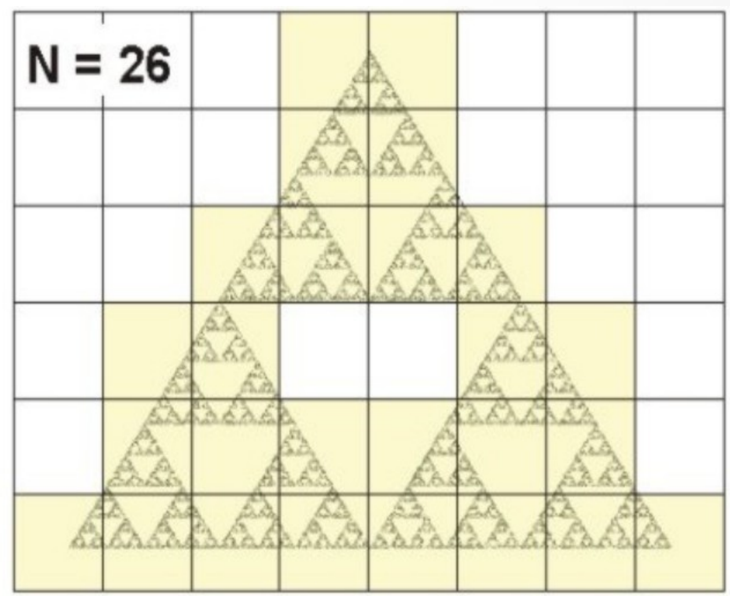
Typy fraktálov

- Dynamické systémy s fraktálnou štruktúrou
- Systémy iterovaných funkcí IFS
- Stochastické fraktály (nepravidelné fraktály)
- L-systémy
- Multifraktály

Určenie dimenzie fraktálov

- Výpočtom, priamo z definície: $D_B = \lim_{r \to 0} \frac{\log N(r)}{\log 1/r}$
- Miežkovou metódou, pomocou pokrývajúcich útvarov (v 1D úsečka, v 2D štvorce, v 3D kocky) Hodnota $N(r)$ sa odhadne z mriežky
- Pre časové rady sa používa R/S analýza (Rescaled Range Analysis)
  $(R/S)_t = ct^H \;\Rightarrow\; \log(R/S)_t = H\log(t) + \log c$



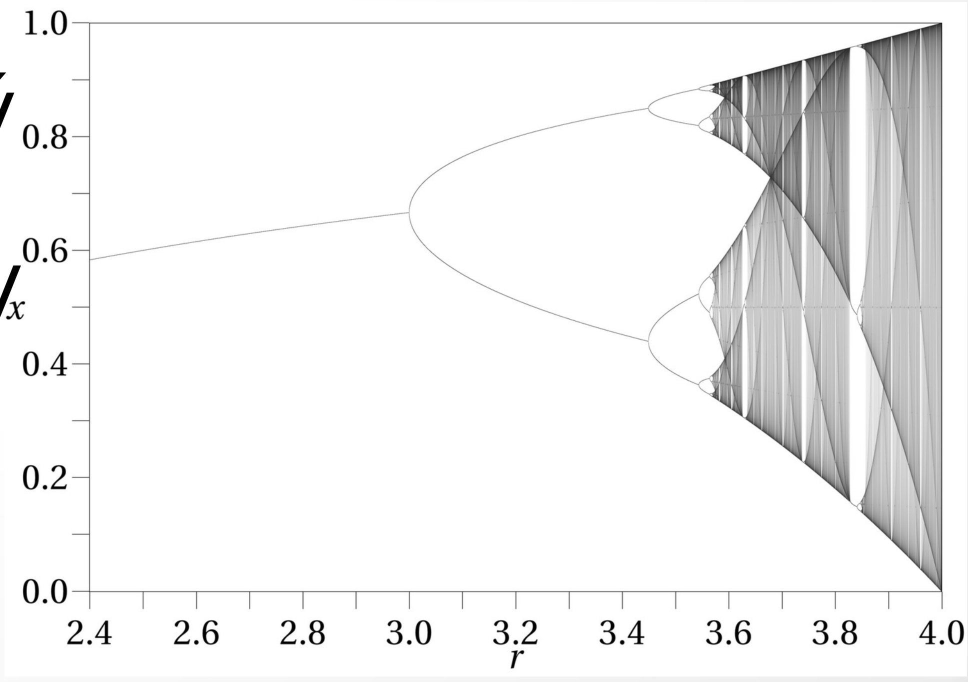


Dynamické systémy s fraktálnou štruktúrou

- Majú v praxi najširšie uplatnenie
- Sú vyjadrené matematickým modelom, ktorého stav je závislý na nejakej nezávislej veličine (obyčajne čase)
- Je určený pomocou dynamických podmienok, ktoré opisujú zmenu tohto systému v čase
- Dynamické podmienky sú často zadávané sústavou diferenciálnych rovníc
- Typickým príkladom je výpočet populačného rastu (logistická rovnica, bifurkačné diagramy)
- Ďalším príkladom je Lorentzov atraktor

Logistická rovnica

- Predstavuje deterministický, dynamický diskrétny model vývoja populácie v čase: $x_{t+1} = rx_t(1-x_t)$, kde $r = 1+\mu$ je rýchlosť rastu a μ je miera rastu (relatívny prírastok populácie)
- Pre $r > 3.57$ sa systém stáva chaotickým
- Bifurkačný diagram:
  $1<r<3$ – asympt. stabilný
  $3<r<1+\sqrt{6}$ – dvojcykly
  $r=3.544090...$ – štvorcykly
  $r>3.57$ – chaotický



