

## II MONGEOVO ZOBRAZENIE

Zita Sklenáriková

### 1 Princíp zobrazenia. Obraz bodu

Základom *Mongeovej zobrazovacej metódy* je pravouhlé premietanie na dve navzájom kolmé roviny. Na úvod si vysvetlíme princíp zobrazenia. Tak, ako v kótovanom zobrazení, budeme niekedy potrebovať jednotné zadania úloh, ktoré zabezpečíme vhodnou voľbou bázy ortonormálnej súradnicovej sústavy. Preto si ľubovoľné dve navzájom kolmé roviny, ktoré si zvolíme za priemetne, označíme  $\pi, \nu$  (tieto budú i súradnicovými rovinami); analogicky ich priesečnicu budeme označovať  $x$  (súradnicová os).

**Definícia 1.1** Nech  $\pi, \nu$  ( $\nu \perp \pi$ ) sú ľubovoľné roviny priestoru  $E_3$ . Rovinu  $\pi$ , resp.  $\nu$  budeme nazývať *prvá priemetňa*, resp. *druhá priemetňa*.<sup>1</sup> Kolmý priemet ľubovoľného bodu  $A \in E_3$  do roviny  $\pi$ , resp.  $\nu$  sa nazýva *prvý*, resp. *druhý priemet bodu A* a označovať sa bude  $\bar{A}$ , resp.  $A'$ . Kolmo premietacia priamka bodu  $A$  vzhľadom na priemetňu  $\pi$ , resp. vzhľadom na priemetňu  $\nu$  sa nazýva *prvá*, resp. *druhá premietacia priamka bodu A* (označenie  $\bar{l}^A$ , resp.  ${}^A l'$ ). (Obr. 1)

*Poznámka 1.1*

Na základe definície platí:  $\bar{A} = \bar{l}^A \cap \pi$  ( $A \in \bar{l}^A \wedge \bar{l}^A \perp \pi$ ),  $A' = {}^A l' \cap \nu$  ( $A \in {}^A l' \wedge {}^A l' \perp \nu$ ). Pre každý bod  $X$  priamky  $x = \pi \cap \nu$  je  $X = \bar{X} = X'$ , čo budeme vyjadrovať i zápisom  $x = \bar{x} = x'$ .

Ak bod  $A$  neleží v žiadnej z priemetní, rovina  $\lambda^A = \leftrightarrow A\bar{A}A'$  je kolmá na priamku  $x$ ; označme  $A^x$  jej priesečník s priamkou  $x$ . Odtiaľ vyplýva, že i spojnica  $\bar{A}A'$  je kolmá na os  $x$ .<sup>2</sup> Posledný vzťah platí i pre ľubovoľný bod  $B$  ( $B \in \pi \wedge B \notin \nu$ ) a bod  $C$  ( $C \in \nu \wedge C \notin \pi$ ). Pre bod  $D \in x = \pi \cap \nu$  je  $D = \bar{D} = D'$ .

Označme  $f$  zobrazenie, ktoré každému bodu  $M \in E_3$  priradí usporiadanú dvojicu bodov  $(\bar{M}, M')$  (s významom uvedeným vyššie), pre ktoré platí:  $\bar{M}M' \perp x \vee \bar{M} = M'$ :

$$f: E_3 \rightarrow \pi \times \nu, \text{ pričom } f: M \mapsto (\bar{M}, M') \wedge (\bar{M}M' \perp x \vee \bar{M} = M')$$

Zobrazenie  $f$  je bijektívne bodové zobrazenie, ktoré každému bodu  $M$  priestoru priradí usporiadanú dvojicu  $(\bar{M}$  – prvý priemet bodu  $M$ ,  $M'$  – druhý priemet bodu  $M$ ), pričom spojnica týchto bodov je kolmá na priesečnicu priemetní alebo  $\bar{M} = M' = M$ .<sup>3</sup> Toto zobrazenie ešte nie je zobrazovacou metódou. Ako už vieme, zobrazovacia metóda zobrazuje body priestoru na určité útvary jednej roviny, tzv. nákresne. Teda utvorené dvojice bodov musíme ešte – nejakým jednoduchým spôsobom – zobraziť do ľubovoľne zvolenej roviny, ktorá bude nákresňou. Najjednoduchšiu predstavu o konštrukcii obrazov dvojíc bodov  $(\bar{M}, M')$  si utvoríme voľbou nákresne v jednej z priemetní  $\pi, \nu$ . Najprv si uvedieme potrebné pojmy.

Analogicky ako v kótovanom zobrazení orientujme oba polpriestory s hranicou v rovine  $\pi$ , a oba polpriestory s hranicou v rovine  $\nu$ . Priestor  $E_3$  sa takto rozdelí rovinami  $\pi, \nu$  na štyri

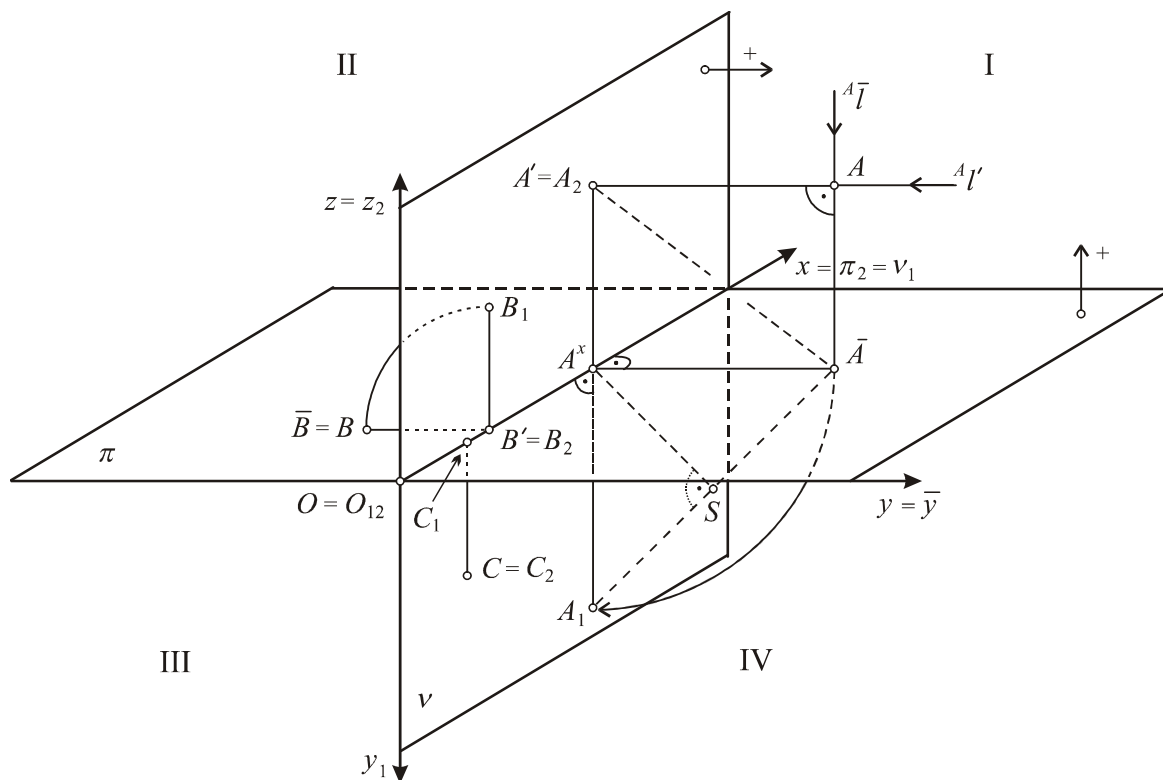
<sup>1</sup> V technickej praxi sa rovina  $\pi$ , resp.  $\nu$  nazýva pôdorysňou, resp. nárysňou.

<sup>2</sup> Útvary  $A\bar{A}A^x A'$  je totiž pravouholníkom a  $A^x \bar{A} \perp x \wedge A^x A' \perp x$ .

<sup>3</sup> Dôkaz, že usporiadanou dvojicou bodov požadovanej vlastnosti je určený práve jeden bod priestoru sa necháva čitateľovi. Tvrdenie:  $M \neq K \Rightarrow (\bar{M}, M') \neq (\bar{K}, K')$  je triviálne.

oblasti; do tej istej oblasti patria body, pre ktoré má ich orientovaná vzdialenosť od roviny  $\pi$  to isté znamienko, čo platí analogicky pre orientované vzdialenosti bodov od roviny  $\nu$ . Označme tieto oblasti: I = (+, +), II = (+, -), III = (-, -), IV = (-, +) (prvé, resp. druhé znamienko v dvojici je znamienko orientovanej vzdialenosti ľubovoľného bodu oblasti od priemetne  $\pi$ , resp.  $\nu$ ). (Obr. 1)

**Definícia 1.2** *Kladnou polrovinou roviny  $\pi$ , resp. roviny  $\nu$  budeme nazývať tú z oboch polrovín tejto roviny, ktorá je incidentná s príslušným kladným, resp. záporným polpriestorom s hranicou v rovine  $\nu$ , resp. s hranicou v rovine  $\pi$ . Záporná polovina každej z rovín je, prirodzene, opačnou polrovinou ku kladnej polrovine príslušnej roviny.*



Obr. 1

Zvoľme si za nákresňu rovinu  $\nu$ . Obrazy druhých priemetov bodov stotožníme s druhými priemetmi bodov a budeme ich nazývať *nárysy bodov* a označovať pravým dolným indexom „2“. Teda pre každý bod  $A \in E_3$  je  $A_2 = A'$ . Obrazy prvých priemetov bodov nech sú otočené polohy prvých priemetov v takom otočení roviny  $\pi$  do roviny  $\nu$ , v ktorom sa kladná polovina roviny  $\pi$  otočí do zápornej polroviny roviny  $\nu$ . Takto získané otočené polohy bodov budeme nazývať *pôdorysy bodov* a budeme ich označovať pravým dolným indexom „1“. Teda bod  $A_1$  je otočenou polohou bodu  $\bar{A}$  v spomenutom otočení roviny  $\pi$  do nákresne. Otáčanie jednej roviny do druhej je perspektívnou afinitou medzi oboma rovinami [4], a táto je rovnobežným premietaním (osnova premietacích priamok je kolmá na jednu z rovín súmernosti týchto rovín) (otáčanie jednej roviny do druhej je známe z kótovaného zobrazenia) ([5]). V prípade spomenutej voľby otočenia roviny  $\pi$  do nákresne  $\nu$  je osnova premietacích priamok kolmá na tú z rovín súmernosti priemetní, ktorá prechádza oblasťami II, IV (označenými vyššie).

Môžeme vysloviť:

**Veta 1.1** Zobrazenie  $g$  množiny všetkých bodov priestoru na usporiadané dvojice bodov (pôdorys bodu, nárys bodu) tak, že pre každý bod  $A$  platí:  $A_1A_2 \perp x$  alebo  $A_1 = A_2$ , t. j. zobrazenie:

$$g: E_3 \rightarrow v \times v, g: A \mapsto (A_1, A_2) \wedge (A_1A_2 \perp x_{12} \vee A_1 = A_2)^4$$

je bijekcia.

Zobrazenie  $g$  je teda zobrazovacou metódou.

**Definícia 1.3** Zobrazovacia metóda  $g$  sa nazýva *Mongeovou metódou* alebo *Mongeovým zobrazením*. Priamka  $A_1A_2$  (ak  $A_1 \neq A_2$ ) sa nazýva *ordinála bodu  $A$*  a priamka  $x_{12}$  je *základnica* daného zobrazenia.

*Poznámka 1.2*

a) Analogicky s kótovaným zobrazením budeme predpokladať (vzhľadom na obmedzené rozmery nákresne), že zobrazované útvary boli už pred zobrazením podrobené vhodnej podobnostnej transformácii.

b) Bázu ortonormálnej súradnicovej sústavy si budeme voliť tak, aby priamka  $x$  bola nositeľkou súradnicovej osi  $x$  pri ľubovoľnej voľbe začiatku sústavy súradníc  $O \in x$  a kladnej polpriamky súradnicovej osi  $x$  a aby kladná polpriamka súradnicovej osi  $y$  ( $y \subset \pi$ ), resp.  $z$  ( $z \subset v$ ) ležala v príslušnom kladnom polpriestore s hranicou  $v$  priemetni  $v$ , resp. s hranicou  $v$  priemetni  $\pi$ . (Obr. 1)<sup>5</sup>

c) Historický názov Mongeovej metódy je aj „pravouhlé premietanie na dve združené priemetne“, čo nezodpovedá skutočnosti, lebo priemetňa  $\pi$  sa otočila do priemetne  $v$  („združila s priemetňou  $v$ “) až po vykonaní pravouhlého premietania. Napriek tomu budeme dvojicu bodov  $(A_1, A_2)$  nazývať aj *združené priemety* bodu  $A$  a analogicky budeme hovoriť o *združených priemetoch* ľubovoľného útvaru  $U$ .

d) V technickej praxi sa stotožňujú i názvy kolmých priemetov bodov do rovín  $\pi$ , resp.  $v$  s názvami ich obrazov: pôdorys bodu = prvý priemet bodu, resp. nárys bodu = druhý priemet bodu, dokonca majú aj zhodné označenia. Pretože pri dokazovaní vlastností obrazov útvarov sa budeme musieť často vracieť k originálom alebo ich kolmým priemetom do priemetní, budeme ďalej dodržiavať dohodnuté označenia, aby sme predišli možným nedorozumeniam.

**Definícia 1.4** Rovina súmernosti priemetní, ktorá prechádza oblasťami I a III, resp. II a IV sa nazýva *rovina súmernosti* (označenie  $\sigma$ ), resp. *rovina totožnosti* (označenie  $\tau$ ). (Obr. 2)

Na obrázku 2 index „3“ je index pravouhlých priemetov objektov do roviny kolmej na súradnicovú os  $x$ . To znamená, že priemety všetkých rovín  $\pi, v, \sigma, \tau$ , ktoré obsahujú os  $x$  sú priamky.

