

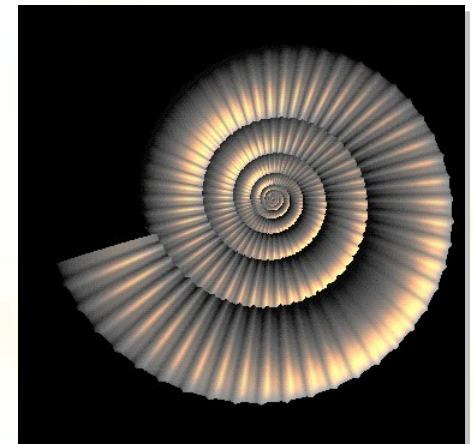
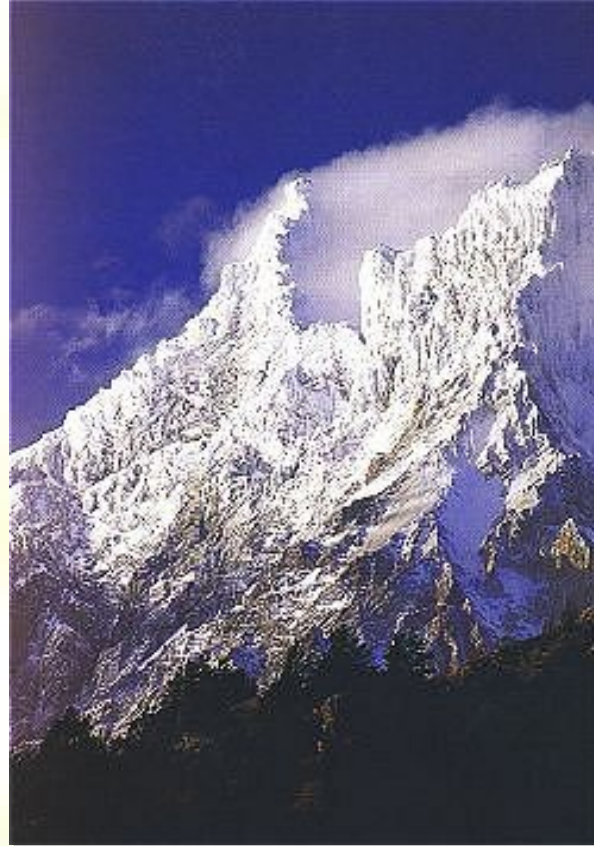
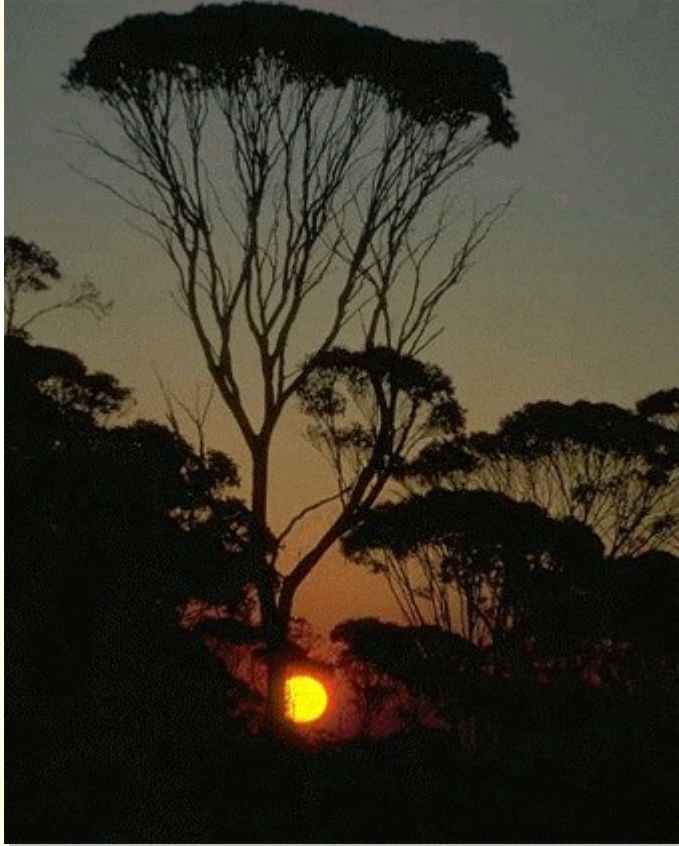


# Fraktály

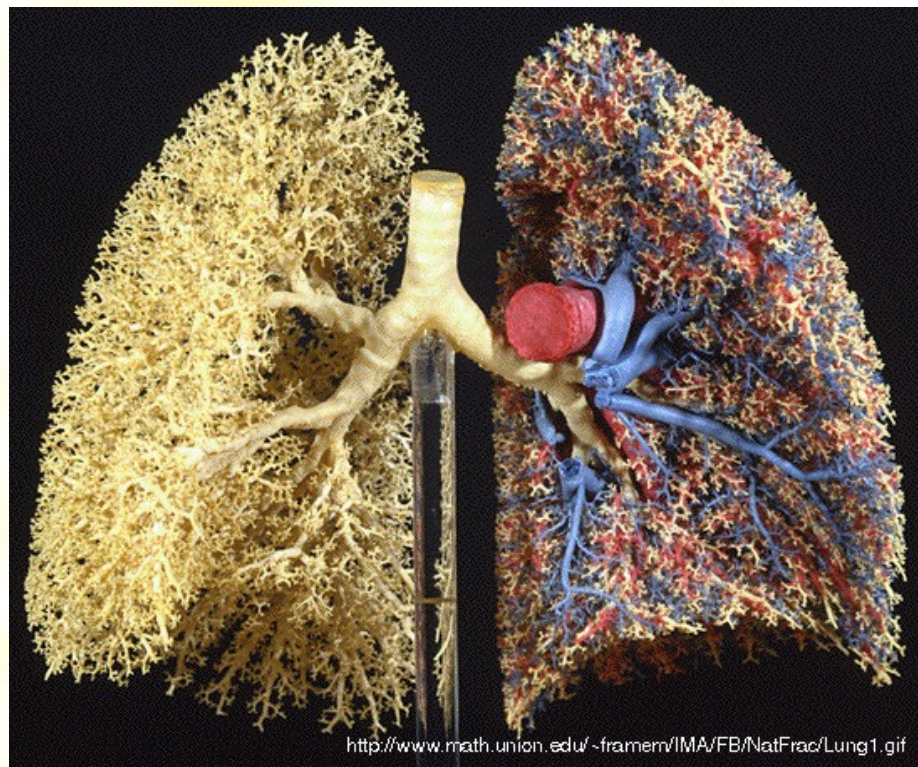
# Čo je fraktál?

- Existujú rôzne definície
- Objekt so samopodobnosťou
- Štatisticky invariantný ku škálovaniu (zmene mierky)
- Dimenzia fraktálu
- Popis pomocou rekuzívneho algoritmu
- Z latinského *fractus* = nepravidelný/fragmentovaný
- Procedurálne modelovanie je niekedy spájané iba s fraktálmi