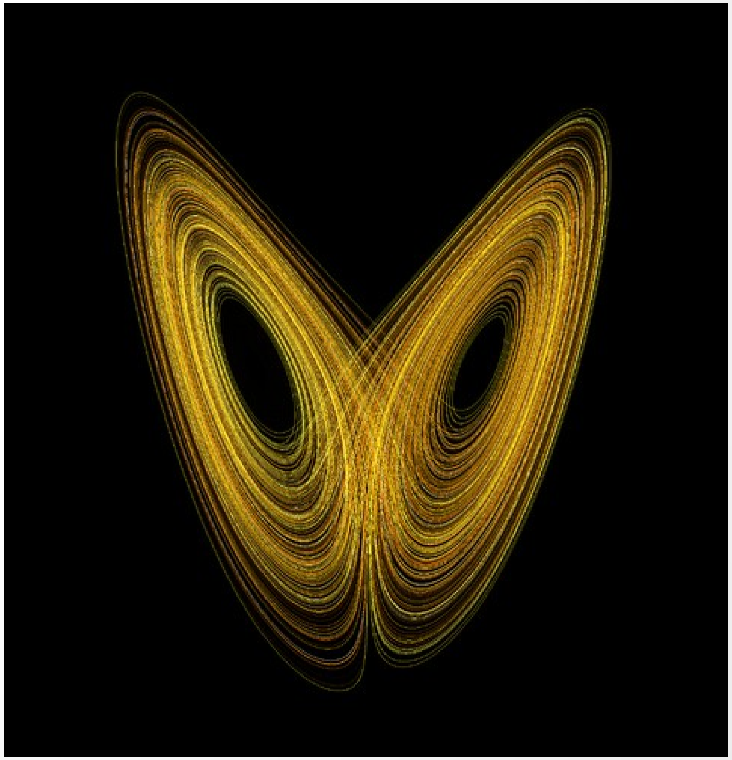
Lorentzov atraktor

- Nelineárny 3D deterministický dynamický systém, odvodený zo zjednodušených rovníc prúdenia tepla v atmosfére
- Pre istú množinu parametrov je to fraktál s dimenziou medzi 2 a 3 a vytvára zamotané periodické orbity

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - x) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$



$\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, $\rho = 28$, $D_H \approx 2.06$

Dynamické systémy s fraktálnou štruktúrou

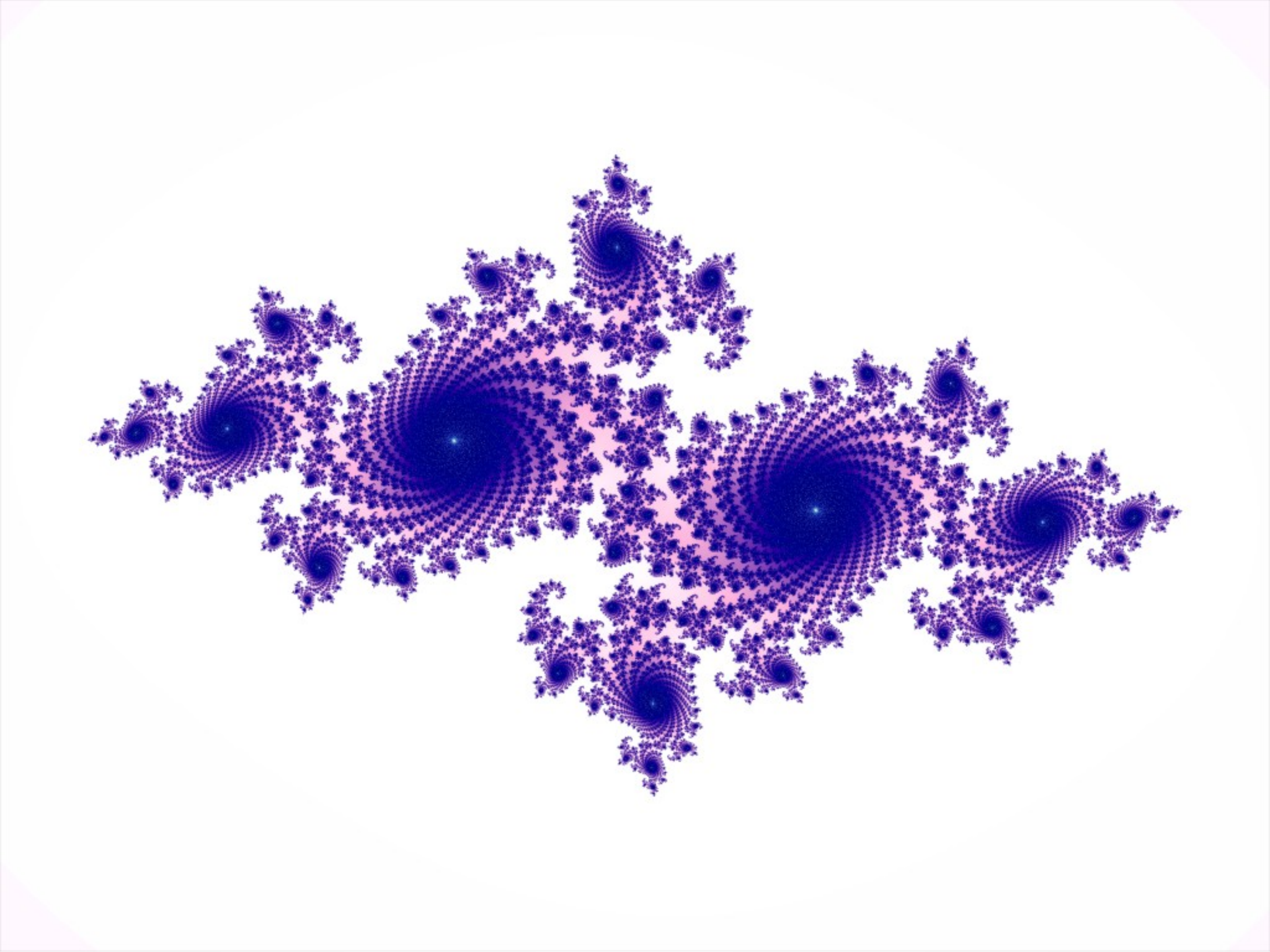
- V počítačovej grafike sú najviac známe Juliove množiny a Mandelbrotova množina

Juliova množina v hyperkomplexnom priestore

Juliove množiny

- Juliove množiny sú založené na iteračnom predpise funkcie komplexnej paraboly:
  $z_{n+1} = f(z_n) = {z_n}^2 + c$,
  z_n a c sú body komplexnej roviny
- Komplexná hodnota *c* je zvolená ľubovoľne a pre všetky počítané body je konštantná
- Juliove množiny sú definováné ako množiny všetkých komplexných čísel z_0, pre ktoré postupnosť z_n nediverguje