*Dôsledok 1.1*

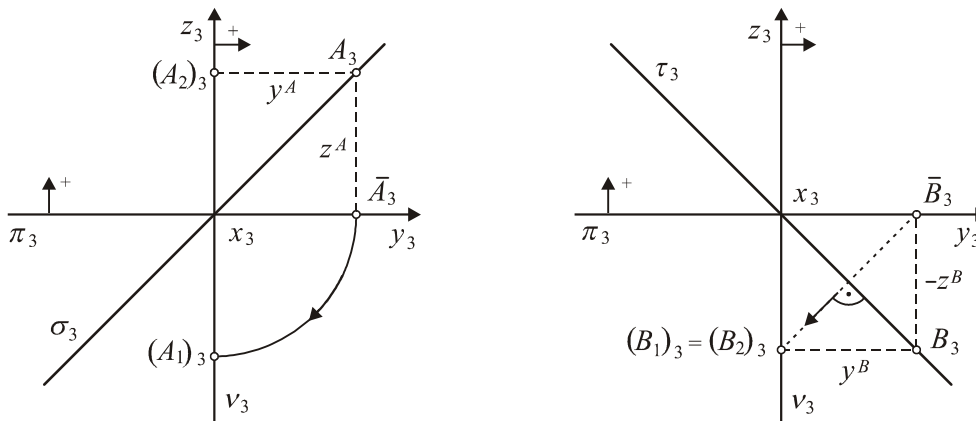
a) Bod  $M = (M_1, M_2)$  leží v rovine súmernosti, resp. v rovine totožnosti práve vtedy, keď sú jeho pôdorys a nárys súmerne združené podľa základnice, resp. keď sú body  $M_1, M_2$  totožné (t. j.  $M_1 = M_2$ ).<sup>6</sup>

b) Pôdorysy bodov/útvarov (pri dohodnutej voľbe nákresne  $v$ ) sú rovnobežné priemety do roviny  $v$  prvých priemetov bodov/útvarov. Osнова tohto premietania je kolmá na rovinu totožnosti.<sup>7</sup> (Obr. 1, 2)

<sup>4</sup> Pretože pre každý bod  $X \in x$  platí  $x_1 = x_2$ , budeme obraz priamky  $x$  nákresne označovať  $x_{12}$ . (Pozor: bod  $M$ , pre ktorý platí  $M_1 = M_2$ , nemusí ležať na priesečníci priemetní.)

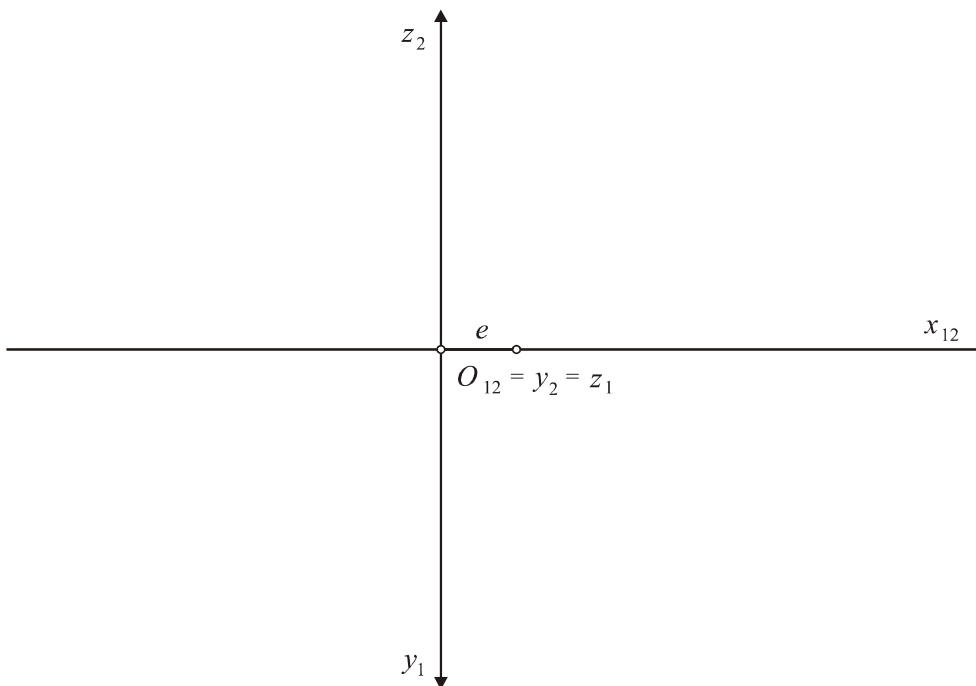
<sup>5</sup> Orientovaná vzdialenosť bodu od priemetne  $\pi$ , resp.  $v$  sa bude potom rovnať súradnici  $z$ , resp. súradnici  $y$  daného bodu. (Pojem orientovanej vzdialenosti bodu od roviny je známy z kótovaného zobrazenia. ([5]))

<sup>6</sup> Dokážte.



Obr. 2

**Úloha 1.1** V Mongeovej metóde (s jednotkovou úsečkou  $e$  dĺžky 1cm) zobrazte body:  $A(-3j, 2j, 3j)$ ,  $B(0, 4j, 4j)$ ,  $C(-j, -3j, j)$ ,  $D(j, -2j, 2j)$ ,  $E(3j, -3j, -2j)$ ,  $F(4j, 0, 2j)$ ,  $G(5j, 2j, -3,5j)$ ,  $K(-5j, 0, 0)$ ,  $H(6j, -3j, 0)$ . Určite oblasť, v ktorej leží každý z nich. Vymodelujte si polohu bodov v priestore. Leží niektorý z bodov v rovine súmernosti alebo v rovine totožnosti? (Úlohu riešte na obrázku 3. Kladné polpriamky súradnicových osí sú označené „šípkou“.)



Obr. 3

<sup>7</sup> Priamka  $\bar{A}A_1$  leží v rovine  $\lambda^A$  určenej prvou a druhou premietacou priamkou bodu  $A$ , t. j. je kolmá na priamku  $x$ . Trojuholník  $\bar{A}A^xA_1$  je rovnoramenný a uhol priemetní  $\pi$ ,  $\nu$  je zhodný s uhlom  $\angle \bar{A}A^xA_1$ . ([1]) Odtiaľ vyplýva, že stred  $S$  prepony trojuholníka  $\bar{A}A^xA_1$  leží v rovine totožnosti a priamka  $\bar{A}A_1$  je kolmá i na priamku  $SA^x$ . Záver: priamka  $\bar{A}A_1$  je kolmá na rovinu totožnosti ( $\tau = \leftrightarrow Sx$ ). (Obr. 1)

## 2 Obraz priamky a roviny

Pripomeňme si, že pod obrazom geometrického útvaru  $U$  euklidovského priestoru v nejakom zobrazení rozumieme množinu obrazov všetkých bodov útvaru  $U$ . V Mongeovom zobrazení bude obrazom útvaru  $U$  množina usporiadaných dvojíc bodov  $(M_1, M_2)$  (s významom uvedeným v kapitole 1) pre všetky body  $M$  tohto útvaru.

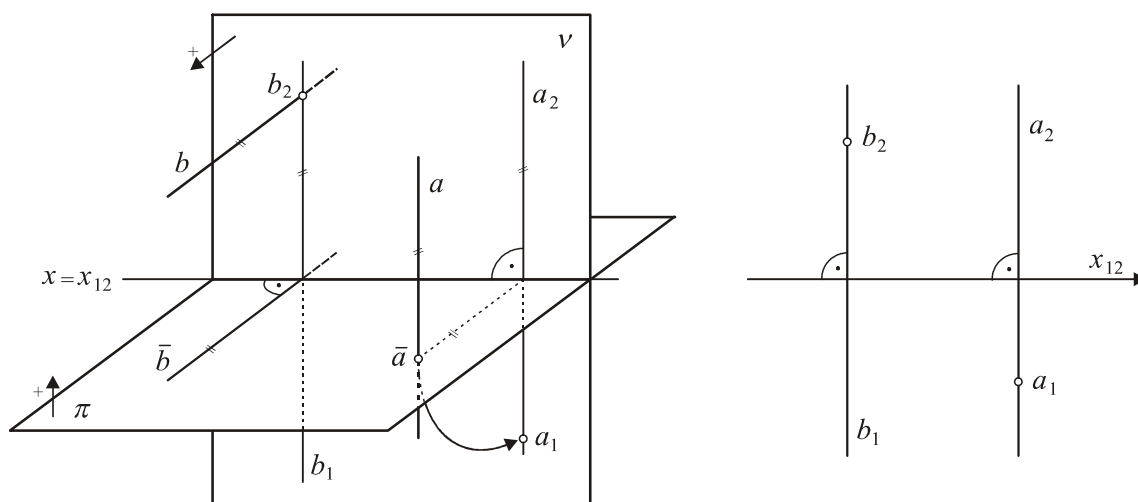
Nech  $U = a$  je ľubovoľná priamka. V prvej kapitole sme dokázali, že každý bod priestoru je jeho pôdorysom a nárysom určený. Skúsme si odpovedať na otázku, či to platí aj pre priamku. Najskôr definujme potrebné pojmy.

**Definícia 2.1** *Pôdorysom, resp. nárysom útvaru  $U$  nazývame množinu pôdorysov, resp. nárysov všetkých bodov útvaru  $U$ . Označovať ich budeme  $U_1$ , resp.  $U_2$ .*

Ďalej budeme skúmať, či a v akých prípadoch je priamka  $a$  určená usporiadanou dvojicou priamok  $(a_1, a_2)$ . Pre takúto dvojicu platí, že alebo práve jeden prvok dvojice je bod alebo sú pôdorys i nárys priamky  $a$  priamky.

a)  $a_1$  je bodom práve vtedy, keď je prvý priemet  $\bar{a}$  priamky  $a$  bod (podľa dohodnutej voľby nákrese v kapitole 1). To nastane práve vtedy, keď je priamka  $a$  kolmá na priemetňu  $\pi$ . Nárysom  $a_2$  priamky  $a$  je ordinála obrazov bodov priamky  $a$  prechádzajúca bodom  $a_1$ , t. j.  $a_1 \in a_2 \wedge a_2 \perp x_{12}$ . (Odôvodnite)

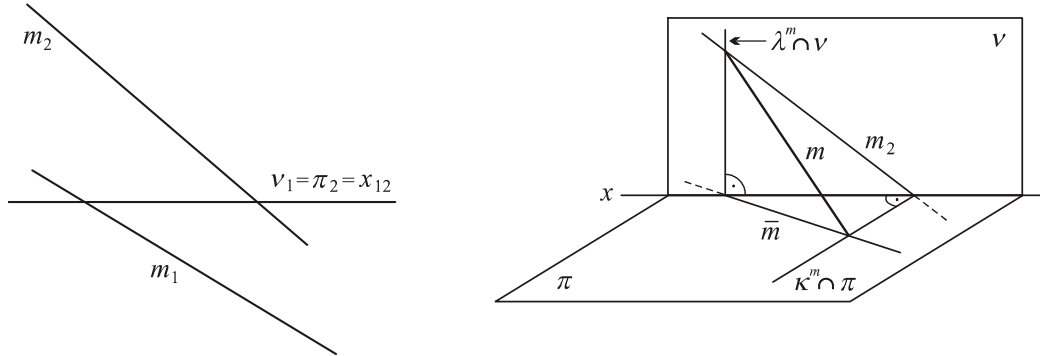
Analogicky je nárys  $b_2$  priamky  $b$  bod práve vtedy, keď je priamka  $b$  kolmá na priemetňu  $\nu$ . Pôdorys  $b_1$  priamky  $b$  je ordinála obrazov bodov priamky  $b$  prechádzajúca bodom  $b_2$  ( $b_2 \in b_1 \wedge b_1 \perp x_{12}$ ). (Prečo?) (Obr. 4a, b) Vymodelujte v priestore obe priamky dané pôdorysom a nárysom na obr. 4b.



Obr. 4a, b

b) Nech pôdorys  $m_1$  a nárys  $m_2$  priamky  $m$  sú priamky. (Obr. 5a) Ako vymodelujeme priamku  $m$  z jej pôdorysu a nárysu? Ak priamka  $m$ , ktorej pôdorysom by bola priamka  $m_1$  a nárysom priamka  $m_2$  existuje, tak musí ležať v rovinách  $\lambda^m$  a  $\kappa^m$ , pre ktoré platí:  $\bar{m} \subset \lambda^m \wedge \lambda^m \perp \pi$ ,  $m_2 \subset \kappa^m \wedge \kappa^m \perp \nu$ . (Priamka  $\bar{m}$  je otočenou polohou priamky  $m_1$  v inverznom otočení k otočeniu roviny  $\pi$  do roviny  $\nu$ , ktoré sme použili na konštrukciu pôdorysov bodov.)

(Obr. 1) Priamka  $m$  je teda priesečnicou rovín  $\lambda^m$  a  $\kappa^m$  (obr. 5b). Odtiaľ vyplýva, že priamka  $m$  je určená práve vtedy, keď sú obe roviny navzájom rôznobežné. V prípade  $\lambda^m = \kappa^m$ , t. j. ak je táto rovina kolmá na priamku  $\pi \cap \nu = x$ , nie je priamka  $m$  určená; preto ju treba dourčiť dvoma bodmi. (Obr. 6a, b) (Vysvetlite, prečo nenastane prípad  $\lambda^m \cap \kappa^m = \emptyset$ .) Výsledkom našich úvah je nasledujúce tvrdenie vyjadrené v tvare dôsledku.

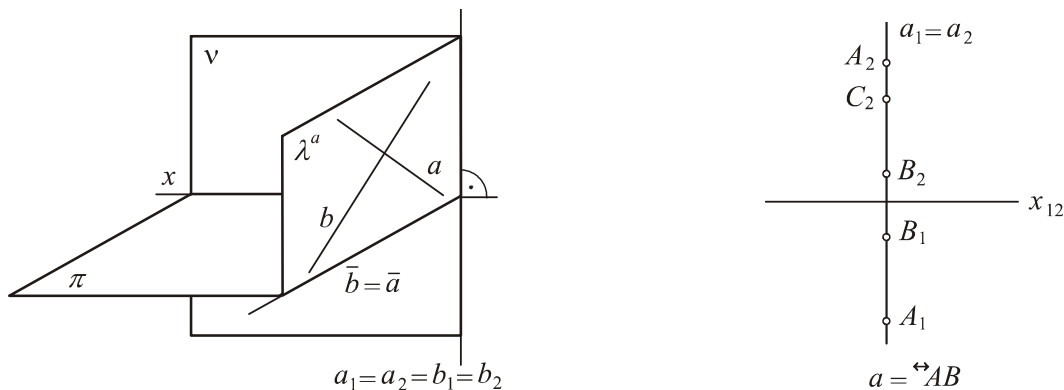


Obr. 5a, b

### Dôsledok 2.1

a) Priamka  $a$  [ $(a \perp x) \vee (a \perp \pi) \vee (a \perp \nu)$ ] je určená svojím pôdorysom a nárysom. Budeme to vyjadrovať zápisom:  $a = (a_1, a_2)$ .

b) Priamka, ktorá je kolmá na priesečnicu  $x = \pi \cap \nu$  a nie je kolmá na žiadnu z priemetní, nie je určená svojím pôdorysom a nárysom (obr. 6a). V tomto prípade treba priamku dourčiť dvojicou jej bodov.