# Fraktály v přírode



# Fraktály v nás



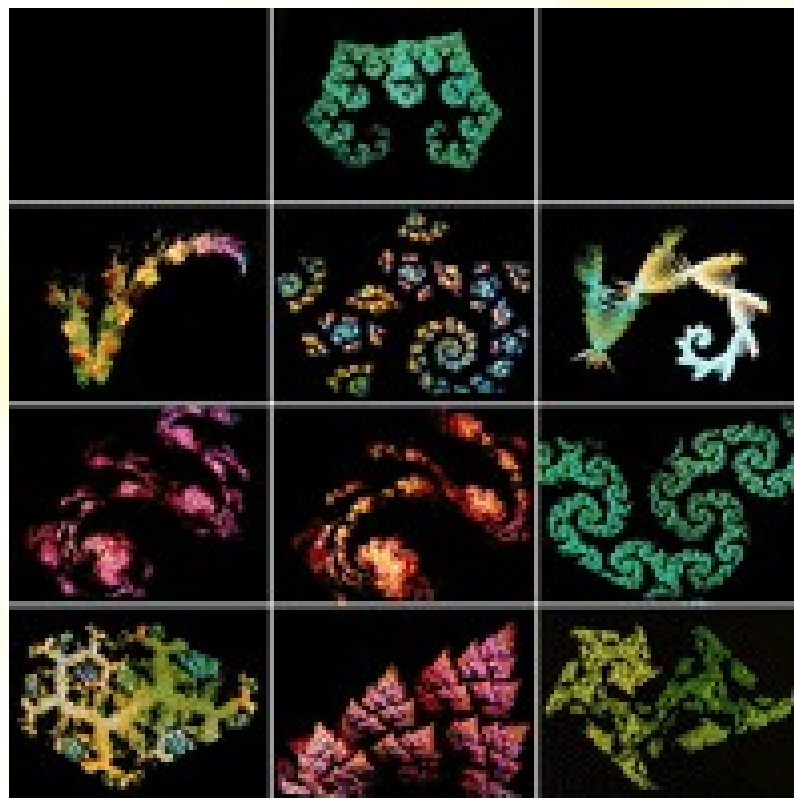
# Fraktály v rastlinách



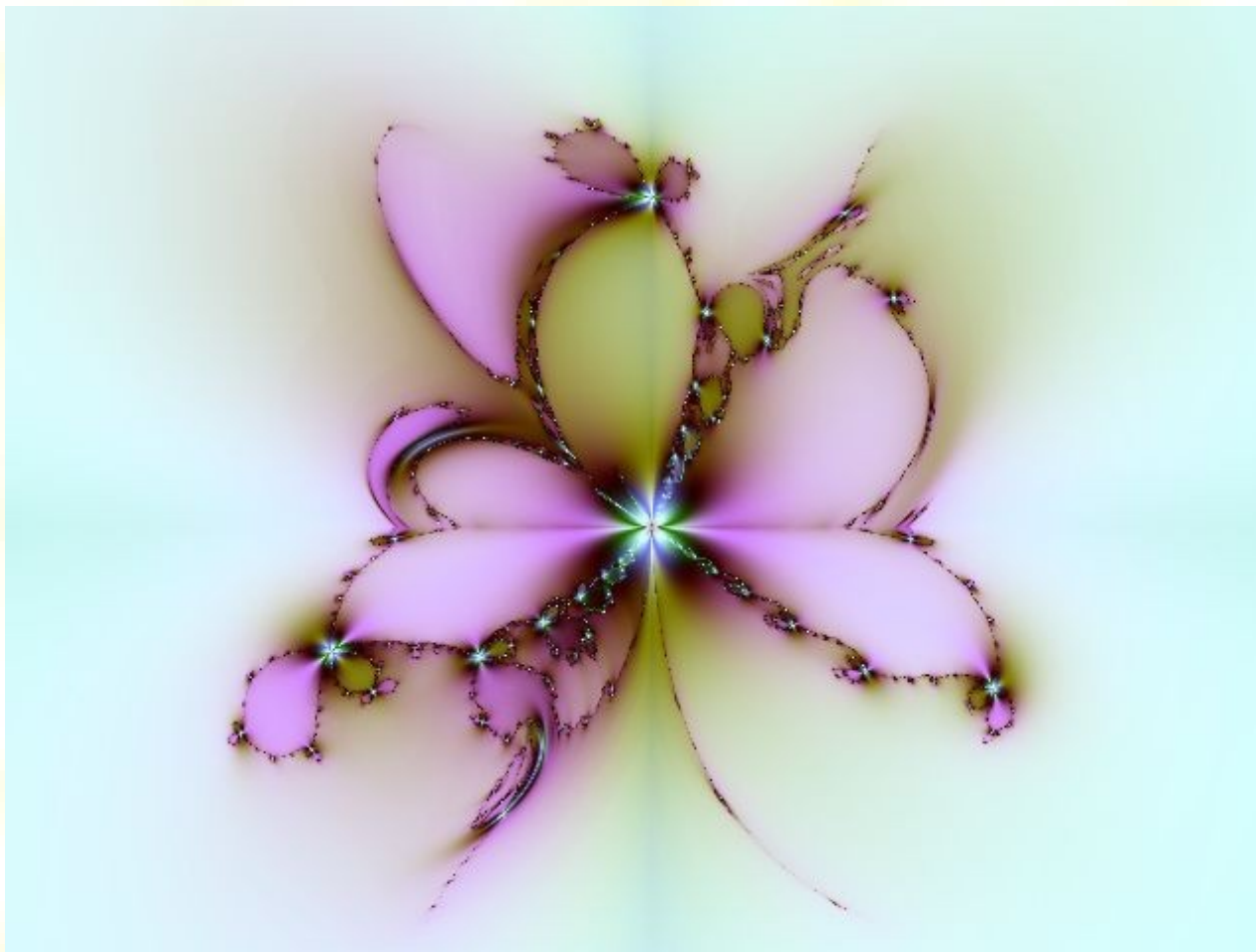
# Fraktály na oblohe



# Umelé fraktálne tvary

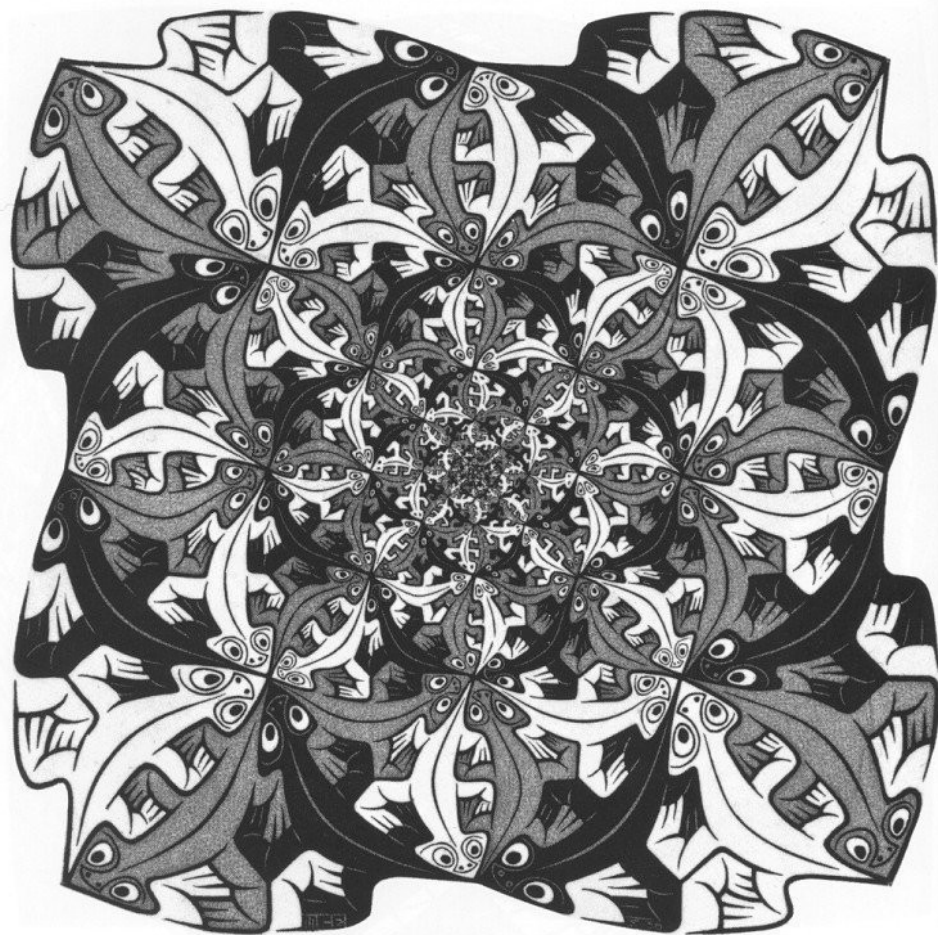


# Pekné fraktálne obrázky





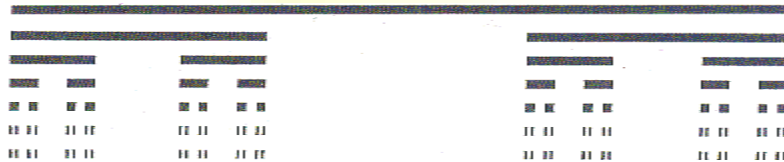
# Fraktálne vzorky



M. C. Escher: Smaller and Smaller

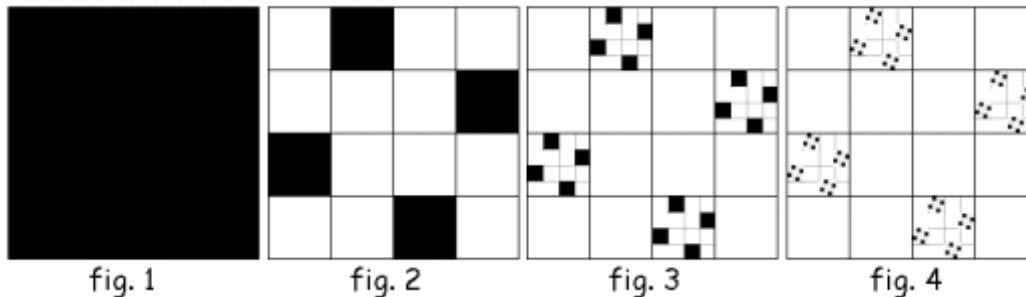
# 1883: Kantorova množina

- Kantorova množina v 1D:
  - Kantorovo discontinuum
  - ohraničená, nespojitá a nespočítateľná množina