Juliove množiny

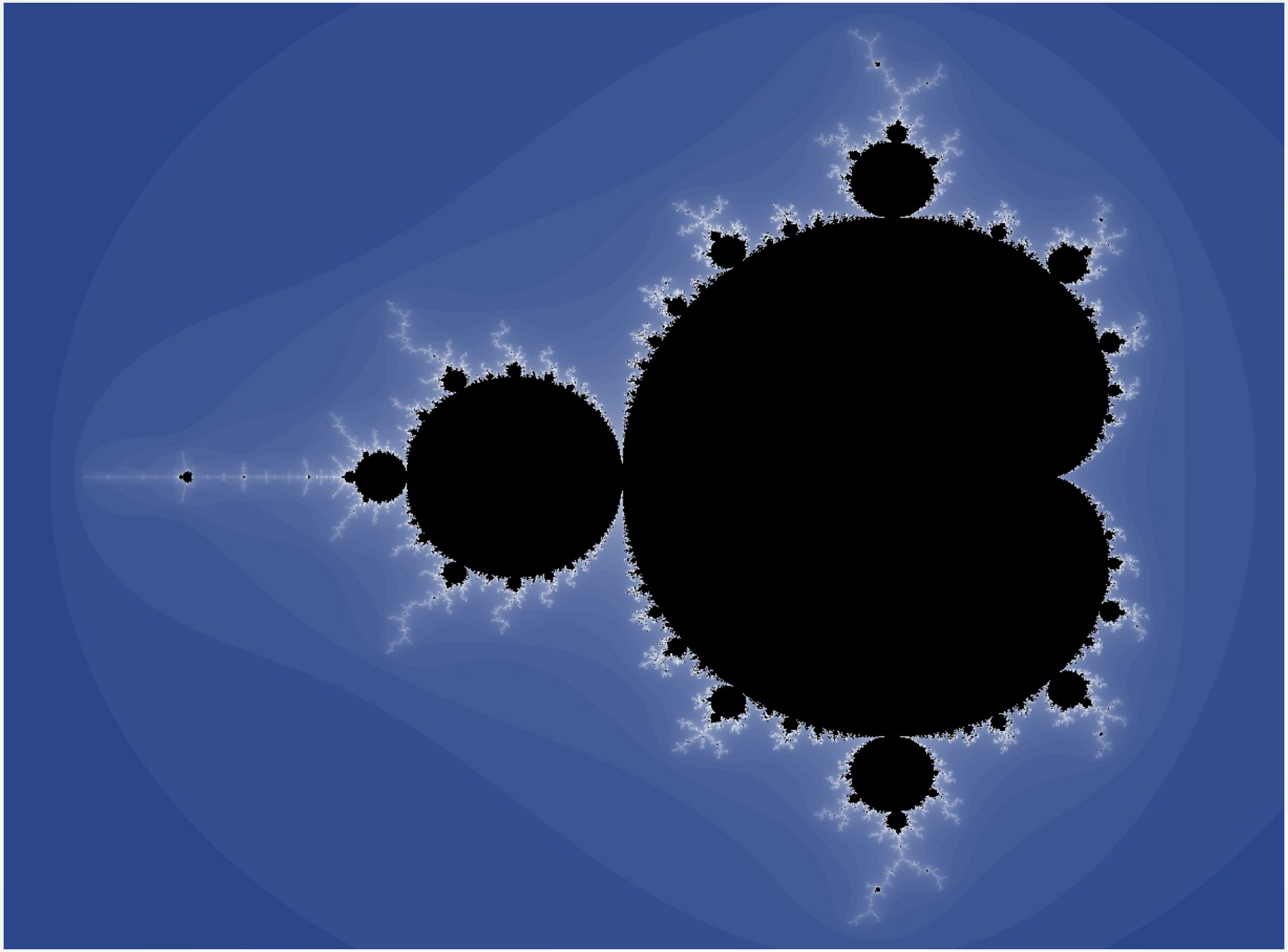


Príklad Juliovej množiny v 2D

Mandelbrotova množina

- Mandelbrotova množina je opäť založená na iteračnom predpise funkcie komplexnej paraboly:
  $z_{n+1} = z_n^2 + c$
- Mandelbrot obmezil predpis na prípad $z_0 = 0$, avšak pre každý počítaný bod sa mení konštanta c
- Mandelbrotova množina je definovaná ako množina všetkých komplexných čísel c, pre ktoré z_{n+1} nediverguje

Mandelbrotova množina



Príklad Mandelbrotovej možiny v 2D

Zobrazovanie fraktálov

Metódy zobrazovania 2D fraktálov:

1) Ofarbenie podľa počtu iterácii s využitím farebnej mapy
2) Hodnota reálnej, imaginárnej (prípadne kombinácie) zložky, veľkosti komplexného čísla či jeho fázy pri poslednej iterácii
3) Postproces v podobe filtrovania (vyhladenie, difúzia, normalizácia, ...
4) Pridanie ďalšej dimenzie (výšková mapa) s využitím počtu iterácii a či hodnoty v poslednej iterácii
5) Využitie „orbitálnej pasce“