Obr. 6a, b

**Úloha 2.1** Na obrázku 6b riešte úlohu: Dourčite bod  $C$  tak, aby ležal na priamke  $a = \leftrightarrow AB$ . (Čo platí pre rovnobežný priemet ľubovoľnej trojice navzájom rôznych bodov priamky? [1])

### Definícia 2.2

1. Priesečník priamky  $a$  s priemetňou  $\pi$ , resp.  $\nu$  (ak existuje) sa nazýva *prvý* alebo *pôdorysný*, resp. *druhý* alebo *nárysný stopník priamky  $a$* . Označovať ho budeme  $P^a$ , resp.  $N^a$  ( $P^a = a \cap \pi$ ,  $N^a = a \cap \nu$ ).

2. Priesečnica roviny  $\alpha$  s priemetňou  $\pi$ , resp.  $\nu$  (ak existuje) sa nazýva *prvá* alebo *pôdorysná*, resp. *druhá* alebo *nárysná stopa roviny  $\alpha$* . Označovať ju budeme  $p^\alpha$ , resp.  $n^\alpha$  ( $p^\alpha = \alpha \cap \pi$ ,  $n^\alpha = \alpha \cap \nu$ ).

3. Veľkosť uhla priamky/roviny s priemetňou  $\pi$ , resp.  $\nu$  sa nazýva prvá alebo pôdorysná, resp. druhá alebo nárysna odchýlka priamky/roviny.

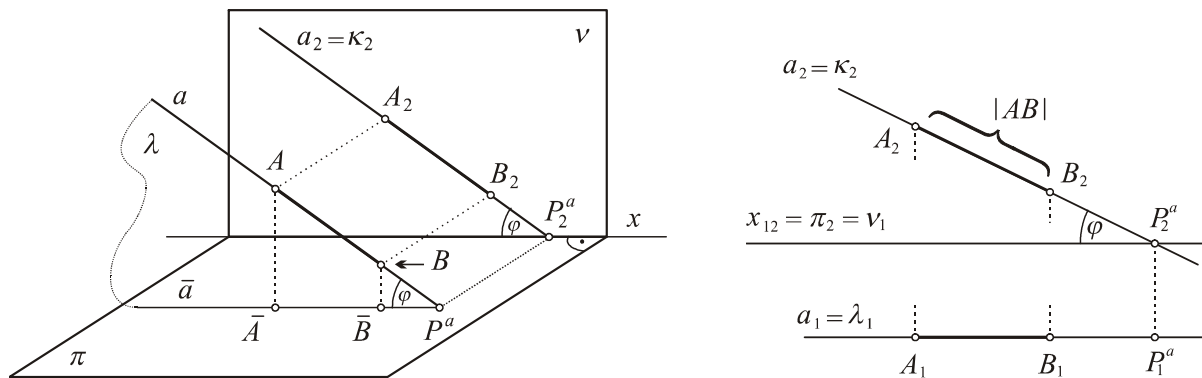
**Úloha 2.2** Zobrazte ľubovoľnú priamku, ktorá je rovnobežná s niektorou z priemetní  $\pi$ ,  $\nu$  a nemá osobitnú polohu k zvyšnej priemetni, ako aj ľubovoľnú priamku rovnobežnú s oboma priemetňami.

*Riešenie*

Zvoľme si priamku  $a$  tak, aby bola rovnobežná s priemetňou  $\nu$ , a nebola kolmá na priemetňu  $\pi$  ani rovnobežná s priesečnicou  $\pi \cap \nu$ . Najprv si vymodelujme situáciu v priestore (stereometrické riešenie úlohy, obr. 7a). Z rovnobežnosti priamky  $a$  s priemetňou  $\nu$  vyplýva:

a) existuje práve jedna rovina  $\lambda$ , ktorá obsahuje priamku  $a$  a je rovnobežná s priemetňou  $\nu$  (prvá premietacia rovina priamky  $a$ ); b) druhá premietacia rovina  $\kappa$  priamky  $a$  pretína priemetňu  $\nu$  v priamke rovnobežnej s priamkou  $a$  (prečo?). To znamená: a)  $\lambda \cap \pi = \bar{a} \wedge \bar{a} \parallel (\nu \cap \pi)$  (vzájomná poloha troch navzájom rôznych rovín), odkiaľ:  $\bar{a} \parallel x$ , a následne aj  $a_1 \parallel x_1$ ; <sup>8</sup>

b) priamky  $a$ ,  $a_2$  sú navzájom rovnobežné.



Obr. 7a, b

I keď sa ešte nezaobráme riešením metrických úloh, všimnime si dôsledok faktu b). Rovnobežným prietom ľubovoľnej úsečky na priamke rovnobežnej s priemetňou je úsečka s ňou zhodná, t. j.  $\forall AB (AB \subset a) \Rightarrow AB \cong A_2B_2$ . Navyše pre uhol  $\varphi$  priamky  $a$  s priemetňou  $\pi$  platí:  $\angle \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \angle a\bar{a} \cong \angle a_2x_2$ .

Riešením v nákrese je priamka  $a$  požadovaných vlastností určená usporiadanou dvojicou priamok  $(a_1, a_2)$ , kde  $a_1 \parallel x_1$  a  $a_2$  je ľubovoľná priamka nákrese  $\nu$ , ktorá pretína základnicu  $x_{12} = \pi_2$  (prečo?) (obr. 7b). Konštrukcia dĺžky úsečky incidentnej s priamkou  $a$  a uhla zhodného s uhlom priamky  $a$  s priemetňou  $\pi$  je triviálnym dôsledkom stereometrického riešenia. Navyše je na obrázku zostrojený i prvý stopník  $P^a$  priamky  $a$  ( $P^a = a \cap \pi \Rightarrow P_2^a = a_2 \cap \pi_2$ , odkiaľ vyplýva konštrukcia bodu  $P_1^a$  ( $P_1^a \in a_1 \wedge \overset{\leftrightarrow}{P_1^a} P_2^a \perp x_{12}$ )).

*Poznámka 2.1*

Riešenie úlohy (so všetkými náležitosťami, t. j. analogicky) pre prípad ľubovoľnej priamky  $b$ , ktorá je rovnobežná s priemetňou  $\pi$  ( $b \not\subset \pi$ ), nie je kolmá na rovinu  $\nu$  ani

<sup>8</sup> Rovnobežnosť je invariantnou vlastnosťou rovnobežného premietania a zachováva sa aj v prípade priamky rovnobežnej s rovinou, ak je táto príslušnou premietacou rovinou. Teda  $a \parallel \nu \Rightarrow a_1 \parallel \nu_1$  (špeciálne  $a \subset \nu \Rightarrow a_1 = \nu_1$ ). (V riešení úlohy sa o priamke incidentnej s priemetňou neuvažuje.)

rovnobežná s priamkou  $x = \nu \cap \pi$ , sa necháva čitateľovi. Konštrukcia obrazu priamky  $c$  ( $M \in c, c \parallel x$ ) pre bod  $M = (M_1, M_2)$  je jednoduchým dôsledkom.

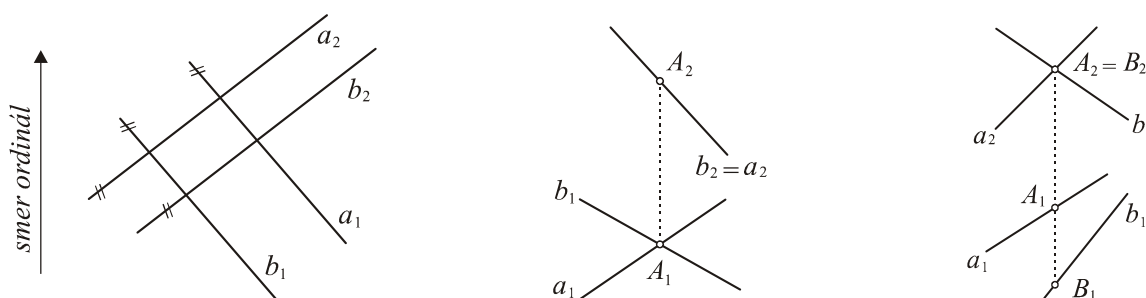
**Úloha 2.3** Zvoľte si priamku  $m$  vo všeobecnej polohe vzhľadom na obe priemetne  $\pi, \nu$  a zostrojte obraz jej stopníkov  $P^m, N^m$ . Úlohu riešte na obrázku 5a pomocou obrázka 5b. Záver riešenia úlohy zapíšte v tvare  $P^m = (P_1^m, P_2^m)$  a analogicky nárysny stopník  $N^m$ .

**Úloha 2.4** Zvoľte si ľubovoľnú priamku  $m = (m_1, m_2)$  (priamka  $m$  nie je kolmá na priesečnicu priemetní). Určite vzájomnú polohu tejto priamky s rovinou súmernosti ( $\sigma$ ) a s rovinou totožnosti ( $\tau$ ) a zostrojte prípadné spoločné body. (Dokážte nasledujúce tvrdenia: **a**) Priamka  $m$  je rovnobežná s rovinou súmernosti práve vtedy, keď sú jej pôdorys a nárys (t. j. priamky  $m_1, m_2$ ) súmerne združené podľa priamky rovnobežnej so základnicou; **b**) Priamka  $m$  je rovnobežná s rovinou totožnosti práve vtedy, keď sú jej pôdorys a nárys navzájom rovnobežné.<sup>9</sup>)

Pred zobrazením roviny je treba – vzhľadom na určenie roviny – vyriešiť úlohu o zobrazení dvojíc priamok. O vzájomnej polohe dvojíc priamok  $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$  platí v Mongeovom zobrazení nasledujúca veta (obr. 8a – c):

**Veta 2.1** Nech sú  $a, b$  ( $b \neq a$ ) dve priamky, z ktorých žiadna nie je kolmá na priesečnicu priemetní. Potom platí:

1. Priamky  $a, b$  sú navzájom rovnobežné práve vtedy, keď sú navzájom rovnobežné tak pôdorysy priamok, ako aj ich nárysy ( $a \parallel b \Leftrightarrow a_i \parallel b_i$  ( $i = 1, 2$ )), pričom najviac pre jeden index  $i$  môže platiť  $a_i = b_i$ ).
2. Priamky  $a, b$  sú navzájom rôznobežné práve vtedy, keď existuje dvojica bodov  $(A_1, A_2)$  tak, že platí:  $A_i \in a_i \cap b_i$  ( $i = 1, 2$ ), a alebo je priamka  $A_1A_2$  kolmá na základnicu alebo  $A_1 = A_2$ . Najviac pre jeden index  $i$  môže pritom platiť  $a_i = b_i$ .
3. Priamky  $a, b$  sú navzájom mimobežné práve vtedy, keď pre ich pôdorysy a nárysy neplatí ani 1, ani 2. Najviac pre jeden index  $i$  môže pritom platiť  $a_i \cap b_i = \emptyset$ .



Obr. 8a – c

#### Poznámka 2.2

Vzájomná poloha geometrických útvarov je nezávislá od voľby priemetní. Preto pri riešení polohových úloh často namiesto základnice udávame *smier ordinál*. Ordinály orientujeme tak, aby pre ľubovoľný bod oblasti I (par. 1) pôdorys zvoleného bodu predchádzal jeho nárys.

<sup>9</sup> Pred dôkazom tvrdenia vyjadrite nevyhnutnú a dostačujúcu podmienku pre priamku  $m = (m_1, m_2)$ , ktorá: 1.  $m \subset \sigma$ ; 2.  $m \subset \tau$ . Úlohu 2.4 riešte aj pre priamky  $m, n$  ( $m \perp \pi \wedge m \not\subset \nu$ ) a  $n$  ( $n \perp \nu \wedge n \not\subset \pi$ ).

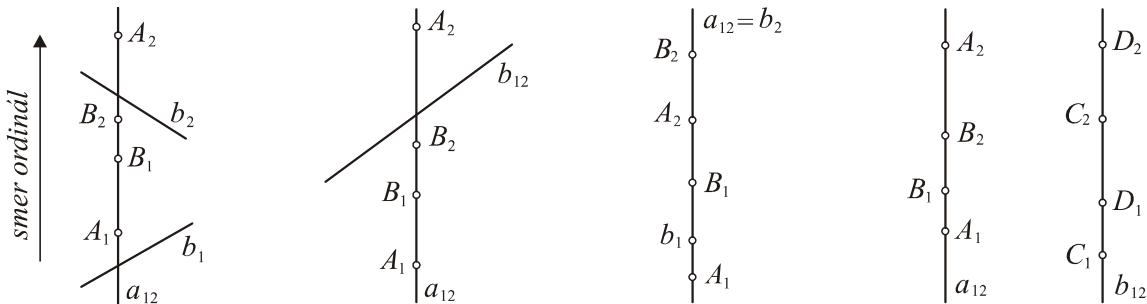


**Úloha 2.5** Dokážte vetu 2.1 a vysvetlite, čo znamená pre priamky  $a, b$  ( $b \neq a$ ) platnosť  $a_i = b_i$  alebo  $a_i \cap b_i = \emptyset$  pre niektorý z indexov. Vymodelujte si polohu priamok v priestore.

**Úloha 2.6** Dané sú priamky  $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$ , z ktorých aspoň jedna je kolmá na niektorú z priemetní. Sformulujte nevyhnutnú a dostačujúcu podmienku pre rovnobežnosť, rôznobežnosť, resp. mimobežnosť priamok  $a, b$ . Načrtnite obrazy dvojíc priamok.

*Poznámka 2.3*

Pretože priamka kolmá na priesečnicu priemetní, ktorá súčasne nie je kolmá na žiadnu z priemetní, nie je určená svojím pôdorysom a nárysom, nemožno vždy určiť vzájomnú polohu dvojice priamok, z ktorých aspoň jedna má takúto polohu, z polohy ich pôdorysov a nárysov. Niekedy je potrebné vykonať konštrukciu sklopenia premietacej roviny takejto priamky do niektorej z priemetní alebo do úrovne. Táto konštrukcia je celkom analogická s konštrukciou v kótovanom zobrazení a pripomenieme si ju v paragrafe venovanom riešeniu metrických úloh (otáčanie roviny). Pokúste sa odôvodniť vzájomnú polohu dvojice priamok  $a, b$  na obrázkoch 9a – d bez použitia sklápania premietacích rovín priamok. (Na obr. 9a – 9c, resp. 9d platí:  $a = \overset{\leftarrow}{\leftrightarrow} AB$ , resp.  $a = \overset{\leftarrow}{\leftrightarrow} AB, b = \overset{\leftarrow}{\leftrightarrow} CD$ .) (Vymodelujte si polohu dvojíc priamok.)