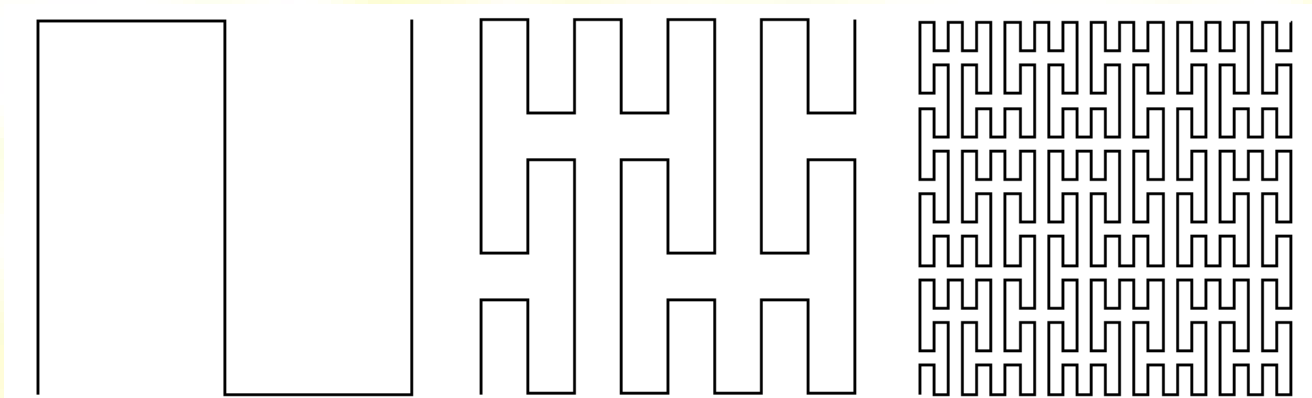
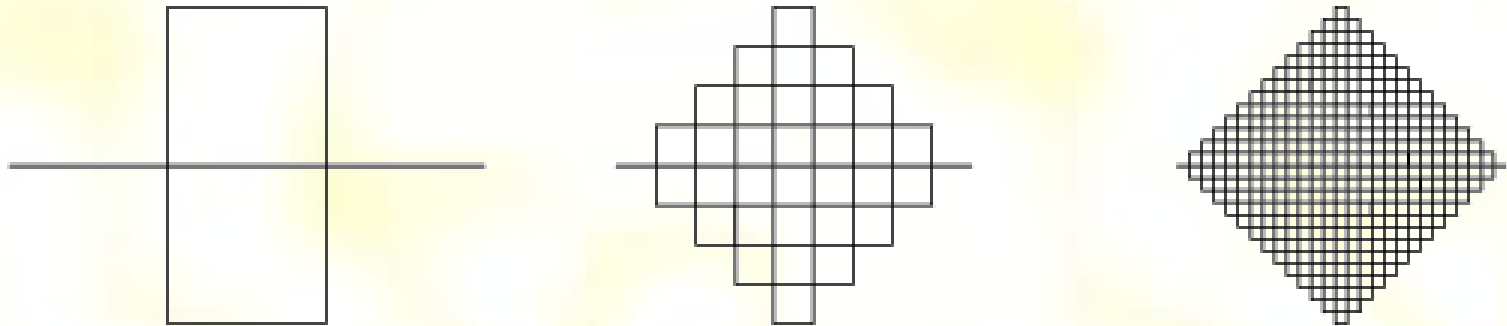
Georg Cantor

- 2D: Kantorov prach

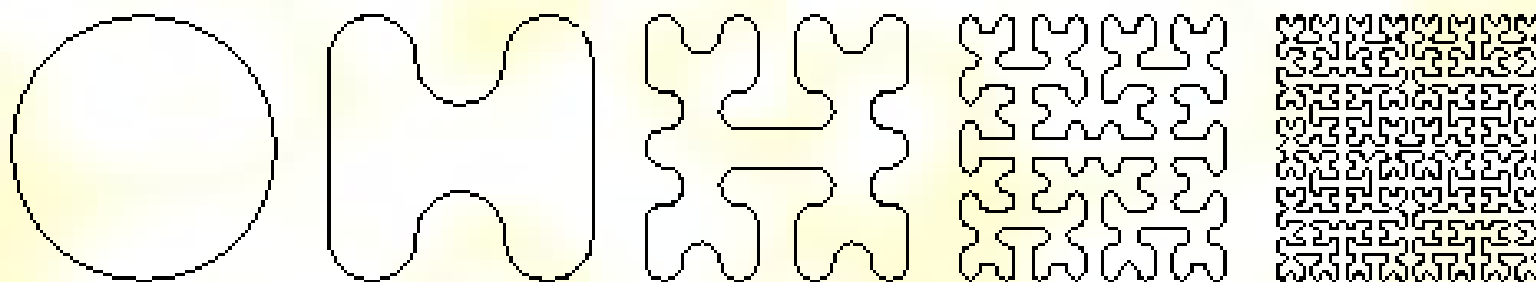
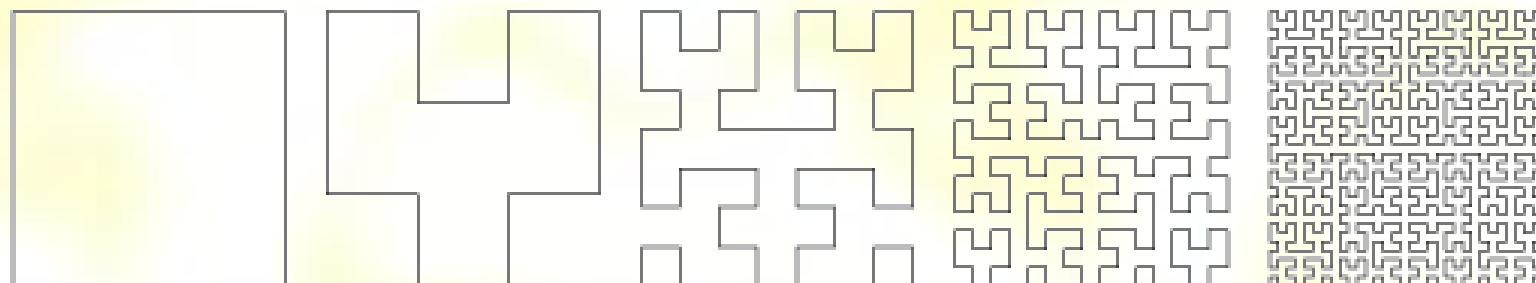


# 1890: Peanova krivka

- Z niekoľko čiar sa stáva krivka vypĺňajúca priestor



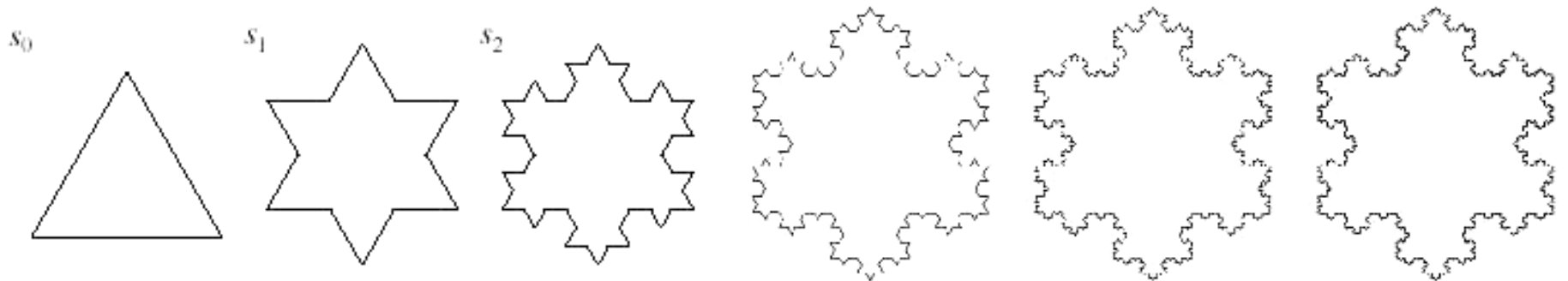
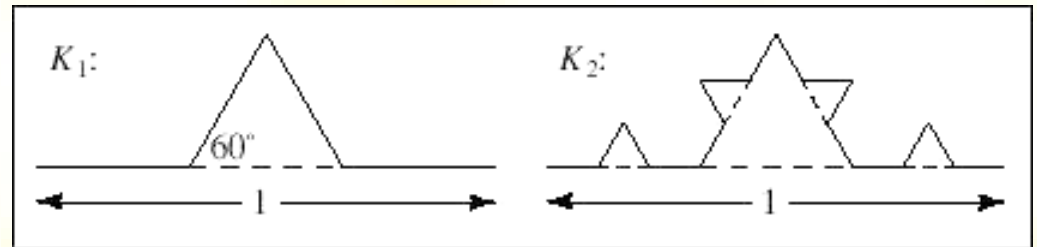
# 1891: Hilbertova krivka