Metóda orbitálnej pasce

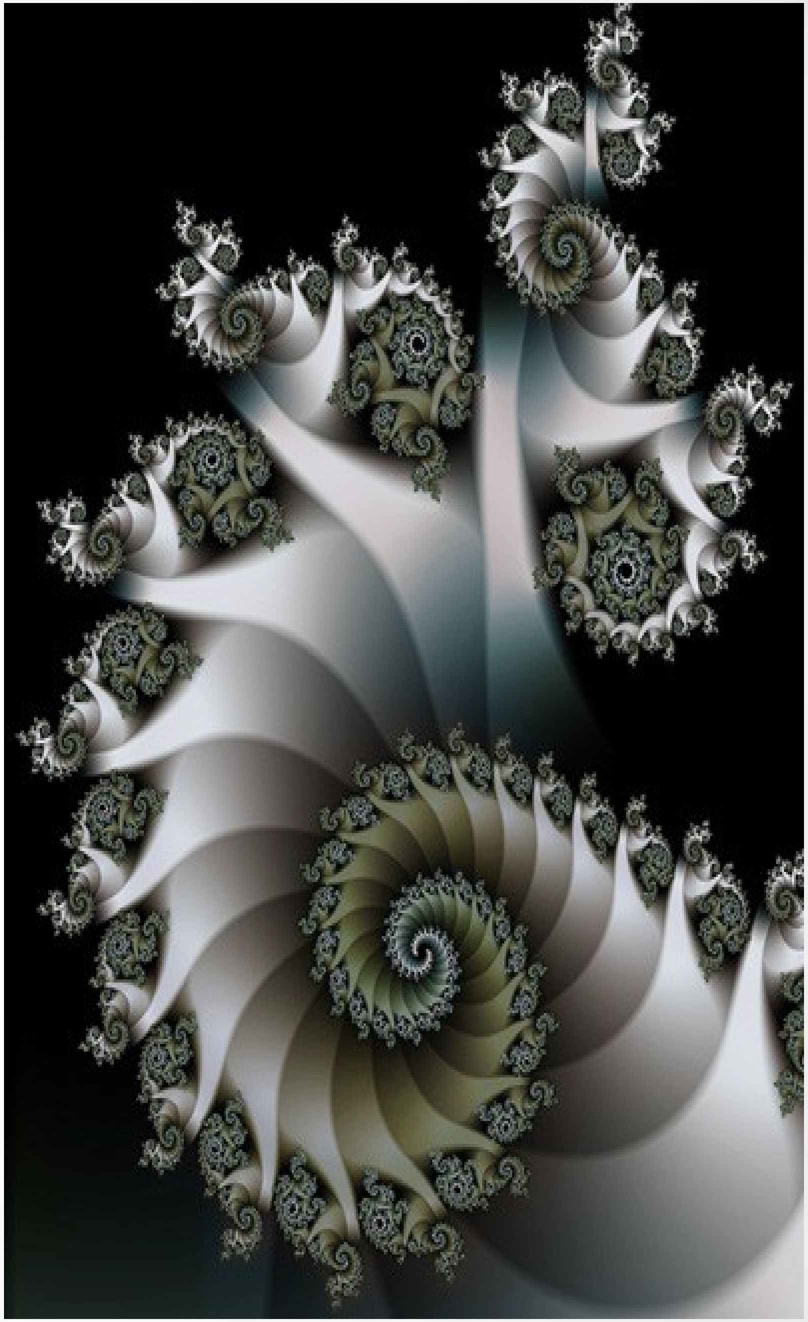
- Orbit tvorí postupnosť vypočítaných hodnôt fraktálu:
  - Mandelbrot $\{0, c, c^2+c, c^4+2c^3+c^2+c, \dots\}$
  - Julia $\{z, z^2+c, z^4+2cz^2+c^2+c, \dots\}$
- Ak je bod *c* vo vnútri Mandelbrotovej množiny, potom sa bude špirálovito otáčať dovnútra do jedného bodu alebo do konečnej oscilujúcej množiny bodov, ak je bod mimo množiny, bude sa špirálovito otáčať smerom von k nekonečnu

```
float iterate(complex c) {
    float dist = 1e20f;
    complex z = complex(0.0f);
    for(int i=0; i<maxIterations; i++) {
        z = z*z + c;
        if (|z|>2.0f) return 0.0f;
        dist = min(dist, lengthSquared(z-point));
        }
    return sqrtf(dist);
}
```

Metóda orbitálnej pasce

- Namiesto vzdialenosť k bodu |z-point| môžeme použiť ako kritérium najbližšiu vzdialenosť k priamke alebo ku krivkám či množine čiar ako je elipsa, kružnica, obdĺžnik, ...
- Ako pasca môže byť použitá nejaká procedurálna metóda, iný fraktál alebo dokonca aj obrázok
- Na body orbitu a pasce môžeme aplikovať nejakú afinnú transformáciu, ktorá môže mať ďalší parameter ako napr. číslo aktuálnej iterácie
- Je možné využiť aj viac pascí a skombinovať ich hodnoty, alebo namiesto minima využiť inú štatistickú mieru (priemerná vzdialenosť alebo štandardná odchýlka vzdialeností)
- Využiť je možné aj viac farebných máp pre viac pascí a skombinovať ich

Metóda orbitálnej pasce



3D fraktály

Daniel White & Paul Nylander 2009:

$z(x, y, z)^n = r^n(\cos(n\theta)\cos(n\varphi), \sin(n\theta)\cos(n\varphi), \sin(n\varphi))$

kde $r = \mathrm{sqrt}(x^2 + y^2 + z^2)$, $\theta = \mathrm{atan2}(y, x)$, $\varphi = \sin^{-1}(z/r)$

- Namiesto $n\theta$ a $n\varphi$ je možné použiť funkcie: $n\theta = f(\theta,\varphi)$ a $n\varphi = g(\theta,\varphi)$
- Najznámejším objektom je 3D Mandelbulb ($n=8$)

4D fraktály

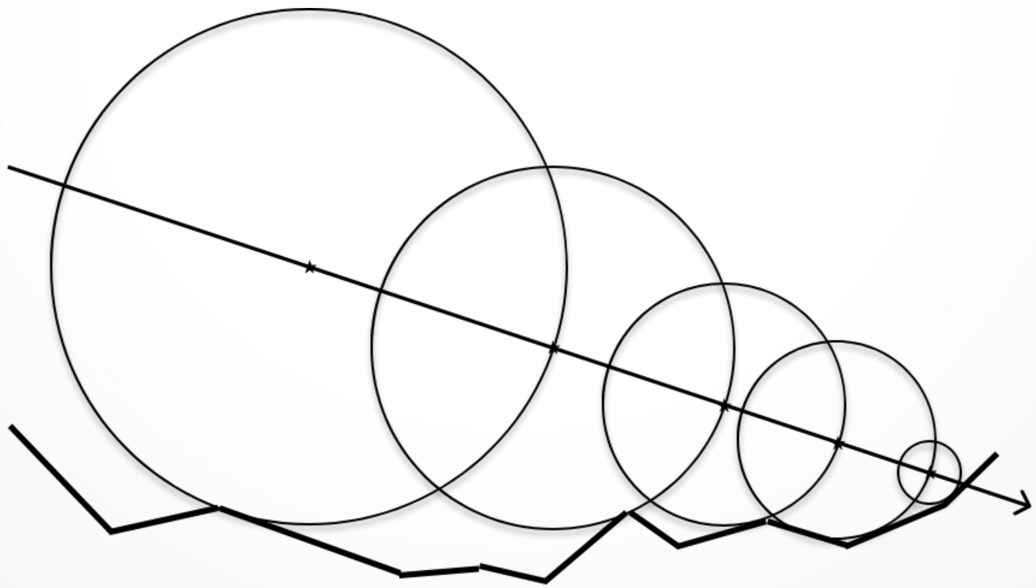
Fraktály v hyperkomplexných číslach

- Najčastejšie sa používajú kvaterniony: $\boldsymbol{q} = a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1$ (Hamilton) alebo bikomplexné čísla
- Je nutné premietanie z 4D do 3D (stredové, kolmé, ...)
- Pre urýchlenie výpočtu sa často počíta len 3D rez fraktálu (t.j. kolmé premietanie do súradnicovej nadroviny), kde štvrtá súradnica z_0 je konštantná