Obr. 9a – d

Rovina je určená tromi nekolineárnymi bodmi, priamkou a bodom s ňou neincidentným alebo dvoma priamkami, ktoré sú alebo rovnobežné (navzájom rôzne) alebo rôznobežné. ([1]) Vzhľadom na riešenie polohových úloh je výhodné zadanie roviny dvojicou priamok (paragraf 3).<sup>10</sup> Teraz skúmame otázku určenia roviny jej stopami, ak sú tieto navzájom rôzne priamky (t. j. keď rovina neprechádza priesečnicou priemetní). Aká môže byť vzájomná poloha roviny  $\alpha$  a priesečnice  $x$  priemetní? Platí:

$$x \cap \alpha = \emptyset \vee x \cap \alpha = \{ X^\alpha \} \vee x \subset \alpha$$

**a)** Najprv skúmame najvšeobecnejší prípad:  $x \cap \alpha = \{ X^\alpha \}$  (obr. 10a). Bod  $X^\alpha$  je spoločným bodom rovín  $\alpha, \pi, \nu$ , t. j. i priesečnic  $p^\alpha = \alpha \cap \pi, n^\alpha = \alpha \cap \nu$ . Prvá a druhá stopa roviny sú navzájom rôzne priamky, ktoré sa pretínajú v bode  $X^\alpha$  priesečnice  $x$  priemetní. Na obrázku je zobrazená i priamka  $m$  ( $X^\alpha \notin m$ ) roviny  $\alpha$ , ktorá pretína obe jej stopy; druhý z obrázkov 10a ilustruje riešenie jednoduchej polohovej úlohy o dourčení nárysu, resp. pôdorysu priamky  $m = (m_1, ?)$ , resp.  $m = (?, m_2)$  ležiacej v rovine  $\alpha$ .<sup>11</sup>

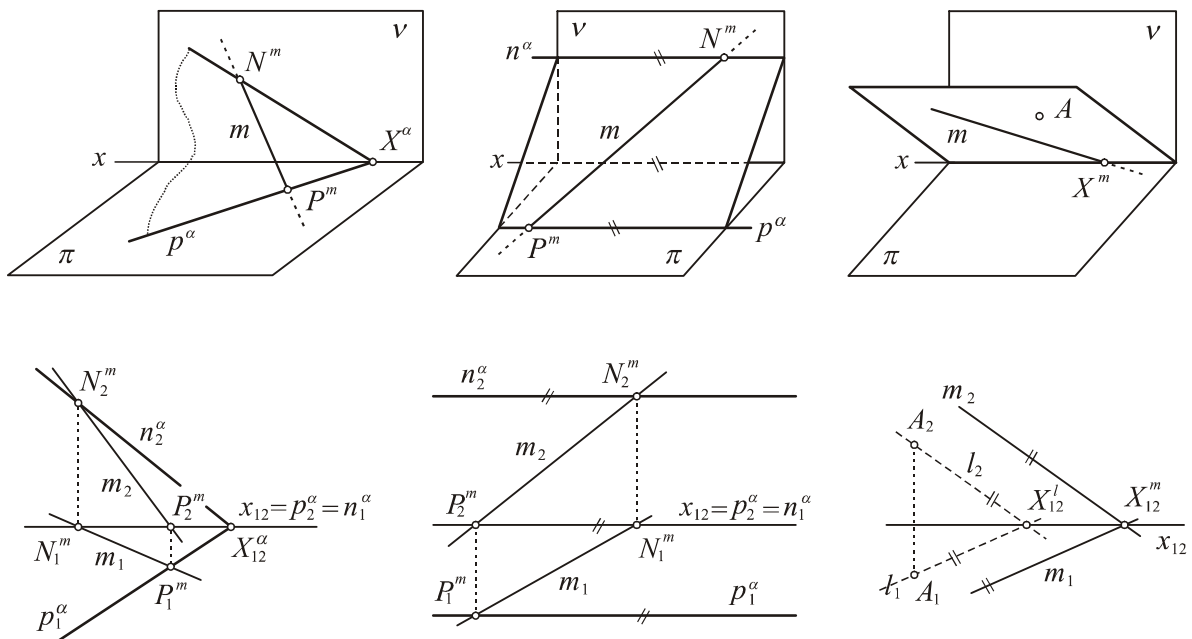
**b)** Nech  $x \cap \alpha = \emptyset$ . Z klasifikácie vzájomnej polohy trojice navzájom rôznych rovín  $\alpha, \pi, \nu$  potom vyplýva:  $(\alpha \cap \pi) \parallel (\alpha \cap \nu) \parallel (\pi \cap \nu)$ , t. j.  $p^\alpha \parallel n^\alpha \parallel x$ . Zobrazená je priamka  $m$  roviny

<sup>10</sup> Pri ľubovoľnom inom zadaní nie je problém si dvojicu priamok roviny zadovážiť.

<sup>11</sup> V riešení výhodne použijeme dostupné stopníky  $P^m, N^m$  priamky  $m \subset \alpha$ . Platí:  $P^m = m \cap \pi = m \cap (\alpha \cap \pi), N^m = m \cap \nu = m \cap (\alpha \cap \nu)$ .

pretínajúca obe jej stopy (v dostupných bodoch) a druhý z obrázkov 10b ilustruje riešenie analogickej úlohy s úlohou uvedenou v bode a) textu (v nákrese).

c) V prípade incidencie  $x \subset \alpha$  ( $\alpha \neq \pi$ ,  $\alpha \neq \nu$ ) je priamka  $x$  súčasne prvou i druhou stopou tejto roviny, t. j. rovinu je potrebné dourčiť jej ďalším bodom  $A$  ( $\alpha = \overleftrightarrow{x}A$ ,  $A \notin x$ ) (obr.10c). Každá priamka  $m$  roviny  $\alpha$  (nerovnoobežná s priamkou  $x$ ) pretína priamku  $x$  vo svojom pôdorysnom a súčasne nárysnom stopníku  $X^m (= P^m = N^m)$ . To znamená, že pôdorys a nárys priamky  $m$  sa pretínajú na základnici. Druhý z obrázkov 10c ilustruje riešenie úlohy o dourčení priamky  $m = (m_1, ?)$ , resp.  $m = (?, m_2)$ ; ak táto priamka neprechádza bodom  $A$ , je potrebné zobrazit' najprv pomocnú priamku  $l$  roviny  $\alpha$  tak, aby prechádzala bodom  $A$  a bola rovnobežná s priamkou  $m$ .



Obr. 10 a – c

Pri zobrazovaní rovinných útvarov v rovine  $\alpha$  ( $\alpha \neq x$ ) osobitné postavenie zaujímajú priamky roviny, ktoré sú rovnobežné s niektorou z priemetní. Analogicky s kótovaným zobrazením budeme tieto priamky nazývať hlavnými priamkami. Vzhľadom na existenciu dvoch priemetní je potrebné toto pomenovanie spresniť tak, aby z názvu príslušnej hlavnej priamky bolo zrejmé, s ktorou z priemetní je táto priamka rovnobežná.

### Definícia 2.3

a) Nech je  $\alpha$  rovina, ktorá nie je rovnobežná s priemetňou  $\pi$ , resp. s priemetňou  $\nu$ . Priamka roviny  $\alpha$  rovnobežná s priemetňou  $\pi$ , resp. s priemetňou  $\nu$ , sa nazýva *hlavná priamka prvej osnovy roviny  $\alpha$* , resp. *hlavná priamka druhej osnovy roviny  $\alpha$* . Hlavnú priamku prvej osnovy, resp. druhej osnovy roviny  $\alpha$  budeme spravidla označovať  ${}^{\alpha}h^1$ , resp.  ${}^{\alpha}h^2$ .<sup>12</sup>

b) Nech je  $\alpha$  rovina, ktorá nie je rovnobežná s priemetňou  $\pi$ , resp. s priemetňou  $\nu$ . Priamka roviny  $\alpha$  kolmá na hlavné priamky prvej, resp. druhej osnovy tejto roviny sa nazýva *spádová*

<sup>12</sup> Pri väčšom počte hlavných priamok budeme osnovu hlavnej priamky vyjadrovať *len slovné* v zápise riešenia úlohy a označovať ich budeme  ${}^1h^{\alpha}$ ,  ${}^2h^{\alpha}$ ,  ${}^3h^{\alpha}$ , atď., prípadne aj  ${}^1h$ ,  ${}^2h$ ,  ${}^3h$ , ... bez označenia roviny, ak bude zrejme z kontextu o akú rovinu ide.

priamka prvej osnovy, resp. spádová priamka druhej osnovy roviny  $\alpha$ . Spádovú priamku prvej, resp. druhej osnovy roviny  $\alpha$  budeme označovať  ${}^{\alpha}s^I$ , resp.  ${}^{\alpha}s^{II}$ .

**Veta 2.2** Pôdorysy hlavných a spádových priamok prvej osnovy roviny  $\alpha$ , resp. nárysy hlavných a spádových priamok druhej osnovy roviny  $\alpha$  sú navzájom kolmé (za predpokladu  $\alpha \perp \pi$ , resp.  $\alpha \perp \nu$  a existencie hlavných priamok príslušnej osnovy (definícia 2.3)).

*Poznámka 2.3*

a) Platnosť vety pre kolmé priemety priamok do roviny  $\pi$  bola dokázaná v kótovanom zobrazení. Dôkaz pre nárysy príslušných priamok je celkom analogický.

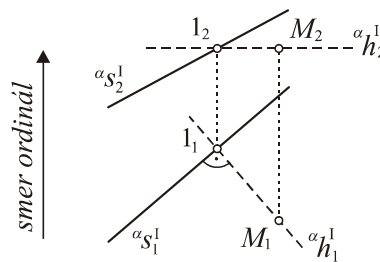
b) Rovina  $\alpha$ , ktorá nie je rovnobežná s priemetňou  $\pi$  ani na ňu kolmá, resp. nie je rovnobežná s priemetňou  $\nu$  ani na ňu kolmá, je v Mongeovom zobrazení určená obrazom spádovej priamky prvej, resp. druhej osnovy.

c) Prvá, resp. druhá odchýlka roviny sa rovná prvej odchýlke spádovej priamky prvej osnovy, resp. druhej odchýlke spádovej priamky druhej osnovy tejto roviny.<sup>13</sup>

**Úloha 2.7** Daný je obraz spádovej priamky prvej osnovy roviny  $\alpha$  ( ${}^{\alpha}s^I = ({}^{\alpha}s_1^I, {}^{\alpha}s_2^I)$ ) a pôdorys bodu  $M = (M_1, ?)$  tejto roviny (obr. 11). Zostrojte nárys bodu  $M$ . (Úlohu riešte bez použitia základnice, pri danom smere ordinál.)

*Riešenie*

1. Bod  $M$  leží v rovine práve vtedy, keď leží na nejakej priamke roviny. Výber priamky je v tomto prípade jednoznačný – na základe vety 2.2 a úlohy 2.2 vieme zobrazit hlavnú priamku prvej osnovy roviny  $\alpha$ , ktorá prechádza bodom  $M$ .
2. Platí:  $M_1 \in {}^{\alpha}h_1^I$  (dôsledok incidencie  $M \in {}^{\alpha}h^I$ ),  ${}^{\alpha}h_1^I \perp {}^{\alpha}s_1^I$  (veta 2.2).
3. Hlavnú priamku dourčíme jej priesečníkom so spádovou priamkou. Označme:  ${}^{\alpha}h^I \cap {}^{\alpha}s^I = 1_1$ , t. j.  $1_1 = {}^{\alpha}h_1^I \cap {}^{\alpha}s_1^I$  a pre bod  $1_2$  platí:  $1_2 \in {}^{\alpha}s_2^I \wedge \leftrightarrow 1_1 1_2 \perp x_{12}$ . Nárys tejto hlavnej priamky prechádza bodom  $1_2$  a platí:  ${}^{\alpha}h_2^I \parallel \pi_2$  (dôsledok rovnobežnosti hlavnej priamky s priemetňou  $\pi$ ).
4. Záver:  $M \in {}^{\alpha}h^I \Rightarrow M_2 \in {}^{\alpha}h_2^I \wedge M_1 M_2 \perp x_{12}$ ;  $M = (M_1, M_2)$



Obr. 11

**Veta 2.3** Medzi pôdorysmi a nárysmi bodov tej istej roviny  $\alpha$ , ktorá nie je kolmá na žiadnu z priemetní ani rovnobežná s rovinou totožnosti<sup>14</sup>, je vzťah pravouhlej perspektívnej afinity. Osou tejto afinity je obraz priesečnice roviny  $\alpha$  s rovinou totožnosti.

<sup>13</sup> Tvrdenie platí pre každú rovinu, ktorá nie je rovnobežná s priemetňou  $\pi$ , resp. s priemetňou  $\nu$ .

<sup>14</sup> Za rovnobežnosť sa považuje aj incidencia.

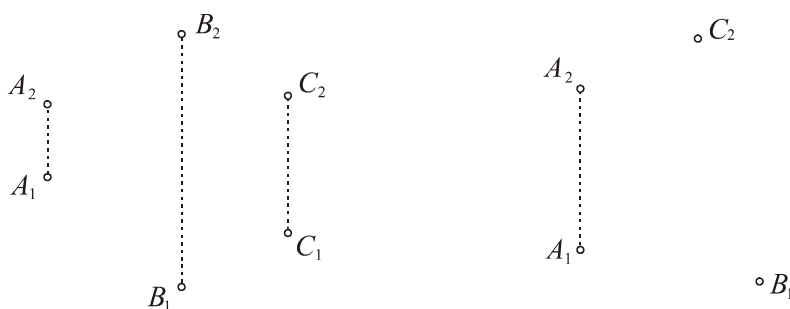
*Dôkaz.* Označme si:  ${}^1f$  – pravouhlé premietanie z roviny  $\alpha$  do priemetne  $\nu$ ,  ${}^2f$  – pravouhlé premietanie z roviny  $\alpha$  do priemetne  $\pi$  a  ${}^3f$  – rovnobežné premietanie z roviny  $\pi$  do priemetne  $\nu$  (osnova premietania  ${}^3f$  je kolmá na rovinu totožnosti)<sup>15</sup>. Vzťah rovinných polí  $(\alpha_1)$  a  $(\alpha_2)$  je zrejmy z nasledujúceho diagramu:

$$\begin{array}{ccc} (\alpha) & \xrightarrow{{}^1f} & (\alpha_2) \\ {}^2f \downarrow & & \\ (\bar{\alpha}) & \xrightarrow{{}^3f} & (\alpha_1) \end{array}$$

Zobrazenia  ${}^i f$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sú perspektívne afinity ([4]), t. j. i kompozícia  $f = {}^3f \circ {}^2f \circ {}^1f^{-1}$ ,  $f: (\alpha_2) \rightarrow (\alpha_1)$  je afinitou (bijektívnym afínnym zobrazením) dvoch súmestných rovinných polí s nositeľkou v nákresni  $\nu$ . Obraz  $t_{12}^\alpha$  priesečnice roviny  $\alpha$  s rovinou totožnosti ( $t^\alpha = \alpha \cap \tau$ ) je bodovo samodružnou priamkou zobrazenia  $f$ , odkiaľ vyplýva, že  $f$  je perspektívna afinita.