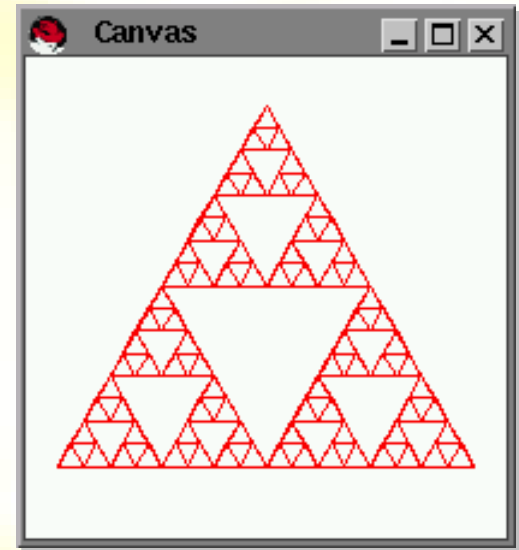
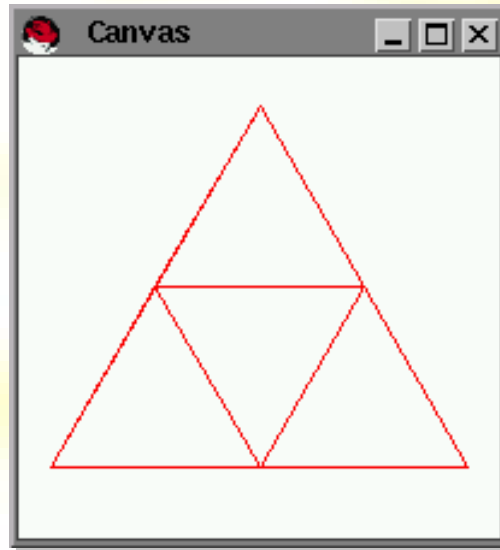
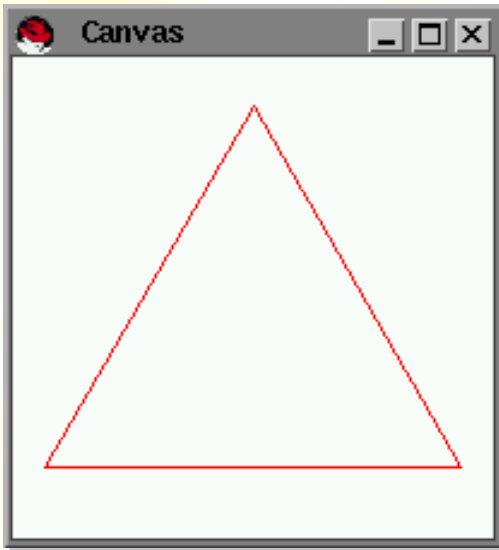
# 1904: Kochova vločka



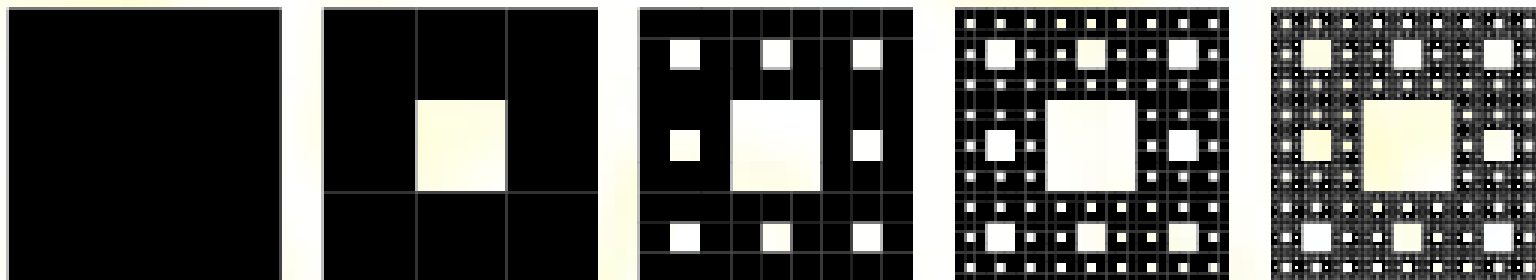
Helge von Koch



# 1916: Sierpinskeho trojuholník



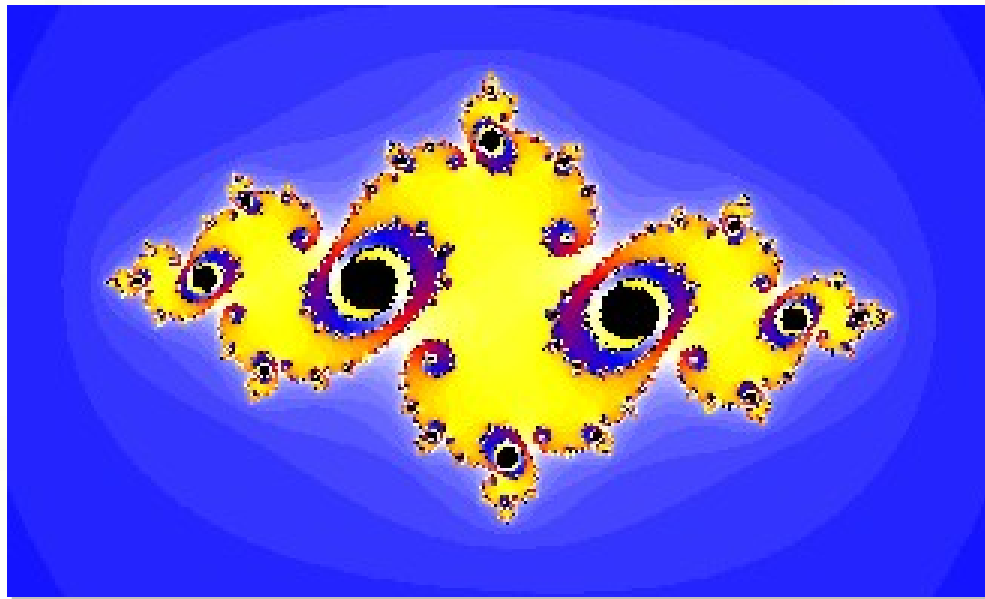
# Analógia: Sierpinskeho Koberec



„odstráň stredný štvorec“

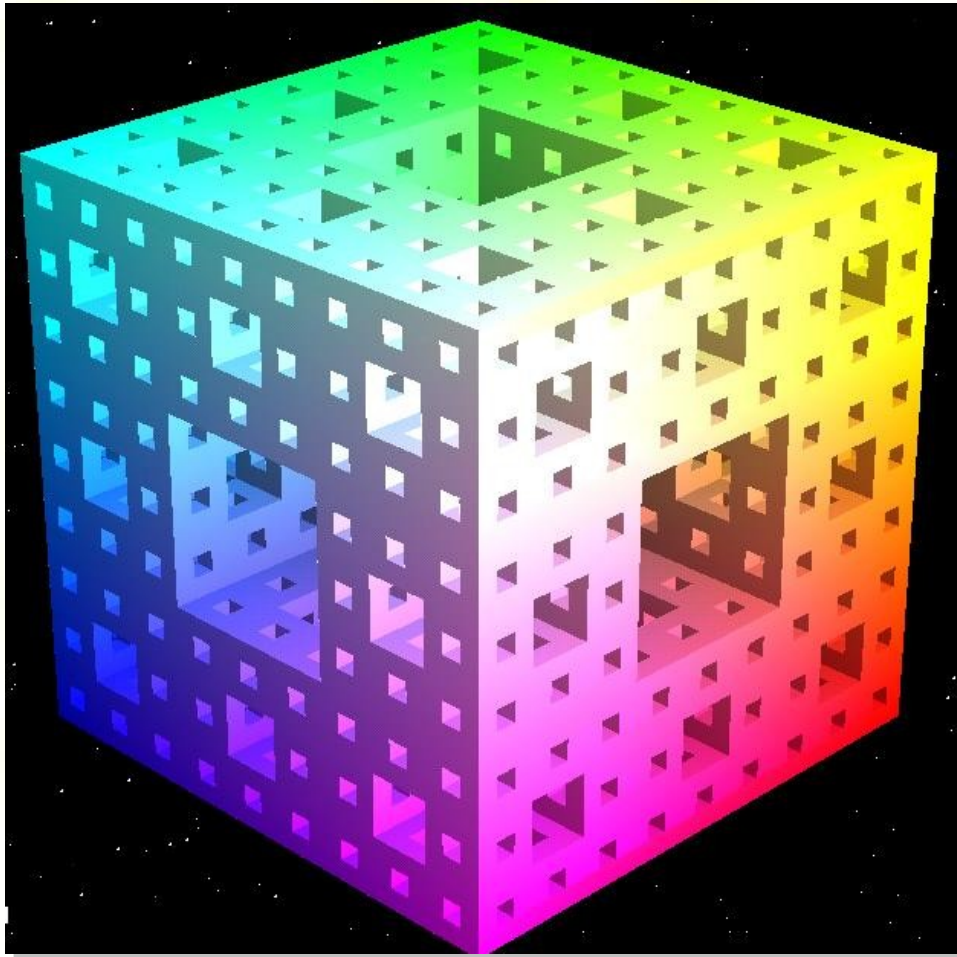
# 1918: Juliova množina

- Prvý fraktál v komplexnej rovine
- V pôvodnom úmysle nešlo o vizualizáciu, ale matematickú teóriu