Viacrozmerné fraktály

Metódy zobrazovania >2D fraktálov:

1) Vytvorenie 3D siete = isoplochy (marching cubes, surface nets, ...)
2) Volume rendering
3) Ray marching



Systémy iterovaných funkcií (IFS)

- Práca so systémami IFS predstavuje jednu z často používaných aplikácií procedurálneho modelovania telies (napr. stromov a rastlín)
- Tvoria dôležitú skupinu lineárnych deterministických fraktálov používaných napr. pri fraktálnej komprimácií obrázkov
- IFS fraktál je zadaný množinou kontrakcií (transformácií) φ_i:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} \phi_i(A)$$

- Algoritmus výpočtu môže byť deterministický ale i nedeterministický

Systémy iterovaných funkcií (IFS)

Príklad IFS fraktálu

Stochastické fraktály

Náhodné fraktály môžeme vytvárať viacerými spôsobmi:

1. Fraktálny Brownov pohyb na ploche alebo v priestore
2. Spektrálna syntéza
3. Difúzne ohraničená agregácia (DLA)
4. Metóda presúvania stredného bodu

...

Fraktálny Brownov pohyb

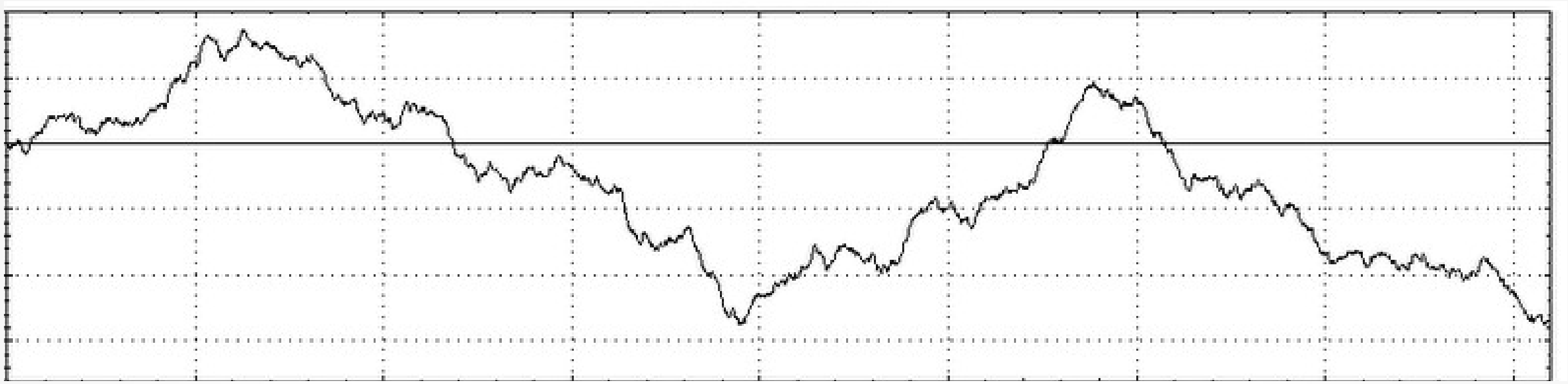
- Brownov pohyb je model pohybu malých pevných čiastočiek v kvapaline, spôsobený termodynamickým pohybom molekúl kvapaliny
- Používa sa na tvorbu obrysu terénnych štruktúr
- Je to stochastický proces $X(t)$, ktorý popisuje pozíciu čiastočky v okamihu t:

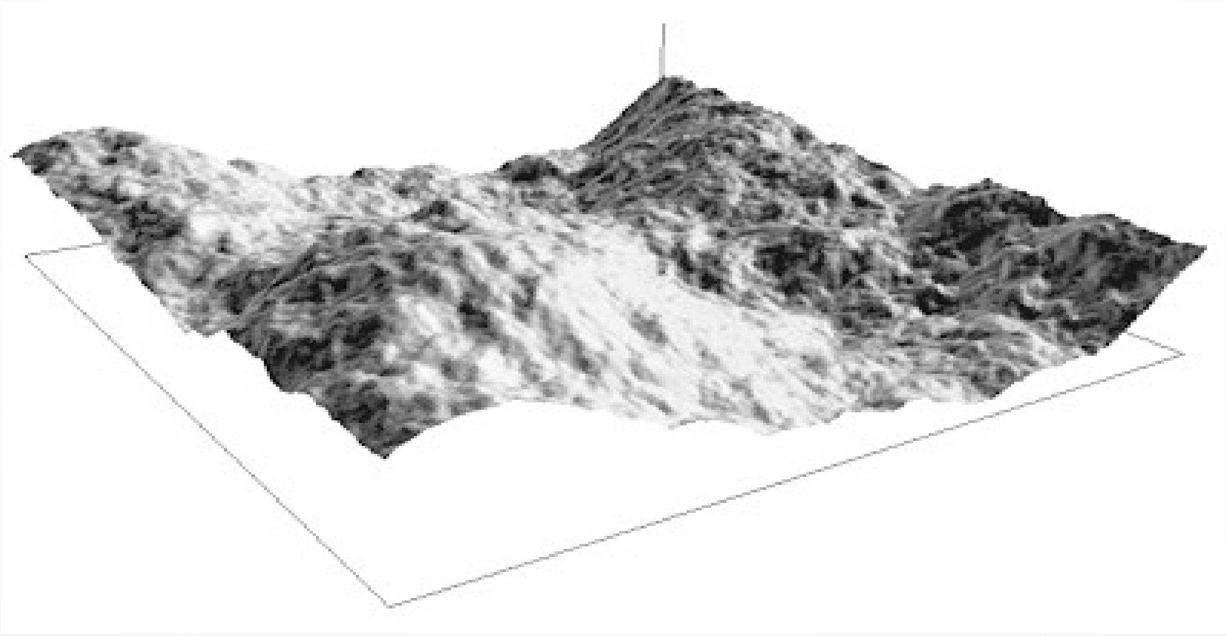
$$X(t+\Delta t)=X(t)+\vec{v}\cdot(\Delta t)^{H}\cdot N(-1,1),\ 0\leq H\leq 1$$