#### Poznámka 2.4

Hovoríme, že  $f$ , resp.  $f^{-1}$  je perspektívna afinita indukovaná v nákresni rovinou  $\alpha$  (rovina  $\alpha$  nie je kolmá na žiadnu z priemetní ani rovnobežná s rovinou totožnosti.) Na obr. 12a, resp. 12b riešte úlohu: a) Daná je rovina  $\alpha = \leftrightarrow ABC$ . Zostrojte os perspektívnej afinity indukovanej v nákresni touto rovinou; b) Daná je rovina  $\alpha = \leftrightarrow ABC$  [ $A = (A_1, A_2)$ ,  $B = (B_1, ?)$ ,  $C = (?, C_2)$ ]. Dourčite body  $B, C$  tak, aby rovina  $\alpha$  bola rovnobežná s rovinou totožnosti. Čím je zobrazenie  $f: (\alpha_1) \rightarrow (\alpha_2)$  v tomto prípade? Čím je zobrazenie  $f$  pre samu rovinu totožnosti?



Obr. 12a, b

### 3 Polohové úlohy

O povahe polohových úloh a zápise algoritmu tak stereometrického riešenia úlohy, ako aj následne zápise realizácie algoritmu v riešení úloh na obrazoch útvarov v Mongeovom zobrazení, možno povedať to, čo bolo už uvedené v rovnomennom paragrafe v kótovanom zobrazení. (Kótované zobrazenie, paragraf 4)

Do textu sme zaradili nevelký počet riešených štandardných polohových úloh so zámerom oboznámiť čitateľa s niektorými postupmi v riešení úloh na obrazoch útvarov, ktoré sú špecifickými vzhľadom na použitú metódu zobrazenia alebo polohu zobrazovaných objektov vzhľadom na priemetne. Stupeň ovládania riešenia úloh si môže čitateľ preveriť na zbierke neriešených úloh (paragraf 6).

<sup>15</sup> Pozrite si dôsledok b) za definíciou 1.4.

**Úloha 3.1** a) Dourčite daný bod  $M = (M_1, ?)$  tak, aby ležal v rovine určenej dvoma priamkami  $a, b$ . [ $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$ ]

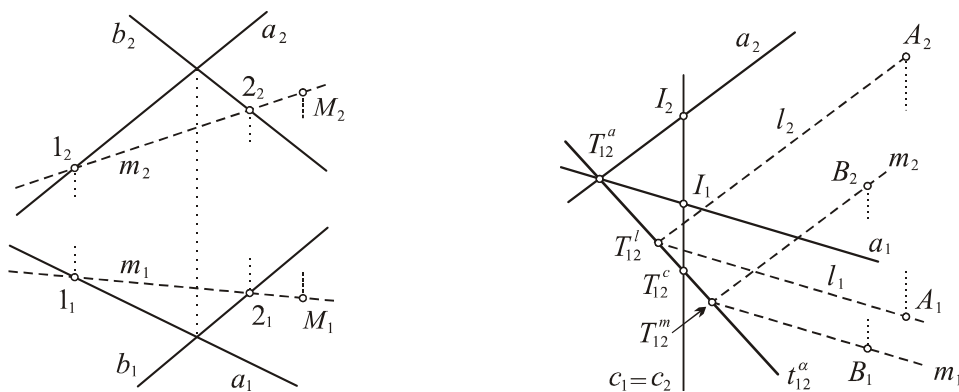
b) Daná je rovina  $\alpha = \leftrightarrow Aa$ . Zostrojte priesečnicu roviny  $\alpha$  s rovinou totožnosti a dourčite bod  $B$  roviny  $\alpha$ . Zvoľte si pôdorys ľubovoľnej priamky  $c$  ( $c \perp x$ ) roviny  $\alpha$  a dourčite túto priamku. [ $a = (a_1, a_2), A = (A_1, A_2); B = (?, B_2); c_1 \perp x_1$  – ľubovoľná priamka]

*Poznámka 3.1.*

Úlohu o dourčení rovinného útvaru  $U$  danej roviny  $\alpha$ , ak je daný pôdorys  $U_1$ , resp. nárys  $U_2$  tohto útvaru riešime všeobecne na základe vety 2.3. Ak je  $f$  perspektívna afinita zobrazujúca rovinné pole  $(\alpha_1)$  na rovinné pole  $(\alpha_2)$  ( $\alpha \perp \pi, \alpha \perp \nu$  a rovina  $\alpha$  nie je rovnobežná s rovinou totožnosti  $\tau$ ), tak platí:  $f(U_1) = U_2$ , resp.  $f^{-1}(U_2) = U_1$ . V riešení najjednoduchších úloh (napr. dourčenie bodu roviny) si použitie afinity riešiteľ ani nemusí uvedomiť, resp. os afinity nie je potrebné zostrojovať (napr. v úlohe 2.7). Princípom riešenia je stereometrický poznatok „bod leží v rovine práve vtedy, keď leží na priamke tejto roviny“, analogicky ako v metóde kótovaného zobrazenia. V riešení zložitejších úloh alebo pri dourčovaní väčšieho počtu bodov je použitie osi spomenutej perspektívnej afinity efektívne.

*Riešenie*

a) Priamky  $a, b$  môžu byť navzájom rovnobežné alebo rôznobežné. V prvom prípade použijeme priamku roviny  $\alpha$ , ktorá prechádza bodom  $M$ , obe priamky pretína a nie je priamkou kolmou na priesečnicu priemetní (prečo?). V druhom prípade si môžeme zvoliť bodom  $M$  priamku roviny, ktorá obe priamky pretína alebo je s niektorou z nich rovnobežná. V riešení úlohy 3.1 (obr. 13a) ide o rôznobežné priamky  $a, b$  a pomocná priamka  $m$  je s oboma priamkami  $a, b$  rôznobežná. Označme:  $m \cap a = \{1\}, m \cap b = \{2\}$ . Pre pôdorys priamky  $m$  teda platí:  $M_1 \in m_1 \wedge m_1 \cap a_1 = \{1_1\} \wedge m_1 \cap b_1 = \{2_1\}$ . Nárysy bodov 1, 2 zostrojíme na základe incidencií:  $1 \in a, 2 \in b$  (odkiaľ vyplýva  $1_2 \in a_2, 2_2 \in b_2$ ) a vlastností ordinál bodov. Ordinály sú určené dvojicou bodov  $(a_1 \cap b_1), (a_2 \cap b_2)$ . Priamka  $m$  je určená bodmi 1, 2 ( $m_2 = \overrightarrow{1_2 2_2}$ ), bod  $M_2$  leží na priamke  $m_2$  a príslušnej ordinále. *Záver:*  $M = (M_1, M_2)$ .



Obr. 13a, b

b) 1. Priesečnica roviny  $\alpha$  s rovinou totožnosti  $\tau$  je určená napríklad priesečníkmi priamok  $a, l$  ( $A \in l \wedge l \parallel a \Rightarrow \alpha = \leftrightarrow al$ ) s touto rovinou ( $a \cap \tau = T^a, l \cap \tau = T^l \Rightarrow \alpha \cap \tau = \leftrightarrow T^a T^l = t^\alpha$ );  $t^\alpha = (t_1^\alpha, t_2^\alpha)$ .

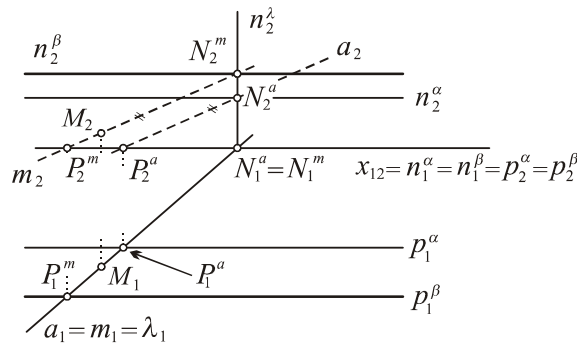
2. Bod  $B$  roviny  $\alpha$  dourčíme napr. pomocou priamky  $m$  ( $B \in m$ ,  $m \parallel a$ ) a priamku  $m$  použitím jej bodu  $T^m$  v rovine totožnosti ( $T^m = m \cap t^\alpha$ ).<sup>16</sup> Perspektívna afinita  $f: (\alpha_1) \rightarrow (\alpha_2)$  je určená osou  $t_{12}^\alpha$  a usporiadanou dvojicou bodov  $(A_1, A_2)$ . Potom:  $B_1 = f^{-1}(B_2)$ . Priamku  $c$  možno dourčiť napr. pomocou priesečníkov  $T^c$ , resp.  $I$  s priamkami  $t^\alpha$ , resp.  $a$ . (Obr. 13b)

**Úloha 3.2** Zostrojte rovinu, ktorá prechádza daným bodom  $M = (M_1, M_2)$  a je rovnobežná s rovinou  $\alpha = \leftrightarrow p^\alpha n^\alpha$  ( $\alpha \parallel x$ ) (pri danej základnici  $x_{12}$ ). (Obr. 14)

*Riešenie*

1. Označme  $\beta$  rovinu požadovaných vlastností. Zo zadania vyplýva, že i rovina  $\beta$  je rovnobežná s priamkou  $x$  (t. j.  $p^\beta \parallel n^\beta \parallel x$ ) a stačí zostrojiť jednu priamku  $m$  roviny  $\beta$ , ktorá nie je s priesečnicou  $x$  priemetní rovnobežná. (Prečo?) Zostrojme teda ľubovoľnú priamku  $m$ , ktorá prechádza bodom  $M$  a je rovnobežná s rovinou  $\alpha$ ; k tomu stačí, aby priamka  $m$  bola rovnobežná s ľubovoľne vhodne zvolenou priamkou  $a$  roviny  $\alpha$  (kritérium rovnobežnosti priamky a roviny ([1])).<sup>17</sup>

2. Výhodne – z hľadiska prácnosti konštrukcie – si môžeme zvoliť priamku  $a$  tak, aby jej pôdorys prechádzal bodom  $M_1$ . Potom  $a_1 = m_1$ , teda priamky  $a$ ,  $m$  ležia v tej istej prvej premietacej rovine  $\lambda$ . Dourčenie nárysov oboch priamok, ako aj obrazov stôp  $p^\beta$ ,  $n^\beta$  hľadanej roviny sa necháva čitateľovi. *Záver*:  $\beta = \leftrightarrow p^\beta n^\beta$  (každá stopa je určená svojím pôdorysom a nárysom).



Obr. 14

**Úloha 3.3** Určiť vzájomnú polohu priamky  $m$  s rovinou  $\leftrightarrow ABC$ . V prípade rôznobežnosti určite (v pôdoryse i v náryse) viditeľnosť priamky  $m$  vzhľadom na úplný trojuholník  $ABC$  (= trojuholník s jeho vnútrom). [ $m = (m_1, m_2)$ ,  $A = (A_1, A_2)$ ,  $B = (B_1, B_2)$ ,  $C = (C_1, C_2)$ ] (Obr. 15)

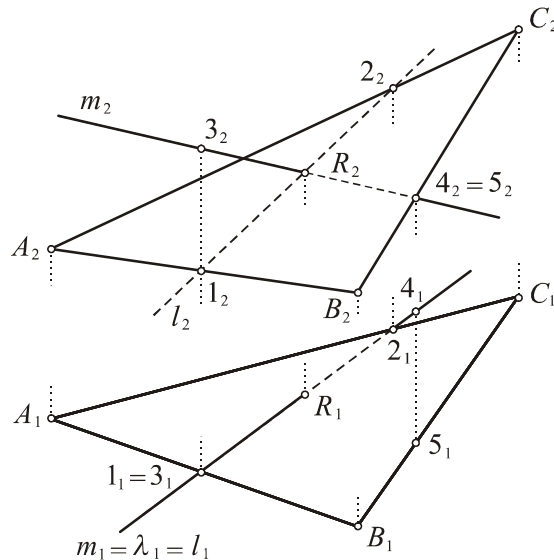
*Riešenie.* Úlohu vyriešime použitím stereometrického algoritmu riešenia úlohy, a to tak, že zostrojíme ľubovoľnú vhodnú rovinu  $\lambda$  prechádzajúcu priamkou  $m$  a rôznobežnú s danou rovinou. Potom platí:  $m \cap \alpha = m \cap (\lambda \cap \alpha) = m \cap l$  ( $l = \lambda \cap \alpha$ ). V Mongeovej metóde je spravidla výhodné použitie prvej alebo druhej premietacej roviny danej priamky. Efektívne rozhodnutie o výbere roviny závisí od skúseností riešiteľa a je determinované polohou daných útvarov vzhľadom na bázu súradnicovej sústavy. (Poznámka 1.2)

1. V riešení sme si zvolili prvú premietáciu roviny priamky  $m$ , t. j. rovinu  $\lambda$  ( $m \subset \lambda$ ,  $\lambda \perp \pi$ ). Pre priamku  $l = \lambda \cap \alpha$  (prvá krycia priamka priamky  $m$ ) platí:  $l_1 = \lambda_1 = m_1$ ; jej nárys  $l_2$  dourčíme z incidencie tejto priamky s rovinou  $\alpha$ . Z pôdorysu je zrejmé, že priamka  $l$  pretína

<sup>16</sup> Zrejme platí:  $B_2 \in m_2$ ,  $m_2 \parallel a_2$ ;  $T_{12}^m = m_2 \cap t_{12}^\alpha$ ;  $T_{12}^m \in m_1$ ,  $m_1 \parallel a_1$ ;  $B_1 \in m_1$ ,  $B_1 B_2 \parallel A_1 A_2$ .