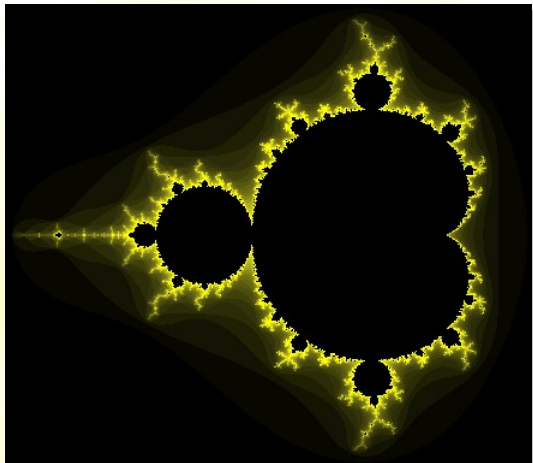


# 1926: Mengerova huba



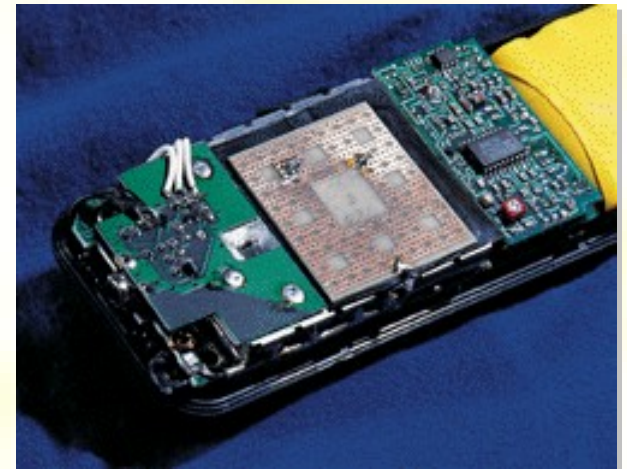
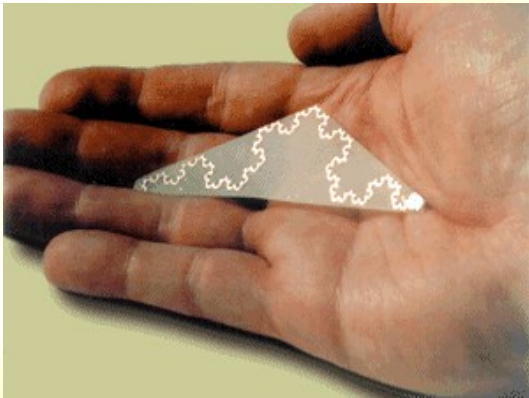
# 1975: História

- Benoit Mandelbrot: *Les objets fractals, forme, hasard et dimension*, 1975
- Formálna definícia fraktálu
- Legendárna Mandelbrotova množina



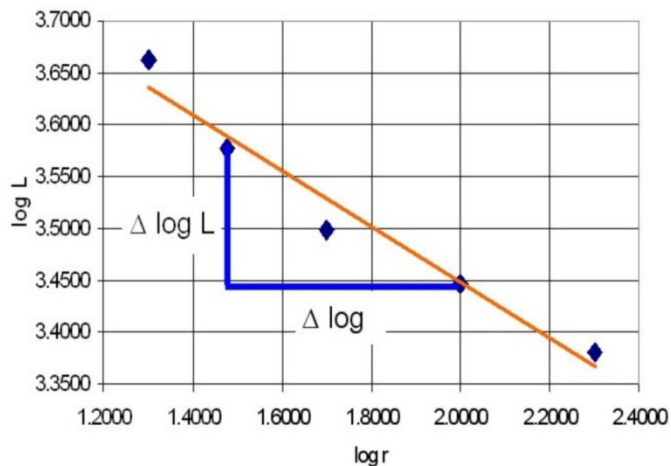
# 2003: Fraktály v technike

- Fraktálna kompresia obrazu / zvuku
- Fraktálna hudba
- Fraktálne antény
- ...



# Dĺžka pobrežia

- Čím väčšie priblíženie, tým väčšia dĺžka pobrežia
- Kde je limit?
- Pobrežie UK pri 30m detailoch: 143 000 km!

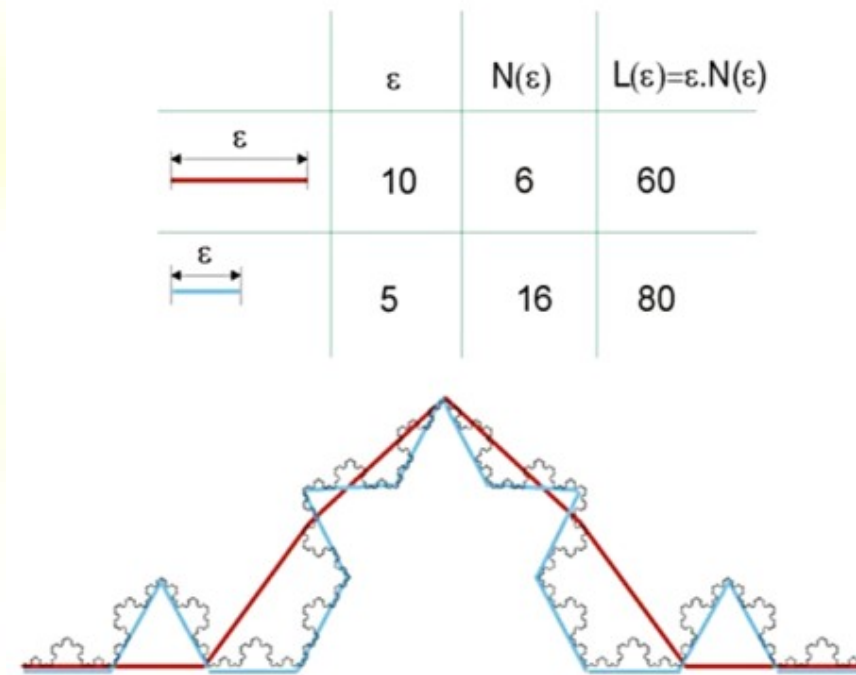


$r = 200$  km

$r = 50$  km

# Dĺžka fraktálnej krivky

- Dĺžka krivky rastie so zmenšovaním mierky použitej na meranie

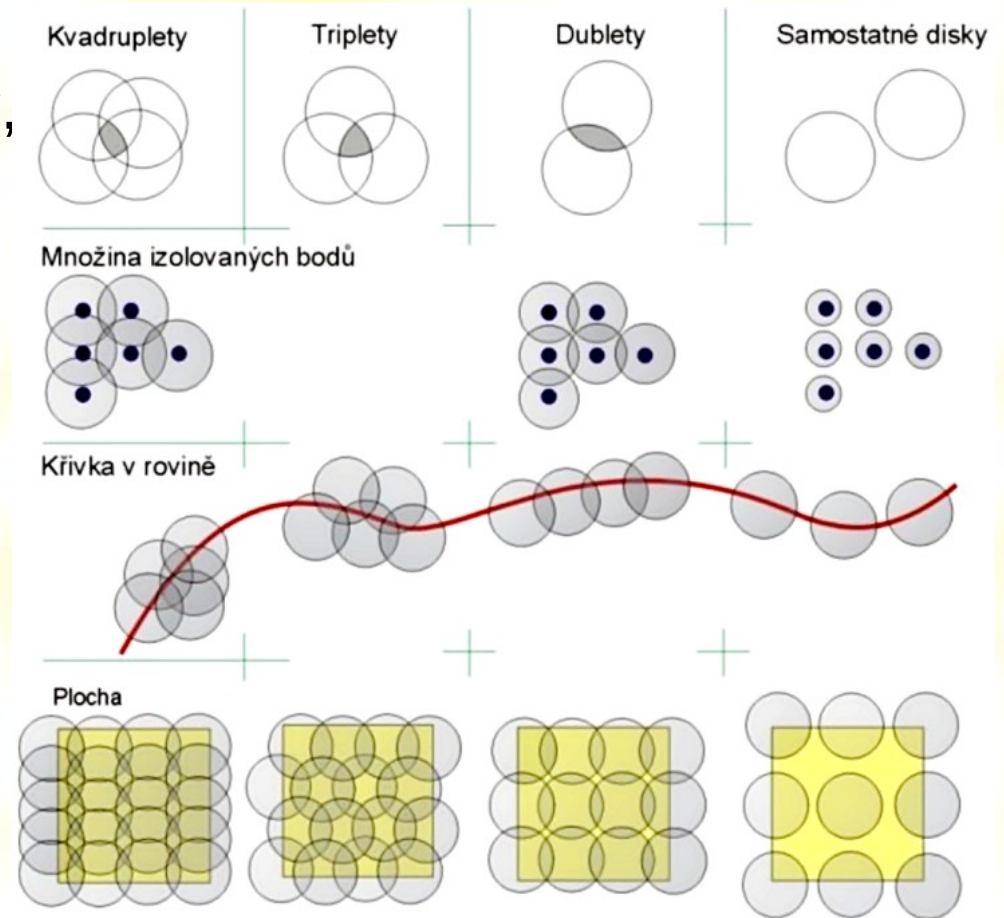


# Topologická dimenzia

- Definícia pomocou pokrývajúcich kruhov (2D), sfér (3D)