kde $\vec{v}$ je stredná rýchlosť čiastočky, $N(-1,1)$ je náhodná premenná z normálneho rozdelenia, H je Hurstov koeficient a časový prírastok Δt môže byť vyjadrený ako zlomok, t.j. $\Delta t=(1/2)^{i}$

Fraktálny Brownov pohyb

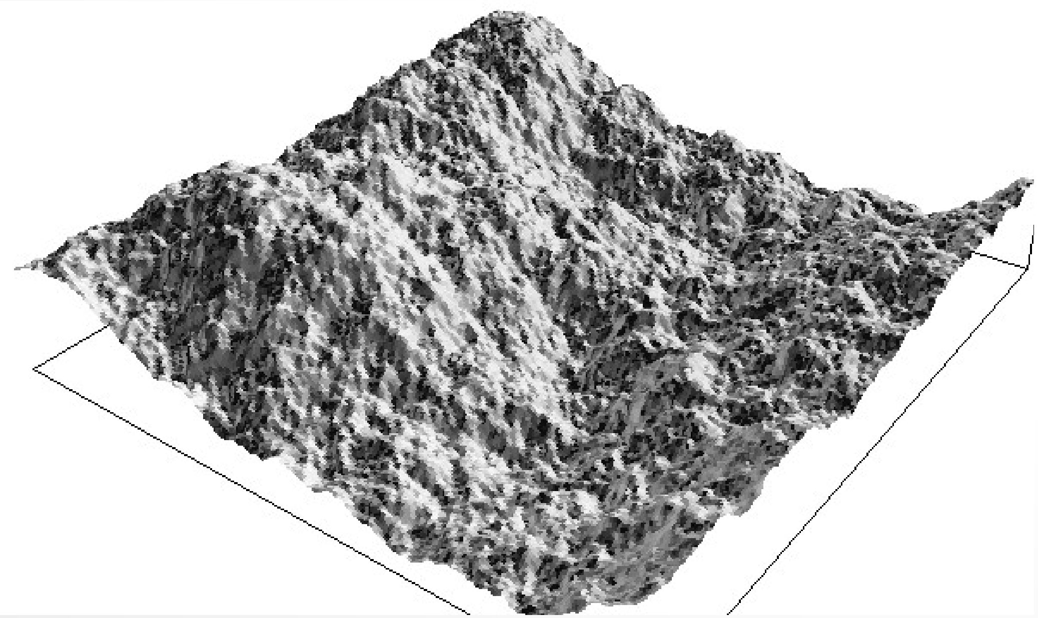
Príklady fraktálneho Brownovho pohybu (fBM):

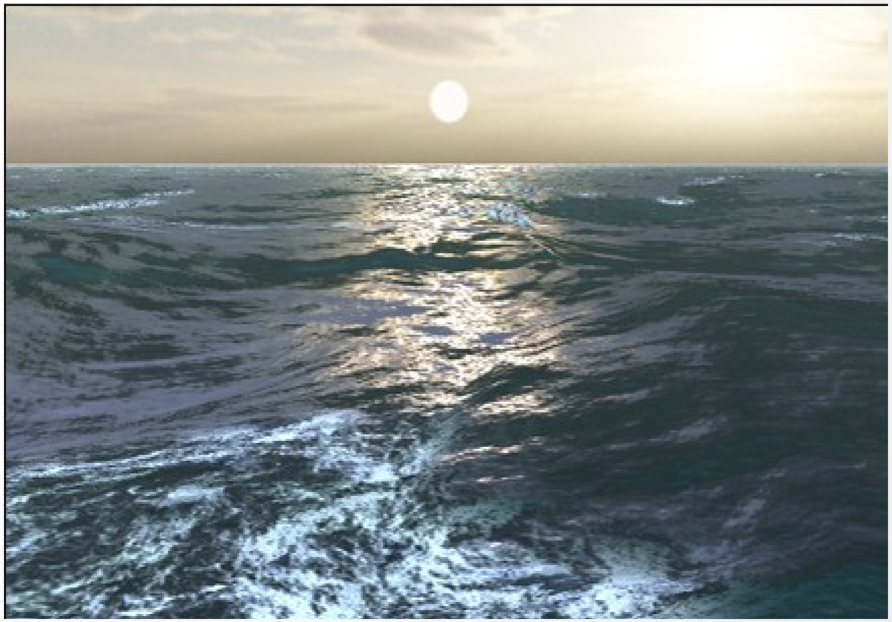




Spektrálna syntéza

- Využíva sa napr. na generovanie výšok terénu
- Používa sa simulácia tzv. ružového šumu $1/f^{\beta}$, (f je frekvencia a β konštanta), pomocou sčítavania i-tych oktáv šumových funkcií s klesajúcou amplitúdou $A=p^i$ ($p \approx 1/2$)
- Je vhodná aj na generovanie oceánskych vĺn