<sup>17</sup> Otázka pre čitateľa: odkiaľ je zrejmé na prvý pohľad, že bod  $M$  neleží v rovine  $\alpha$ ? (V náryse je bod  $M_2$  bodom rovinného pásu ( $p_2^\alpha$ ,  $n_2^\alpha$ ); ako sa zobrazia v pôdoryse a náryse všetky vnútorné body rovinného pásu a prečo? )

priamky  $AB$ , resp.  $AC$  v bodoch 1, resp. 2 ( $l_1 \cap A_1B_1 = 1_1$ ,  $l_1 \cap A_1C_1 = 2_1$ ). Dourčenie nárysov bodov 1, 2 je zrejmé z úlohy 3.1. Vo zvolenej úlohe sa nárysy priamok  $m, l$  pretínajú ( $m_2 \cap l_2 = R_2$ ), teda:  $m \cap \alpha = m \cap (\lambda \cap \alpha) = m \cap l = \{R\}$ , čo znamená, že priamka  $m$  je s rovinou  $\alpha$  rôznobežná a jej priesečníkom s touto rovinou je bod  $R = (R_1, R_2)$ .<sup>18</sup> (Obr. 15)



Obr. 15

2. Viditeľnosť jednej z polpriamok priamky  $m$  so začiatkom v bode  $R$  (vzhľadom na rovinu  $\alpha$ ) určíme analogicky ako v kótovanom zobrazení. Stačí určiť viditeľnosť jedného bodu priamky  $m$ , ktorý je rôzny od bodu  $R = m \cap \alpha$ . Pretože Mongeova metóda je metódou dvoch obrazov, je potrebné určiť viditeľnosť osobitne pre pôdorys a nárys danej konfigurácie.

a) *Viditeľnosť vzhľadom na kolmé premietanie do roviny  $\pi$ .* Vyberme si bod 3 priamky  $m$ , pre ktorý  $3_1 = 1_1$  (body 3, 1 ležia na tej istej prvej premietacej priamke; zrejme  $R \neq 3$ ). Treba porovnať orientované vzdialenosti bodov 3, 1 ( $3 \in m$ ,  $1 \in \overleftrightarrow{AB}$ , t. j.  $1 \in \alpha$ ) od priemetne  $\pi$ . I keď tieto nemožno určiť – bez voľby základnice – explicitne, z nárysu je zrejmé, že orientovaná vzdialenosť bodu 3 od roviny  $\pi$  je väčšia než orientovaná vzdialenosť bodu 1 od tej istej priemetne:  $z^3 > z^1$ . V kolmom premietaní do roviny  $\pi$  je teda vzhľadom na rovinu  $\alpha$  viditeľná polpriamka  $\overrightarrow{R3}$ . Podľa zadania máme rozhodnúť o viditeľnosti priamky  $m$  vzhľadom na úplný trojuholník  $ABC$ ; viditeľná je preto polpriamka  $\overrightarrow{R3}$  a tá časť k nej opačnej polpriamky, ktorej pôdorys patrí vonkajšku trojuholníka  $A_1B_1C_1$  (časť polpriamky opačnej ku polpriamke  $\overrightarrow{R3}$  patriaca vonkajšku hranolovej plochy, ktorá je prvým premietacím útvarom trojuholníka  $ABC$ ).

b) *Viditeľnosť vzhľadom na kolmé premietanie do roviny  $\nu$ .* Analogicky si vyberieme dva rôzne body (bod priamky  $m$  a bod roviny  $\alpha$ ) na tej istej druhej premietacej priamke (nech bod roviny  $\alpha$  patrí hranici úplného trojuholníka  $ABC$ ), napr.  $4_2 = 5_2$  ( $4 \in m$ ,  $5 \in BC$ , t. j.  $5 \in \alpha$ ). Z polohy pôdorysov bodov 4, 5 vyplýva:  $y^4 < y^5$ , čo znamená, že vzhľadom na kolmý priemet konfigurácie do roviny  $\nu$  je viditeľný bod 5 (t. j. bod 4 viditeľný nie je) a následne z otvorenej polpriamky  $\overrightarrow{R4}$  priamky  $m$  je vzhľadom na úplný trojuholník  $ABC$  viditeľná len tá časť, ktorej nárys patrí vonkajšku trojuholníka  $A_2B_2C_2$ . Opačná polpriamka k tejto polpriamke je

<sup>18</sup> Dourčenie pôdorysu bodu  $R$  je zrejmé z incidencie  $R = m \cap l$  (t. j.  $R_1 \in m_1 \cap l_1$ ).

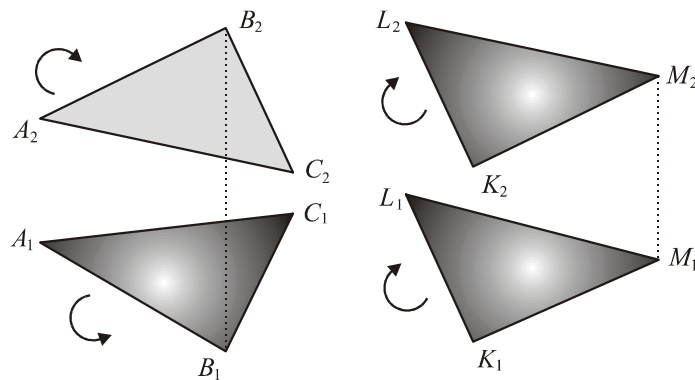
viditeľná celá.<sup>19</sup> Okrem toho zo súhlasnej orientácie zložiek obrazu trojuholníka  $ABC$  vyplýva viditeľnosť tej istej polpriamky priamky  $m$  vzhľadom na kolmé premietanie do rovín  $\pi$  i  $\nu$  (poznámka 3.2).

*Cvičenie.*

Na obr. 16a, b sú zobrazené dva úplné trojuholníky ( $\Delta ABC$ ,  $\Delta KLM$ ), ktoré sú oba zafarbené „z jednej strany matnou sivou“ farbou a „z druhej strany lesklou“ čiernou farbou. V oboch prípadoch je farba pôdorysu čierna. Dourčite farbu nárysov oboch trojuholníkov.

*Poznámka 3.2.*

Čitateľovi sa odporúča vymodelovať si danú priestorovú konfiguráciu pri ľubovoľnej voľbe navzájom kolmých priemetní (tieto môžu byť reprezentované otvoreným zošitom a trojuholník ľubovoľným materiálnym modelom). Na obrázku 16a bude farba nárysu sivá, na obrázku 16b čierna.<sup>20</sup> Odôvodnite. Okrem toho je na prvý pohľad zrejmé, že trojuholníky  $A_1B_1C_1$  a  $A_2B_2C_2$  sú nesúhlasne orientované a trojuholníky  $K_1L_1M_1$ ,  $K_2L_2M_2$  sú orientované súhlasne. Odtiaľ vyplýva, že v prvom prípade sú viditeľné – vzhľadom na kolmé premietanie do priemetne  $\pi$  a vzhľadom na kolmé premietanie do priemetne  $\nu$  – dva navzájom opačné polpriestory s hranicou v rovine  $\leftrightarrow ABC$  a v druhom prípade je vzhľadom na obe premietania viditeľný ten istý polpriestor s hranicou v rovine  $\leftrightarrow KLM$ .



Obr. 16a, b

**Úloha 3.4.** Určite vzájomnú polohu rovín  $\alpha$ ,  $\beta$ . V prípade rôznobežnosti rovín zostrojte ich priesečnicu.

*Riešenie.*

Všeobecný princíp riešenia úlohy o konštrukcii spoločného bodu dvoch rovín je voľba vhodnej tretej roviny  $\gamma$ , ktorej priesečnice s oboma rovinami sú jednoducho zostrojiteľné. Ak existuje spoločný bod  $M = (\alpha \cap \gamma) \cap (\beta \cap \gamma)$ , ide o spoločný bod rovín  $\alpha$ ,  $\beta$ , t. j.  $M \in \alpha \cap \beta$ . Zopakovaním postupu pre ďalšiu vhodnú rovinu sa dostane druhý bod priesečnice rovín. Konkrétna realizácia algoritmu riešenia závisí od zadania rovín  $\alpha$ ,  $\beta$ . Ak napr.  $\alpha = \leftrightarrow ab$ , možno zostrojiť body  $a \cap \beta$ ,  $b \cap \beta$  priesečnice (za predpokladu, že žiadna z priamok  $a$ ,  $b$  nie je rovnobežná s rovinou  $\beta$ ). V tomto postupe treťou vhodnou rovinou je rovina prechádzajúca priamkou  $a$ , resp. priamkou  $b$  (v úlohe 3.3 to bola prvá premietacia rovina  $\lambda$  priamky  $m$ ). Ak sú obe roviny  $\alpha$ ,  $\beta$  určené stopami, ktoré všetky neprechádzajú tým istým bodom, je

<sup>19</sup> Analogicky sú viditeľné všetky zvyšné body polpriestoru  $\mapsto \alpha 3$ . Preto hovoríme, že vzhľadom na rovinu  $\alpha$  je v kolmom premietaní do oboch priemetní viditeľný polpriestor  $\mapsto \alpha 3$ ; k nemu opačný otvorený polpriestor viditeľný nie je.

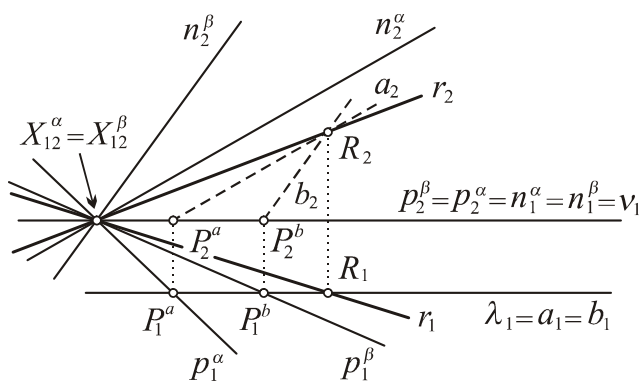
<sup>20</sup> Predpokladáme, že pozorovateľ sa nachádza v kladnom polpriestore s hranicou v rovine  $\pi$ , i  $\nu$  (1. kvadrant) tak, že trojuholník je umiestnený medzi ním a priemetňou.



priesečnica  $r = \alpha \cap \beta$  určená stopníkmi  $P^r = p^\alpha \cap p^\beta$ ,  $N^r = n^\alpha \cap n^\beta$ . Ak je jeden z priesečníkov  $P^r$ ,  $N^r$  nedostupný, ďalšia vhodná rovina je rovina rovnobežná s niektorou z priemetní. V prípade  $\alpha \parallel x \parallel \beta$  je vhodné zvoliť si roviny  $\gamma$  tak, aby bola prvou alebo druhou premietacou rovinou a nebola rovnobežná s priamkou  $x$  (analogicky ako v úlohe 3.2 rovina  $\lambda$ ). Na ilustráciu ukážeme riešenie úlohy pre roviny  $\alpha, \beta$  dané stopami tak, aby  $\alpha \cap x = \beta \cap x$ .<sup>21</sup>

Bod  $X^\alpha = X^\beta$  je jedným spoločným bodom rovín a roviny sú navzájom rôzne, t. j. ide o navzájom rôznobežné roviny. Druhý spoločný bod  $R$  rovín  $\alpha, \beta$  je zostrojený pomocou ľubovoľnej roviny  $\lambda$  rovnobežnej s rovinou  $\nu$  ( $\lambda \neq \nu, \lambda_1 \parallel \nu_1$ ). Rovina  $\lambda$  pretína rovinu  $\alpha$ , resp. rovinu  $\beta$  v hlavnej priamke  $a$ , resp.  $b$  druhej osnove príslušnej roviny, t. j.  $a \parallel n^\alpha, b \parallel n^\beta$ . Konštrukcia bodu  $R = a \cap b$  je zrejímavá z nárysu:  $R_2 = a_2 \cap b_2; R_1 \in \lambda_1 (= a_1 = b_1); R = (R_1, R_2)$ . Priesečnica  $r$  rovín je určená bodmi  $X^\alpha (= X^\beta), R$  ( $r = \leftrightarrow X^\alpha R$ ). (Obr. 17)

Záver:  $\alpha \cap \beta = r$  ( $r = (r_1, r_2)$ ).



Obr. 17

**Úloha 3.5.** Zostrojte priesek úplného trojuholníka  $ABC$  s rovinným pásom určeným navzájom rovnobežnými priamkami  $m, l$  ( $m \parallel l \parallel x$ ). (Obr. 18)

*Riešenie.*<sup>22</sup>

Označme  ${}^1U$  trojuholník  $ABC$  s jeho vnútrom,  ${}^2U$  daný rovinný pás a ich roviny  $\alpha, \beta$ :  ${}^1U \subset \alpha, {}^2U \subset \beta$ . Ak existuje nenulový prienik útvarov  ${}^1U, {}^2U$ , tak tento patrí priesečnici rovín  $\alpha, \beta$ .

**1.** Priesečnica  $r$  rovín  $\alpha, \beta$  je určená napríklad priesečníkmi priamok  $b = \leftrightarrow AC$  a  $c = \leftrightarrow AB$  ( $b \cup c \subset \alpha$ ) s rovinou  $\beta$ ; zostrojíme ich napr. použitím prvých premietacích rovín priamok  $b$ , resp.  $c$ . Uvedieme len symbolický zápis algoritmu konštrukcie:

$$b \cap \beta = b \cap (\lambda \cap \beta) = b \cap b' = R \quad (b' = \leftrightarrow 1'2', 1' \in m, 2' \in l, R = (R_1, R_2))$$

$$c \cap \beta = c \cap (\kappa \cap \beta) = c \cap c' = Q \quad (c' = \leftrightarrow 3'4', 3' \in m, 4' \in l, Q = (Q_1, Q_2))$$

**2.** Z danej priesečnice  $r = \leftrightarrow RQ$  rovín  $\alpha, \beta$  patrí úsečka  $RQ$  obojm prienikovým útvarom  ${}^iU$ , ( $i = 1, 2$ ), teda  ${}^1U \cap {}^2U = RQ$ . Body  $R, Q$  sú body hranice útvaru  ${}^1U$ , znamená to, že ide o úplný prienik.

**3.** Určenie viditeľnosti

**a)** Viditeľnosť častí útvarov  ${}^iU$  ( $i = 1, 2$ ) vzhľadom na kolmé premietanie do priemetne  $\pi$ . Z bodov  $1, 1' (1 \in {}^1U, 1' \in {}^2U)$  na tej istej prvej premietacej priamke (t. j.  $1_1 = 1'_1$ ) je viditeľný bod  $1'$  ( $z^{1'} > z^1; 1 \in AC, 1' \in m$ ). Viditeľné sú polpriestory  $\rightarrow \alpha 1'$  a  $\rightarrow \beta C$  ( $\rightarrow \beta 1$  viditeľný nie je), t. j. z útvarov  ${}^iU$  sú viditeľné prieniky  ${}^1U \cap \rightarrow \beta C$  a  ${}^2U \cap \rightarrow \alpha 1'$ . Navyše sú viditeľné

<sup>21</sup> Predkreslené zadania úlohy pre všetky ďalšie spomenuté polohy rovín nájde čitateľ v šiestej kapitole textu.