- Minimálny počet kruhov, ktoré pokryjú útvar – 1

- Dimenzia bodu je 0, krivky je 1 a plochy 2



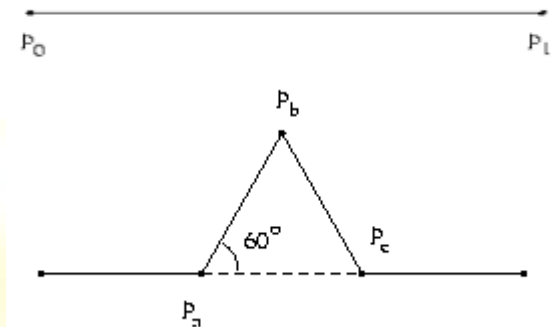
# Fraktálna dimenzia

- Existuje viac definícií (box, Hausdorff, ...)
- Dimenzia sebakodobnosti  $D_B$  (box):  
 $N$  = počet častí, na ktorý sa objekt rozdelí  
 $r$  = dĺžka pokrývajúceho útvaru

$1/r$  sa nazýva aj škálovací koeficient

$$\lim_{r \rightarrow 0} N(r) \cdot r^{D_B} = 1 \Rightarrow D_B = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log 1/r}$$

- Príklad Kochovej krivky:  
 $N = 4$ ,  $r = 1/3$   
Dimenzia =  $\log 4 / \log 3 = 1.26$



# Hurstov koeficient

- Pri použití rôznej sebakodobnosti v  $x$ -ovom a  $y$ -ovom smere sa určuje tzv. Hurstov koeficient:

$$H = \frac{\log(a)}{\log(b)}$$

$b$  – mierka sebakodobnosti v smere  $x$

$a$  – mierka sebakodobnosti v smere  $y$

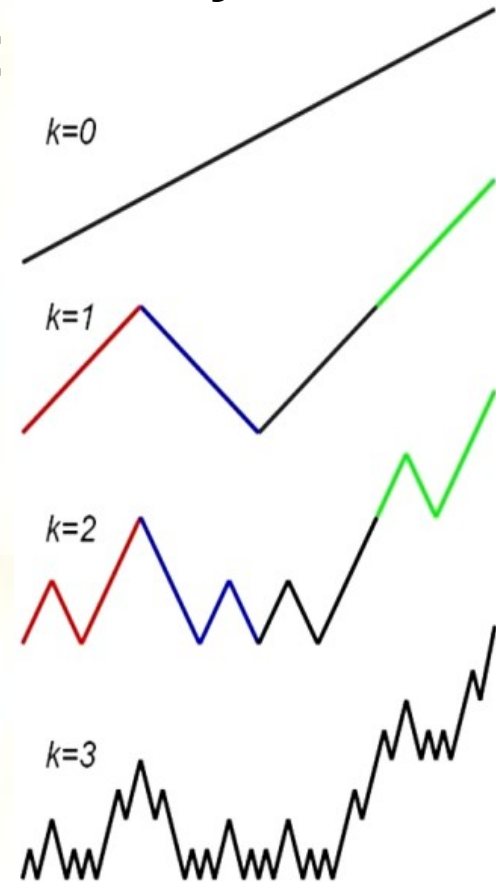
$x \rightarrow bx, y \rightarrow ay$

$$F(bx) = aF(x) \equiv b^H F(x)$$

- Dimenzia 2D fraktálu je potom určená:

$$D_B = 2 - H$$

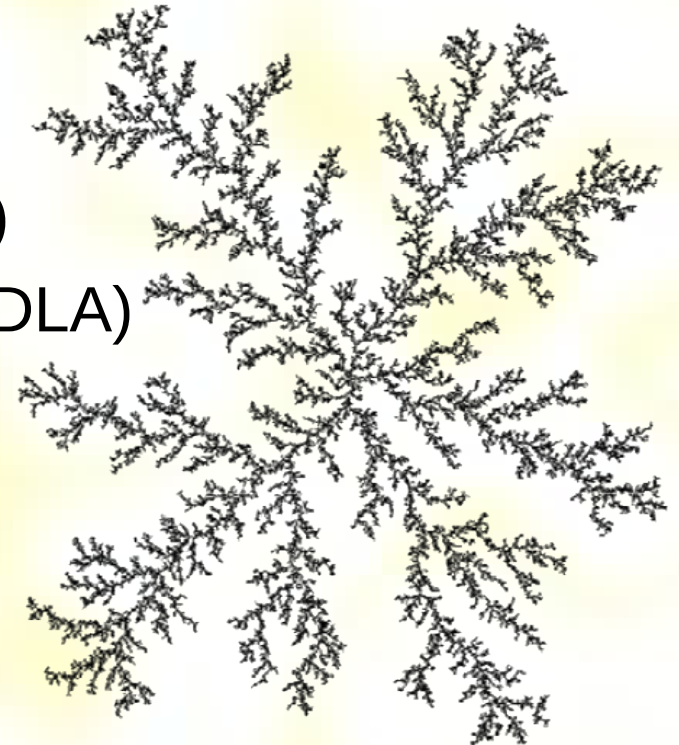
- $H = -1/2$  biely,  $0$  ružový,  $1/2$  fBm,  $H > 1/2$  čierny šum
- $H > 1/2$  korelovaný,  $H < 1/2$  antikorelovaný proces





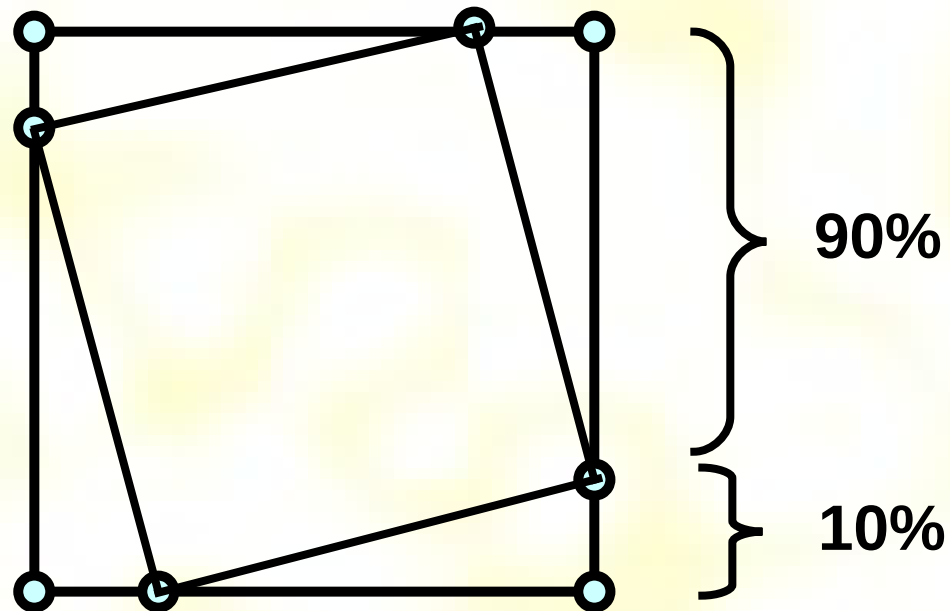
# Delenie fraktálov

- Deterministické fraktály
  - a) Lineárne (IFS, L-systémy,...)
  - b) Nelineárne (Mandelbrot množina, bifurkačné diagramy,...)
- Stochastické fraktály
  - Fraktálny Brownov pohyb (fBM)
  - Diffusion Limited Aggregation (DLA)
  - Biely šum
  - ...