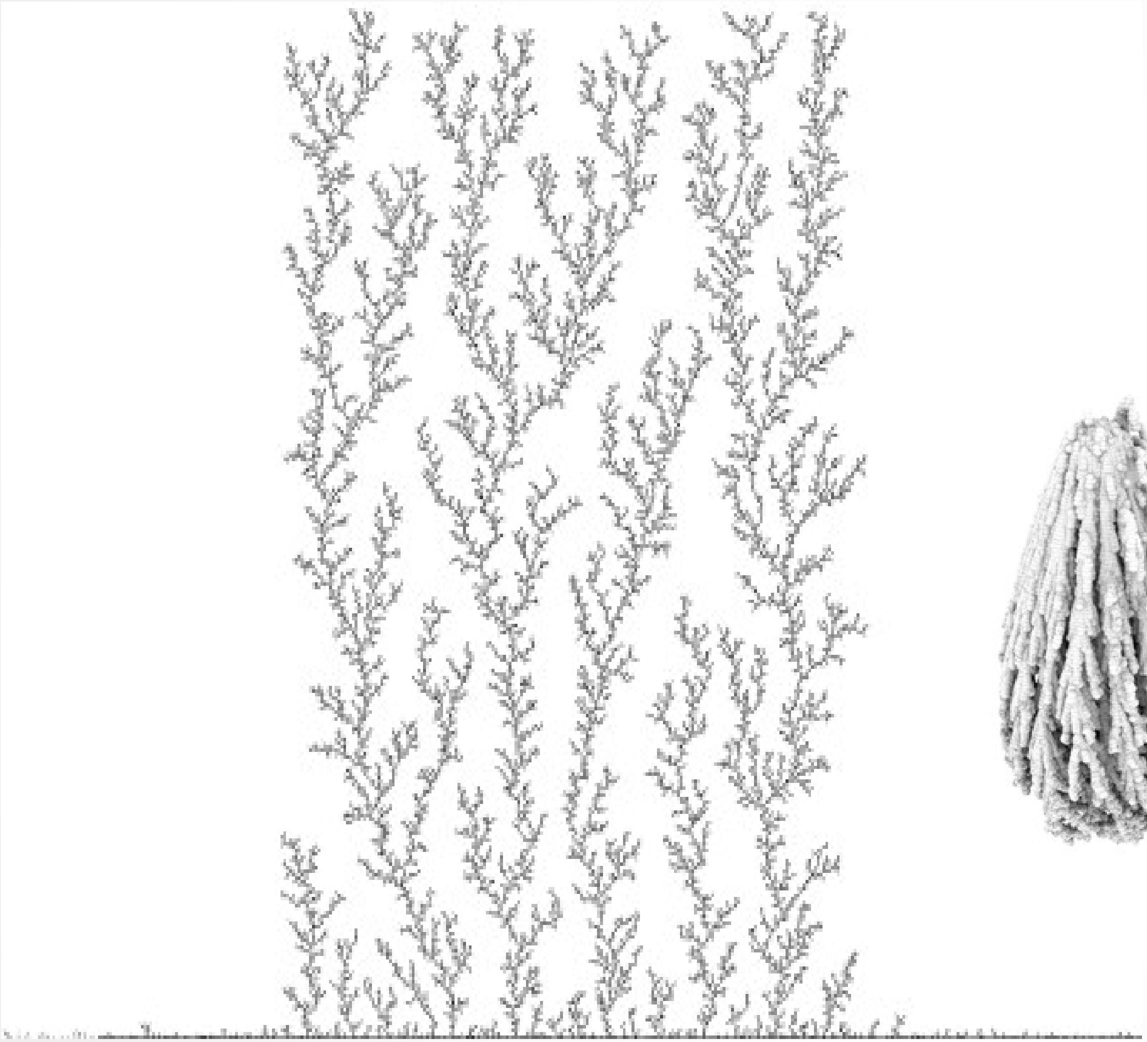




Difúzne ohraničená agregácia

- Označuje proces, v ktorom sa čiastočky pohybujúce sa náhodným Brownovým pohybom zhlukujú (agregujú) a vytvárajú zhluky rôznych tvarov, nazývaných *Brownové stromy*
- Môže sa použiť aj simulácia molekulárnej dynamiky, pričom častice podliehajú voľnému pohybu ak sú dostatočne ďaleko od zhluku, inak sú k nemu priťahované

Difúzne ohraničená agregácia



Metóda presúvania stredného bodu

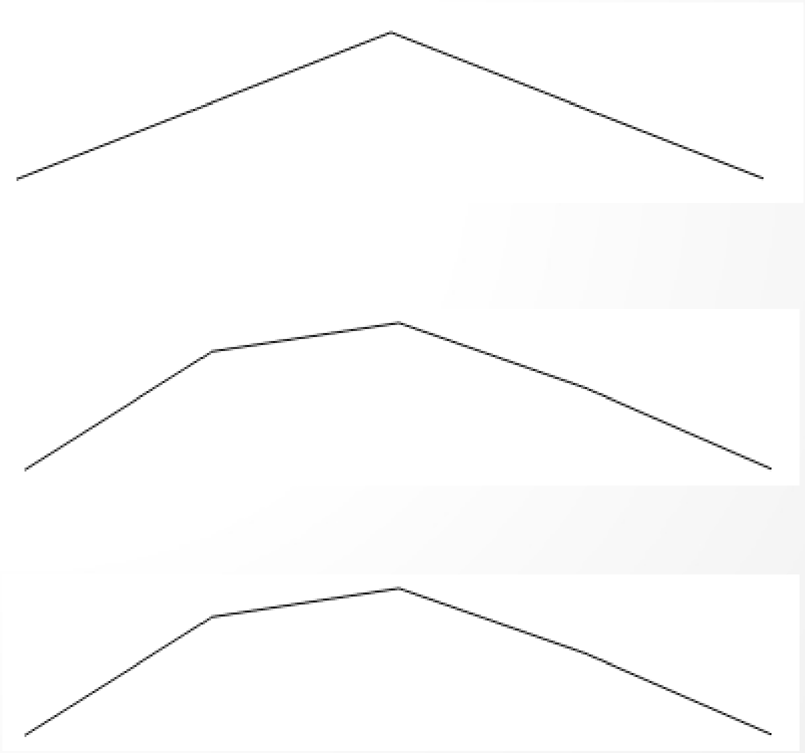
- Veľmi populárna metóda na tvorbu fraktálneho terénu
- Môže sa kombinovať s ďalšími postupmi, najmä pri generovaní počiatočného tvaru
- Je rýchla a jednoduchá na implementáciu
- Pre generovanie terénu v 3D sa používa algoritmus diamant-štvorec
- Používa sa aj pri vytváraní oblakov
- Existuje verzia aj pre trojuholníkovú sieť

Metóda presúvania stredného bodu

Pre 1D je to stochastický 1D fraktál

Postup:

- Rozdeľ úsečku v polovici a posuň stredný bod
- Postup opakuj



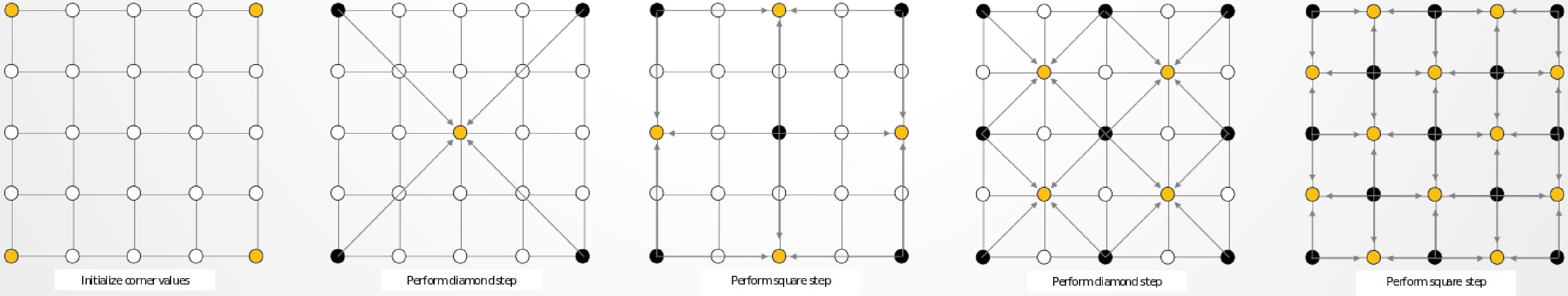
Metóda presúvania stredného bodu

Pre 2D vzniká stochastický 2D fraktál

Postup:

- Rozdeľ štvorec na 4 časti a posuň rohový bod v strede (diamantový krok), potom posuň body v stredoch okrajov (štvorcový krok)
- Postup opakuj

Tento postup sa môže modifikovať aj pre trojuholníkovú sieť

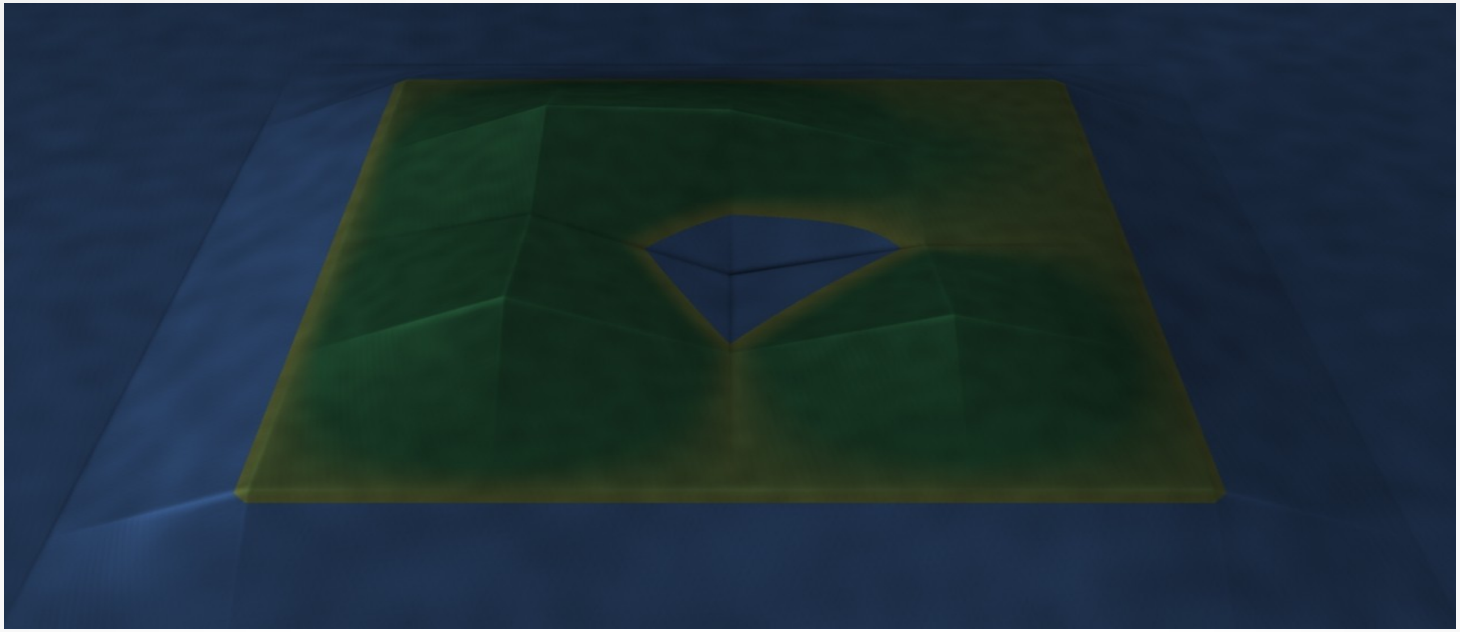


Metóda presúvania stredného bodu

Vylepšenia algoritmu:

- V každej iterácií sa znižuje maximálna veľkosť náhodného posunu
- Nezačína sa na rovinnom útvare (obdĺžnik), ale na dopredu vytvorenom útvare, ktorý vznikne
  - napr. navzorkovaním funkcie: $z = \sin(x)\cos(y)$
  - „modulovaním“ náhodného posunu pomoou funkcie

Metóda presúvania stredného bodu



Multifraktály

- Predstavuje zovšeobecnenie fraktálov
- Namiesto jednej hodnoty (dimenzie) sa používa spojité spektrum exponentov q
- Sú časté v prírode (pobrežia, magnetické pole Slnka, tep srdca, ...)
- Multifraktálna dimenzia D_q v bode x pre exponent q:

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{r \to \infty} \frac{\log \sum_{i=1}^{N} \mu_i^q}{\log 1/r}$$

  kde $\mu_i^q = \mu(P_{i,r}^q(x))$ vyjadruje q-tu mocninu pravdepodobnosti, že časti fraktálu ležia v i-tom pokrývajúcom boxe so stredom v x a dĺžkou strany r
- Pre $q=0$ ide o obyčajnú fraktálnu dimenziu, pre $q=1$ ide o koeficient entropie, pre $q=2$ je to korelačná dimenzia