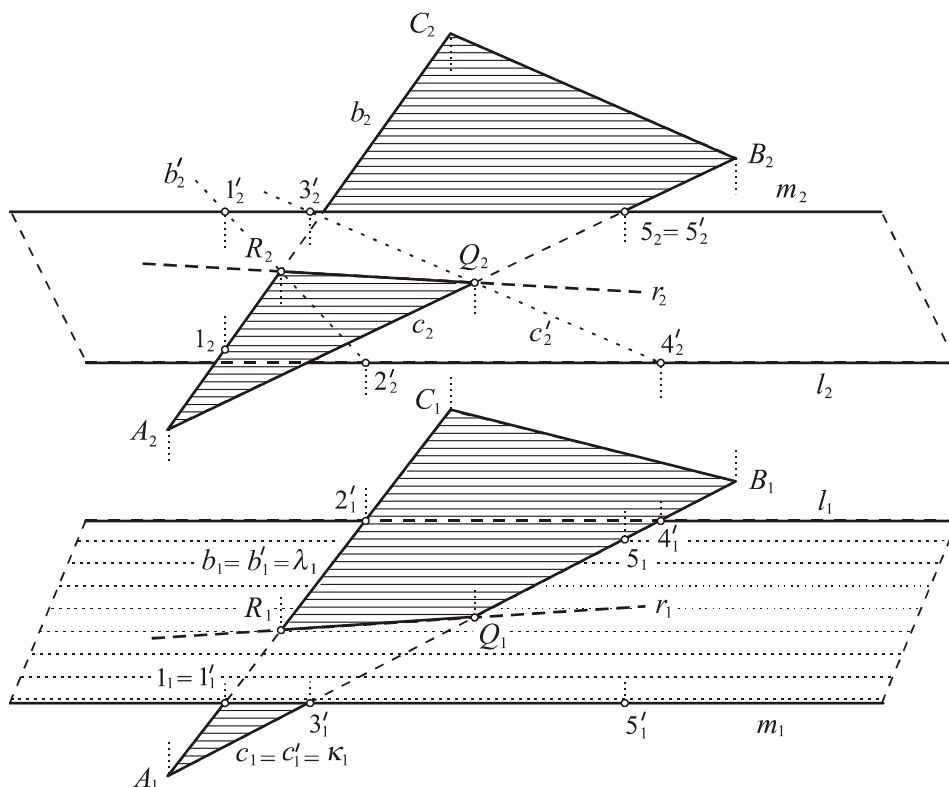
<sup>22</sup> Vysvetlenie potrebných pojmov čitateľ nájde v texte, ktorý je venovaný kótovanému zobrazeniu (úloha 4.7, [5]).

tie body útvaru  ${}^1U$ , resp.  ${}^2U$ , ktoré ležia v neviditeľnom polpriestore s hranicou v rovine  $\beta$ , resp.  $\alpha$ , ale ich pôdorysy sú vonkajšími bodmi vzhľadom na pôdorys útvaru  ${}^2U$ , resp.  ${}^1U$ .

**b) Viditeľnosť častí útvarov  ${}^1U$  vzhľadom na kolmé premietanie do priemetne  $v$ .**

Z bodov  $5, 5'$  ( $5 \in {}^1U, 5' \in {}^2U$ ) na tej istej druhej premietacej priamke (t. j.  $5_2 = 5'_2$ ) je viditeľný bod  $5'$  ( $y^{5'} > y^5; 5 \in AB, 5' \in m$ ). Viditeľné sú polpriestory  $\mapsto \alpha 5'$  a  $\mapsto \beta A$  ( $\mapsto \beta 5$  viditeľný nie je), t. j. z útvarov  ${}^1U$  sú viditeľné prieniky  ${}^1U \cap \mapsto \beta A$  a  ${}^2U \cap \mapsto \alpha 5'$ . Navyše sú viditeľné i tie body útvarov  ${}^1U$ , resp.  ${}^2U$ , ktoré síce ležia v príslušných neviditeľných polpriestoroch, ale ich nárysy sú vonkajšími bodmi vzhľadom na nárys útvaru  ${}^2U$ , resp.  ${}^1U$ .

Okrem toho je v pôdoryse i v náryse viditeľný ten istý polpriestor s hranicou v rovine  $\alpha$  ( $\mapsto \alpha 1' = \mapsto \alpha 5'$ ), no navzájom opačné polpriestory s hranicou v rovine  $\beta$  ( $\mapsto \beta C, \mapsto \beta A$ ) (pozrite si cvičenie, obr. 16a, b). Z trojuholníka  $ABC$  je preto viditeľná „tá istá strana“, zatiaľ čo rovinný pás vidíme z „navzájom opačných strán“. Tomu zodpovedá odlišné zafarbenie rovinného pásu v oboch obrazoch (obr. 18).



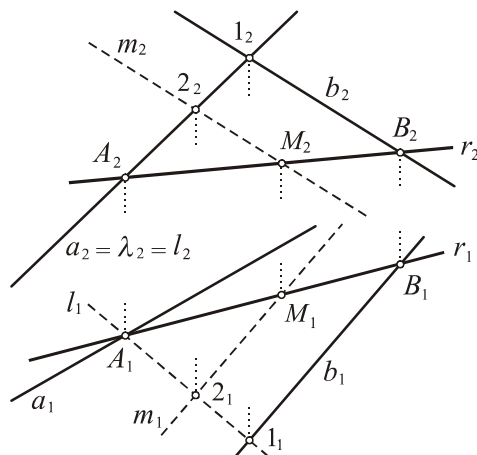
Obr. 18

**Úloha 3.6.** Zostrojte priečku priamok  $a, b$  prechádzajúcu daným bodom  $M$ . [ $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2), M = (M_1, M_2), (M_1 \neq M_2)$ ]. (Obr. 19)

*Riešenie*

Priamky  $a, b$  sú navzájom mimobežné (prečo?). Ak priečka  $r$  priamok  $a, b$  požadovaných vlastností existuje, tak platí: priamka  $r$  leží v rovine  $\beta$  ( $\beta = \leftrightarrow bM$ ) a jej ďalším bodom je priesečník priamky  $a$  s rovinou  $\beta$  ( $M \notin a$ ). Odtiaľ je zřejmý algoritmus riešenia úlohy, ktorý vyjadríme len symbolicky.

- $\beta = \leftrightarrow bM = \leftrightarrow bm (M \in m \wedge m \parallel b)$  <sup>23</sup>
- $a \cap \beta = a \cap (\lambda \cap \beta) = a \cap l = \{A\}$  ( $a \subset \lambda \wedge \lambda \perp v \Rightarrow \lambda_2 = a_2 = l_2$ ;  $l \subset \beta \Rightarrow l = \leftrightarrow 12, 1 \in b, 2 \in m$ );  $A_1 = a_1 \cap l_1$  – konštrukcia bodu  $A_2$  je zrejmá;  $A = (A_1, A_2)$
- Záver:  $r = \leftrightarrow AM, r = (r_1, r_2)$  <sup>24</sup>



Obr. 19

### Poznámka 3.3

Zamyslime sa nad tým, čo znamená riešenie polohových úloh v rovine /o rovine, ktorá nie je prvou ani druhou premietacou rovinou, z hľadiska vety 2.3. V nasledujúcej tabuľke sú v tom istom riadku vyjadrené *ekvivalentné* úlohy vzhľadom na riešenie v Mongeovej metóde. Odôvodnite.

1. Dourčiť pôdorys, resp. nárys bodu $A = (?, A_2)$ , resp. $A = (A_1, ?)$ tak, aby bod $A$ ležal v danej rovine $\alpha$ .	V danej perspektívnej afinite $f$ indukovanej v nákresni rovinou $\alpha$ ( $f: (\alpha_1) \rightarrow (\alpha_2)$ ) zostrojte vzor, resp. obraz bodu $A_2$ , resp. $A_1$ .
2. Zostrojte priesečník $A$ priamky $a = (a_1, a_2)$ s danou rovinou $\alpha$ .	Na danej usporiadanej dvojici priamok $(a_1, a_2)$ zostrojte usporiadanú dvojicu bodov $(A_1, A_2)$ ( $A_i \in a_i, i = 1, 2$ ) tak, aby $A_2 = f(A_1)$ , kde $f$ je perspektívna afinita z bodu 1.
3. Zostrojte priesečnicu $r$ rovín $\alpha, \beta$ .	Dané sú dve perspektívne afinity $f^\alpha, f^\beta$ . Zostrojte priamku $r_1$ , ktorú obe afinity zobrazia do tej istej priamky (t. j. $f^\alpha(r_1) = f^\beta(r_1) = r_2$ ).
4. Zostrojte spoločný bod $R$ rovín $\alpha, \beta, \gamma$ .	Dané sú tri perspektívne afinity $f^\alpha, f^\beta, f^\gamma$ . Zostrojte bod $R_1$ , ktorý dané afinity zobrazia do toho istého bodu (t. j. $f^\alpha(R_1) = f^\beta(R_1) = f^\gamma(R_1) = R_2$ ). <sup>25</sup>

<sup>23</sup> Vzhľadom na ďalší krok riešenia úlohy je výhodné zadanie roviny dvoma priamkami (priamky  $b, m$  by mohli byť aj rôznobežky).

<sup>24</sup> Presnosť rysovania si môže čitateľ skontrolovať konštrukciou bodu pričky na priamke  $b$ , t. j. bodu  $B = r \cap b$  ( $B_i = r_i \cap b_i (i = 1, 2) \Rightarrow B_1B_2 \parallel M_1M_2$ ).

<sup>25</sup>  $f^\alpha$ , resp.  $f^\beta$ , resp.  $f^\gamma$  sú perspektívne afinity v nákresni prislúchajúce rovinám  $\alpha, \beta, \gamma$  alebo všeobecne perspektívne afinity v tej istej rovine, ktoré majú navzájom rovnobežné slabó samodružné priamky.

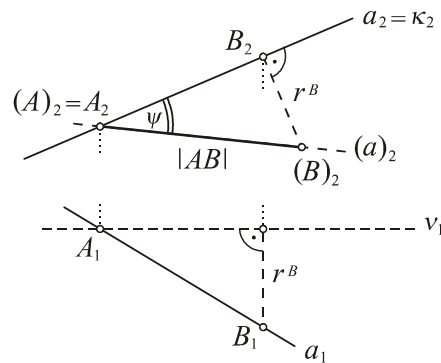
## 4 Riešenie metrických úloh v Mongeovej metóde

Základom riešenia metrických úloh je – tak ako v metóde kótovaného zobrazenia – otáčanie roviny. Algoritmus riešenia každej stereometrickej úlohy pozostáva totiž z postupnosti planimetrických úloh. Pretože v Mongeovej metóde sú pôdorysy a nárysy geometrických útvarov obrazy kolmých priemetov útvarov do priemetní  $\pi$  a  $\nu$ , majú otočené polohy rovinných útvarov ten istý vzťah k príslušným pravouhlým priemetom, ako to bolo v kótovanom zobrazení.<sup>26</sup> Pred uvedením vety o otáčaní roviny (vo všeobecnej polohe) do niektorej z priemetní alebo do úrovne vyriešime ako prvú úlohu o konštrukcii dĺžky úsečky.

### 4.1 Dĺžka úsečky, uhol priamky a roviny s priemetňou

**Úloha 4.1.** Zostrojte dĺžku úsečky  $AB$  a určite obe odchýlky priamky  $AB$ . [ $A = (A_1, A_2)$ ,  $B = (B_1, B_2)$ ] (Obr. 20)

*Riešenie.* Na obrázku je urobena konštrukcia dĺžky úsečky  $AB$  a uhla  $\psi$  ( $\psi \equiv \angle \leftrightarrow AB, \nu$ ) pomocou sklopenia roviny  $\kappa$  ( $AB \subset \kappa \wedge \kappa \perp \nu$ ) do roviny  $\nu'$  (napr.  $A \in \nu' \wedge \nu' \parallel \nu$ ).<sup>27</sup> Polomer otočenia bodu  $B$  v sklopení roviny  $\kappa$  do roviny  $\nu'$  sa rovná vzdialenosti bodu  $B$  od roviny  $\nu'$ :  $r^B = |B, \nu'| = |y^B - y^{\nu'}| = |B_1, \nu'_1|$  (vysvetlite). Konštrukcia nárysu  $(B)_2$  sklopanej polohy bodu  $B$  je zrejmá. Teda  $|AB| = |(A)_2(B)_2|$  a pre uhol  $\psi$  priamky  $a = \overline{AB}$  s priemetňou  $\nu$  platí:  $\psi \equiv \angle aa_2 \equiv \angle (a)_2 a_2$ . Druhá odchýlka priamky  $a$  sa rovná  $|\psi|$ .<sup>28</sup>



Obr. 20

*Iné riešenie úlohy.* Úlohu môžeme vyriešiť i tak, že prvú, resp. druhú premietáciu roviny priamky otočíme okolo prvej, resp. druhej premietacej priamky ľubovoľného bodu tejto priamky do polohy rovnobežnej s druhou, resp. prvou priemetňou. Po otočení je priamka so zvolenou priemetňou rovnobežná a dĺžku úsečky incidentnej s priamkou, ako aj uhol priamky so zvyšnou priemetňou možno určiť v náryse, resp. pôdoryse danej konfigurácie (napr. úloha 2.2). Na obrázku 21b je zostrojená dĺžka úsečky  $AB$  a uhol zhodný s uhlom  $\varphi$  priamky  $a = \overline{AB}$  s priemetňou  $\pi$ . Obrázok 21a je stereometrickou ilustráciou danej konfigurácie.<sup>29</sup>

<sup>26</sup> Čitateľovi sa odporúča pozrieť si paragraf 5 v učebnom texte venovanom kótovanému zobrazeniu. [5]

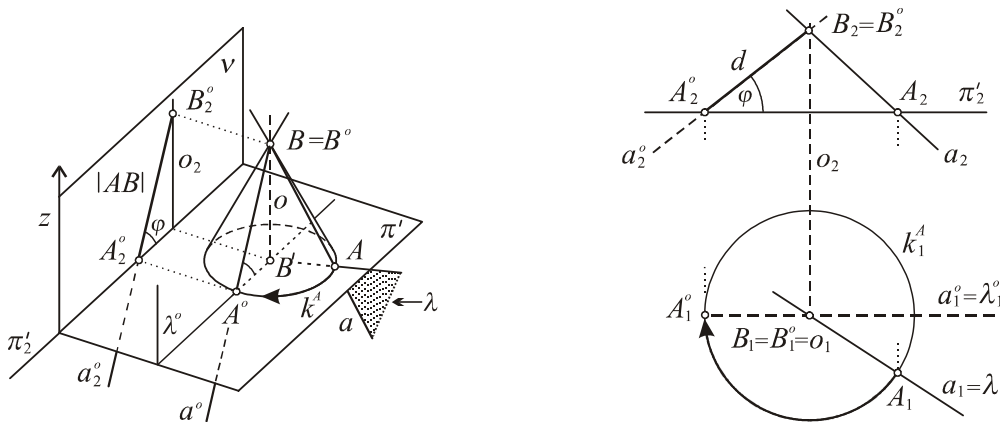
<sup>27</sup> Bod  $A$  leží v úrovni, teda  $A = (A)$  a stačí zostrojiť nárys sklopanej polohy bodu  $B$ .