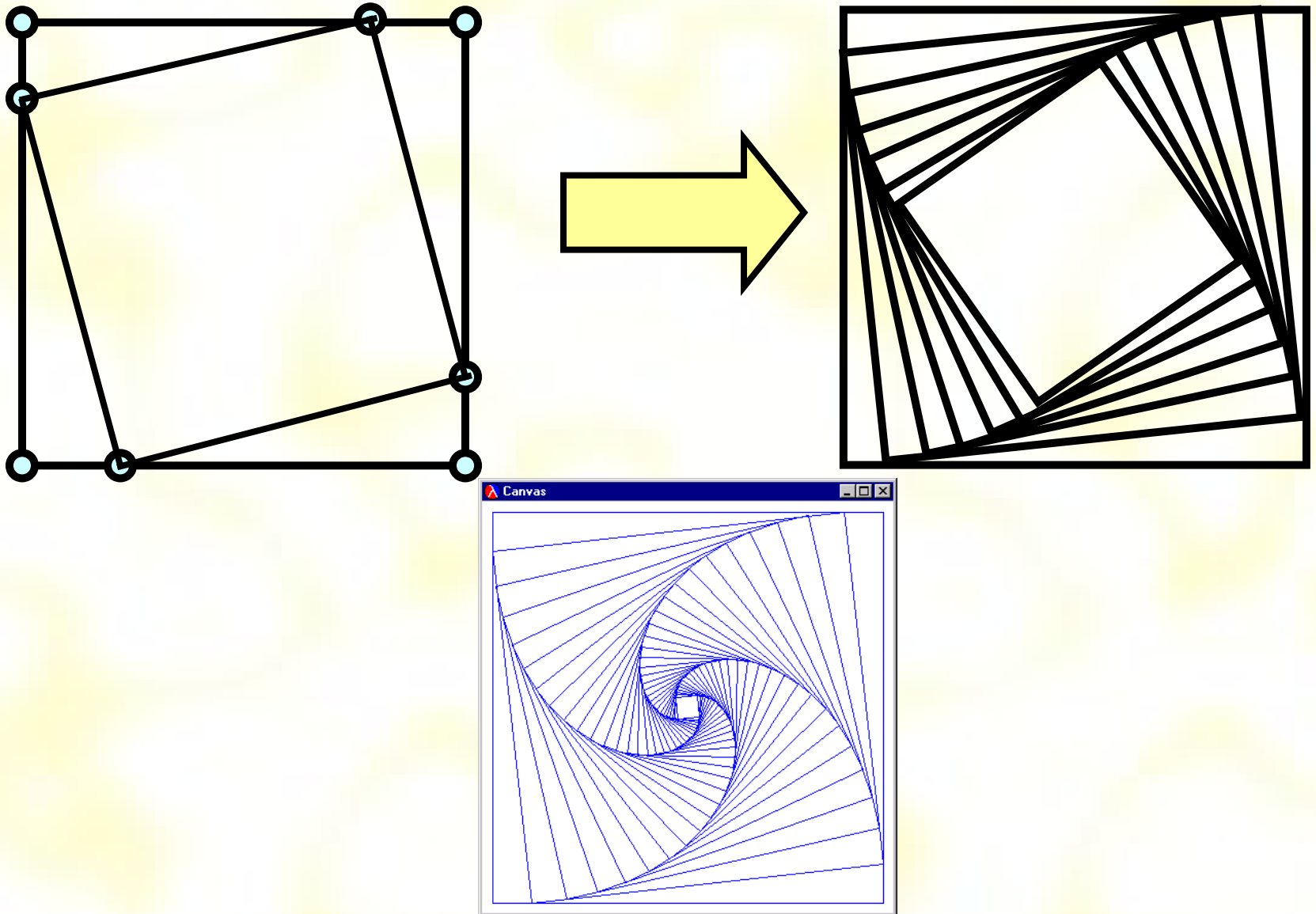


# Príklad: Deterministický fraktál

- Štvorec: rotuj, škáľuj, duplikuj

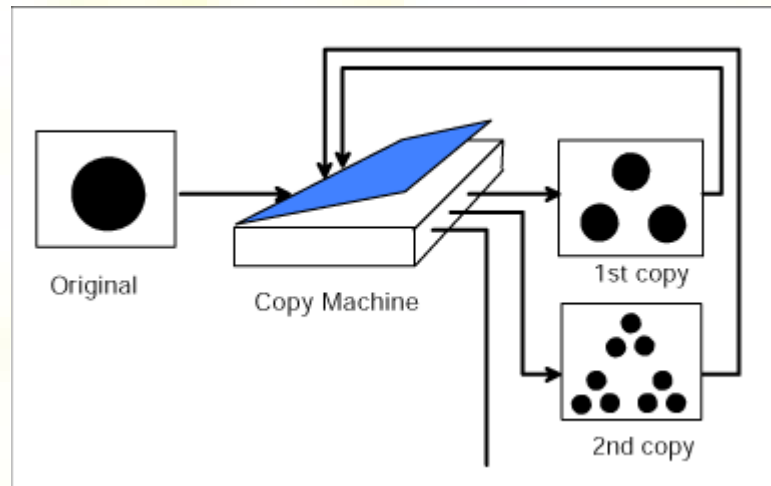


# Príklad: Deterministický fraktál

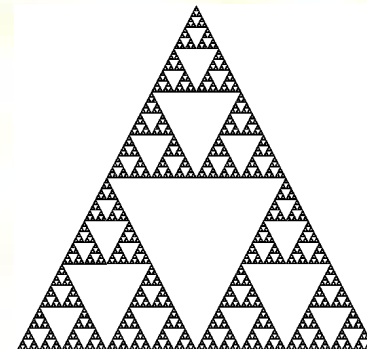
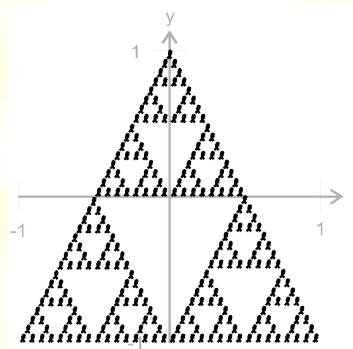
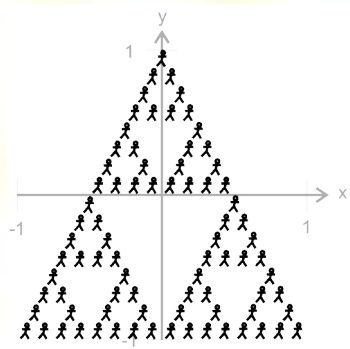
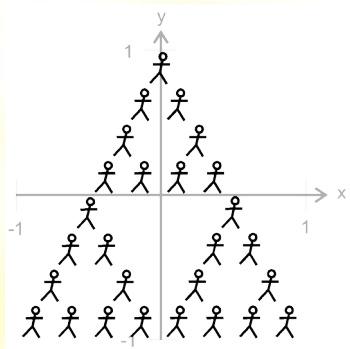
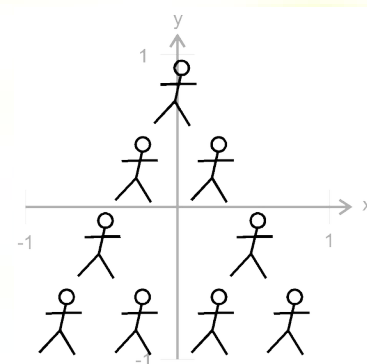
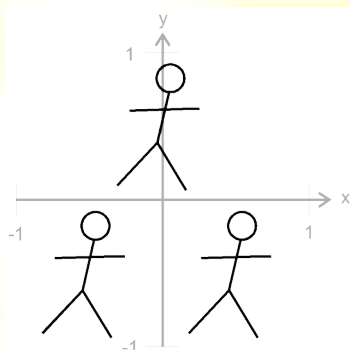
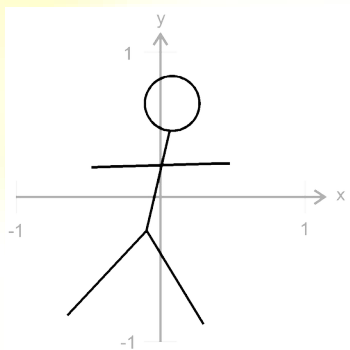


# Kontraktívne transformácie

- Fraktál – určený množinou kontraktívnych transformácií
- Atraktor systému je pevný bod, množina pevných bodov, množina oscilujúcich (kvázi)periodických bodov, „podivná“ (pravidelné aj chaotické body) množina, chaotická množina



# Príklad: Sierpinského trojuholník



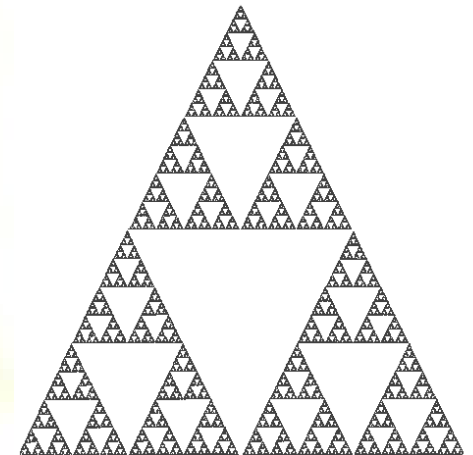
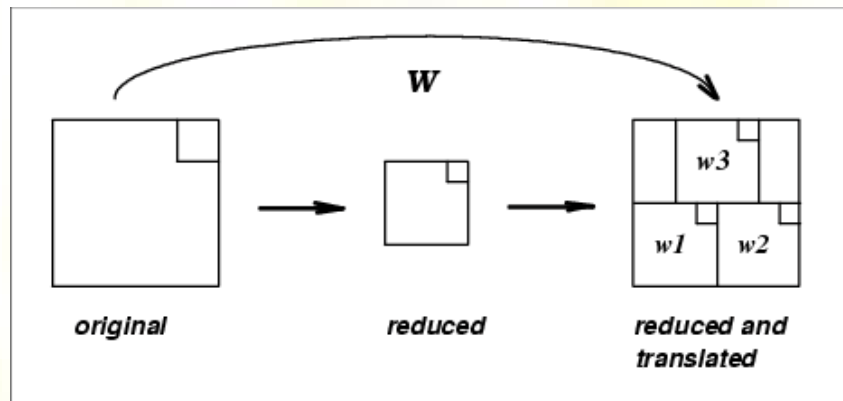
# System iterovaných funkcí - IFS

- IFS = množina afinných kontraktivních transformací  $W(*) = \bigcup_{i=1}^n w_i(*)$
- Iterovaný proces:
  - Prvá kópia  $f_1 = W(f_0)$
  - Druhá kópia  $f_2 = W(f_1) = W(W(f_0)) = W^{(2)}(f_0)$
  - Atraktor  $|W| \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} W^{(n)}(f_0)$
- Afinná transformácia:

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}$$

# Sierpinskeho trojuholník

$$w_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$w_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$w_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



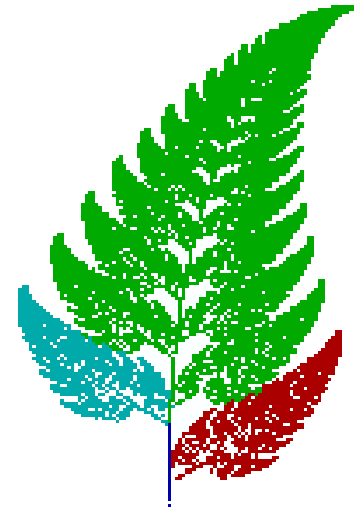
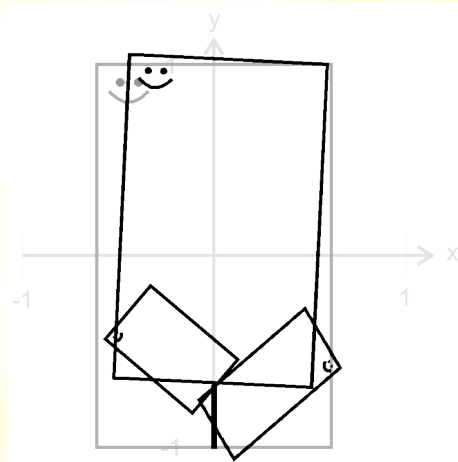
# Barnsleyova paprad'

$$w_1 = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.04 & 0.00 \\ -0.04 & 0.85 & 1.60 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \begin{bmatrix} 0.20 & -0.26 & 0.00 \\ 0.23 & 0.22 & 1.60 \end{bmatrix}$$

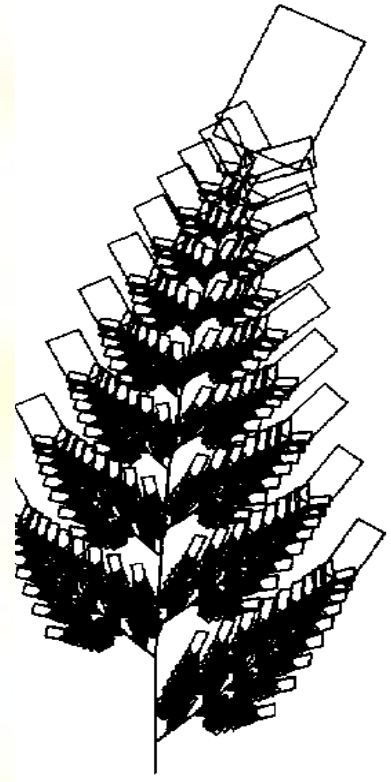
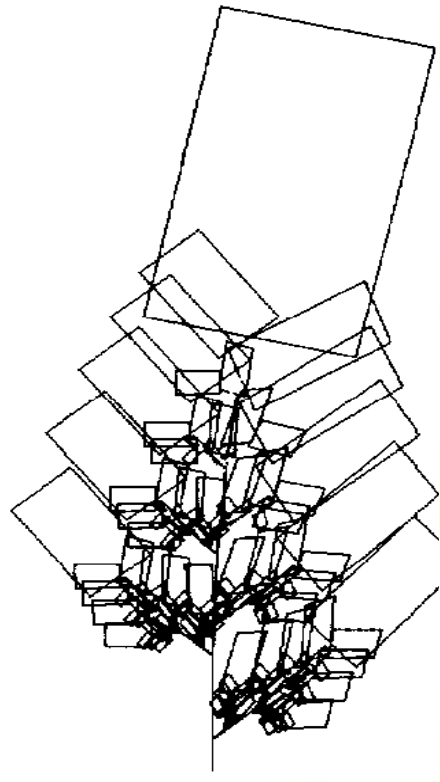
$$w_3 = \begin{bmatrix} -0.15 & 0.28 & 0.00 \\ 0.26 & 0.52 & 0.44 \end{bmatrix}$$

$$w_4 = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.16 & 0.00 \end{bmatrix}$$





# Barnsleyho paprad'

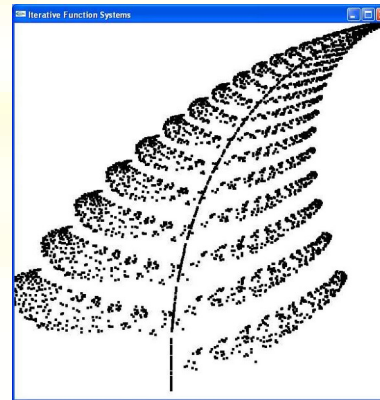
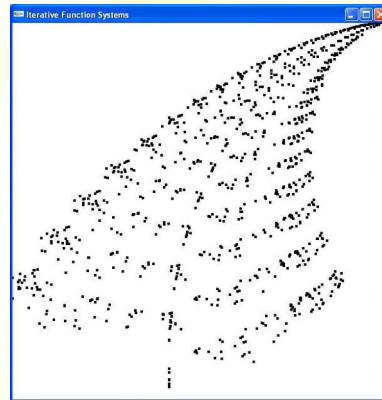


# Realita verzus fraktál

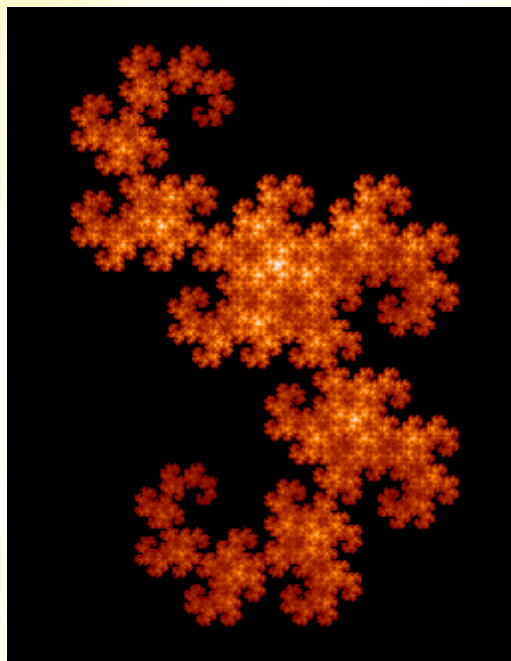


# IFS výpočet

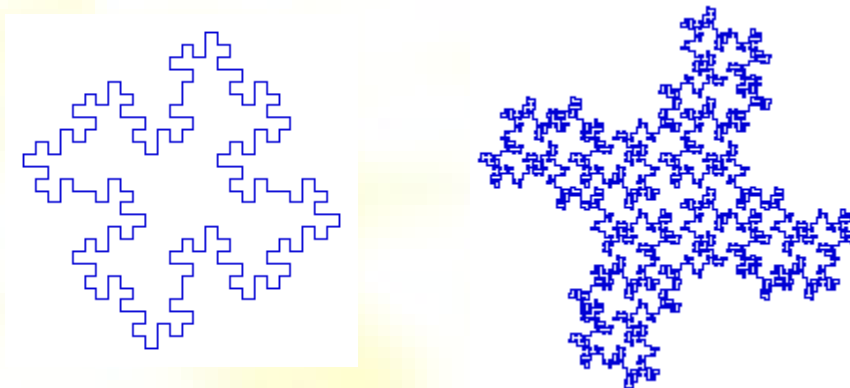
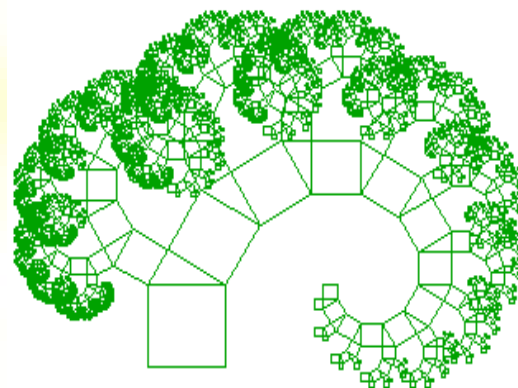
- Deterministický:
  - Aplikuj transformácie na objekt do nekonečna
- Stochastický:
  - Vyber náhodne transformáciu  $f_i$
  - Aplikuj transformáciu na objekt  $f_i$
  - Opakuj do nekonečna



# Príklady IFS



Dragon Curve



# Lorenzov podivný atraktor

- Meteorológ Edward Norton Lorenz, 1963
- IFS je vytvorený z jednoduchého modelu predpovede počasia, rovnice opisujúce prúdenie vzduchu
- Efekt motýlích krídel v dynamických systémoch = chaotické správanie, t.j. pre veľmi malé zmeny počiatočných hodnôt dostaneme rôzne výsledky