<sup>28</sup> Určenie prvej odchýlky  $|\varphi|$ , t.j. konštrukcia uhla zhodného s uhlom priamky s priemetňou  $\pi$  je analogická. Na základe definície uhla priamky s rovinou je treba použiť prvú premietáciu roviny  $\lambda$  priamky  $a$  a túto sklopiť do vhodnej roviny  $\pi'$  ( $\pi' \parallel \pi$ ). Polomer otočenia ľubovoľného z bodov  $A, B$  je jeho vzdialenosť od úrovne  $\pi'$  a táto sa pohodlne určí v náryse konfigurácie. Konštrukcia sa necháva čitateľovi.

<sup>29</sup> Priamka  $a$  pri otáčaní okolo priamky  $o$  prebieha tvoriace priamky rotačnej kužeľovej plochy s osou v priamke  $o$ . Je to takzvaná spádová kužeľová plocha vzhľadom na priemetňu  $\pi$ , všetky jej tvoriace priamky majú ten istý spád vzhľadom na túto priemetňu. Pomocou dvoch spádových kužeľových plôch s vrcholom v bode  $B$  (jedna

*Konštrukcia.* Dané sú pôdorisy a nárysy bodov  $A, B$ .<sup>30</sup>

1. Zostrojíme prvú premietaciu rovinu  $\lambda$  priamky  $a = \overline{AB}$  ( $a \subset \lambda \wedge \lambda \perp \pi$ ).
2. Za os  $o$  otáčania roviny  $\lambda$  si zvolíme prvú premietaciu priamku bodu  $B$  ( $B \in o \wedge o \perp \pi$ ). Ak označíme symbolom „ $^\circ$ “ vpravo hore otočené polohy útvarov roviny  $\lambda$  v jej otáčaní do polohy  $\lambda^\circ$  ( $\lambda^\circ \parallel \nu$ ), tak platí:  $\lambda_1^\circ \parallel \nu_1 (= x_1)$  a  $B = B^\circ$  ( $B_i = B_i^\circ, i = 1, 2$ ).
3. Kružnica otáčania bodu  $A$  leží v rovine kolmej na os  $o$  otáčania ( $k^A \in \pi' \wedge \pi' \parallel \pi$ ) a bod  $A^\circ$  je ktorýkoľvek z bodov  $\lambda^\circ \cap k^A$  (podľa voľby jedného z dvoch otočení roviny  $\lambda$  do polohy  $\lambda^\circ$  rovnobežnej s priemetňou  $\nu$ ). Na obr. 21a je označený i bod  $B' = \pi' \cap o$ .<sup>31</sup>
4. Záver:  $\angle(a, \pi) \cong \angle(a^\circ, \pi') \cong \angle(a_2^\circ, \pi_2') \cong \varphi \wedge |AB| = |A^\circ B^\circ| = |A_2^\circ B_2^\circ| = d$



Obr. 21a, b

Použitím uvedenej konštrukcie otočenia premietacej roviny možno dokázať nasledujúce dve tvrdenia:

#### Veta 4.1

- a) Nech  $\varphi$ , resp.  $\psi$  sú uhly ľubovoľnej priamky s priemetňami  $\pi$ , resp.  $\nu$ . Potom platí:  $\varphi + \psi \leq R$ , pričom rovnosť nastane práve v prípade priamky kolmej na priesečnicu  $x = \pi \cap \nu$ .<sup>32</sup>
- b) Nech  $\varphi$ , resp.  $\psi$  sú uhly ľubovoľnej roviny s priemetňami  $\pi$ , resp.  $\nu$ . Potom platí:  $\varphi + \psi \geq R$ , pričom rovnosť nastane práve v prípade roviny rovnobežnej s priesečnicou  $x = \pi \cap \nu$ .

*Dôkaz.* (Obr. 22a, b)

a) 1. Nech je  $a$  ľubovoľná priamka, ktorá má všeobecnú polohu vzhľadom na priemetne. Podľa úlohy 4.1 zostrojme uhol  $\varphi$  zhodný s uhlom priamky  $a$  s priemetňou  $\pi$  použitím otočenia prvej premietacej roviny  $\lambda$  ( $a \subset \lambda \wedge \lambda \perp \pi$ ) do polohy  $\lambda^\circ \parallel \nu$ ; nech osou otáčania je prvá premietacia priamka  $o$  ľubovoľného bodu  $A \in a$  a  $B$  je ďalší ľubovoľný bod priamky  $a$ . Otočené polohy útvarov roviny  $\lambda$  budeme označovať pravým horným indexom „ $^\circ$ “. Platí:

$$\varphi \cong \angle(a, \pi) \cong \angle(a_2^\circ, \pi_2') \quad (\pi' \text{ je rovina otáčania bodu } B), |AB| = |A_2^\circ B_2^\circ| = d.$$

vzhľadom na rovinu  $\pi$ , druhá vzhľadom na rovinu  $\nu$ ) možno vyriešiť úlohu o konštrukcii priamky, ktorá prechádza daným bodom  $B$  a má odchýlky  $|\varphi|$ , resp.  $|\psi|$  s priemetňami  $\pi$ , resp.  $\nu$ . Úloha je riešiteľná, ak obe odchýlky priamky spĺňajú vetu 4.1.

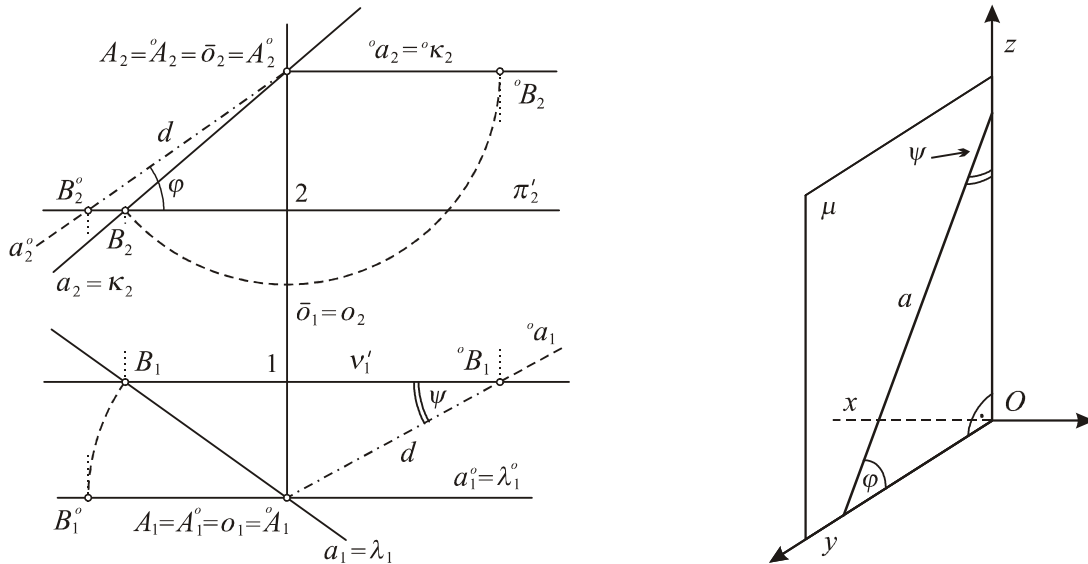
<sup>30</sup> Ak oba body ležia v rovine totožnosti, t.j.  $A_1 = A_2, B_1 = B_2$ , je potrebné zadať smer ordinál Mongeovej metódy.

<sup>31</sup> Konštrukcia uhla priamky s priemetňou  $\nu$  je celkom analogická a necháva sa čitateľovi.

<sup>32</sup>  $R$  je označenie pravého uhla.

2. Analogicky zostrojme uhol  $\psi$  zhodný s uhlom priamky  $a$  s priemetňou  $\nu$  pomocou otočenia druhej premietacej roviny  $\kappa$  ( $a \subset \kappa \wedge \kappa \perp \nu$ ) do polohy  ${}^{\circ}\kappa \parallel \pi$ ; za os otáčania sme si zvolili druhú premietacu priamku  $\bar{o}$  bodu  $A$ . Otočené polohy útvarov roviny  $\kappa$  budeme označovať ľavým horným indexom „ ${}^{\circ}$ “. Potom:

$$\psi \equiv \angle(a, \nu) \equiv \angle({}^{\circ}a_1, \nu'_1) \quad (\nu'_1 \text{ je rovina otáčania bodu } B), \quad |AB| = |{}^{\circ}A_1 {}^{\circ}B_1| = d$$



Obr. 22a, b

3. Ak označíme 1, resp. 2 priesečníky ordinály bodu  $A$  s priamkami  $\nu'_1$ , resp.  $\pi'_2$ , tak z pravouhlých trojuholníkov  $A_2 2 B_2^{\circ}$ ,  $A_1 B_1 1$  a  $A_1 {}^{\circ} B_1$  vyplýva:

$$|A_1 B_1| = |2 B_2^{\circ}| = d \cdot \cos |\varphi| > |A_1 1| = d \cdot \sin |\psi|, \text{ odkiaľ dostaneme:}$$

$$\cos |\varphi| > \sin |\psi| = \cos |R - \psi|, \text{ t. j. } \varphi < R - \psi \Rightarrow \varphi + \psi < R \text{ (Obr. 22a)}$$

V prípade priamky kolmej na priesečnicu priemetní platí  $\varphi + \psi \equiv R$ , pričom niektorý z uhlov môže byť aj nulový (obr. 22b). Obrátene, ak pre uhly  $\varphi$ ,  $\psi$  priamky s priemetňami platí  $\varphi + \psi \equiv R$ , tak je táto priamka kolmá na priesečnicu priemetní. (Odôvodnite.)

**b)** Nech je  $\alpha$  ľubovoľná rovina, ktorá nie je rovnobežná s priamkou  $x$  a  $k$  ľubovoľná priamka kolmá na túto rovinu. Ak zavedieme označenie:  $\varphi \equiv \angle(\alpha, \pi)$ ,  $\psi \equiv \angle(\alpha, \nu)$ , tak platí:

$$\angle(k, \pi) \equiv R - \varphi, \angle(k, \nu) \equiv R - \psi \text{ (prečo?)}$$

Priamka  $k$  nie je kolmá na priesečnicu priemetní (odôvodnite). Podľa a) teda dostaneme:

$$(R - \varphi) + (R - \psi) < R \Rightarrow \varphi + \psi > R$$

(Doplnenie dôkazu pre roviny rovnobežnú s priamkou  $x = \pi \cap \nu$  sa necháva čitateľovi.)

*Poznámka.* Otáčanie roviny kolmej na jednu z priemetní do polohy rovnobežnej so zvyšnou priemetňou je *efektívnou metódou* riešenia i polohových úloh o rotačných telesách a plochách. Ide o konštrukcie dotkových rovín požadovanej vlastnosti, prienikov s rovinami, konštrukcie hraníc vlastných tieňov, resp. obrysov rotačných plôch v rovnobežnom i stredovom osvetlení, resp. premietaní a pod. Na ilustráciu uvedieme riešenie úlohy o konštrukcii rovinného rezu guľovej plochy (úloha 5.4). Táto úloha, ako aj ďalšie aplikačné úlohy, bude súčasťou súboru rozmanitých riešených úloh v nasledujúcom paragrafe (par. 5) tohto textu.

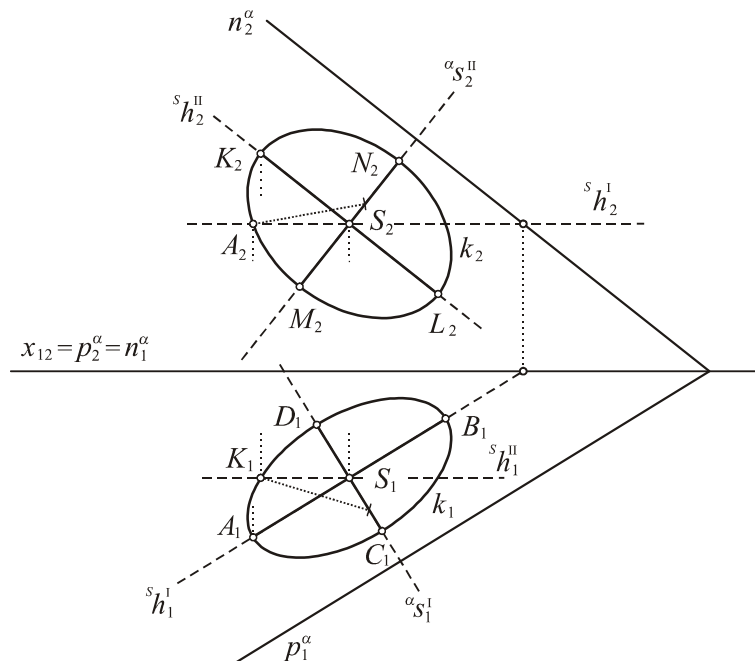
## 4.2 Perspektívna afinita otáčania roviny vo všeobecnej polohe. Obraz kružnice

**Veta 4.2** Medzi pôdorysmi, resp. nárýsmi bodov roviny  $\alpha$ , ktorá nie je s priemetňou  $\pi$ , resp.  $\nu$  rovnobežná ani na ňu kolmá, a pôdorysmi, resp. nárýsmi otočených polôh týchto bodov v otočení roviny  $\alpha$  do roviny  $\pi$ , resp. do roviny  $\nu$  alebo do príslušnej úrovne je vzťah pravouhlej perspektívnej afinity, ktorej osou je pôdorys, resp. nárýs hlavnej priamky, ktorá je osou otáčania danej roviny.<sup>33</sup>

*Poznámka.* Príklad na konštrukciu určujúcich prvkov perspektívnej afinity otáčania roviny sa pre jednoduchú analógiu s kótovaným zobrazením uvádzať nebude. Vo viacerých úlohách komplexnejšieho charakteru bude táto konštrukcia súčasťou algoritmu riešenia úlohy (napríklad v úlohách venovaných konštrukcii obrazov základných telies a plôch, ako aj aplikačných úloh o nich v Mongeovej metóde (úloha 5.1, paragraf 5)). V nasledujúcej úlohe sa budeme zaoberať konštrukciou obrazu kružnice; ukáže sa, že konštrukciu možno jednoducho urobiť i bez otočenia roviny kružnice na základe vety o pravouhlom priemete kružnice dokázanej v texte venovanom kótovanému zobrazeniu ([5] veta 5.4 a úloha 5.5).<sup>34</sup>

**Úloha 4.2** Daná je rovina  $\alpha = \overrightarrow{p^\alpha n^\alpha}$  a jej bod  $S$ . Zobrazte kružnicu  $k$  roviny  $\alpha$  so stredom v bode  $S$  a polomerom  $r$ . [ $S = (S_1, ?)$ , polomer  $r$  kružnice si zvolíte ľubovoľne.] (Obr. 23a)

*Riešenie. 1.* Dourčenie bodu  $S$  roviny  $\alpha$  je zrejmé z prebraných polohových úloh. (Použili sme hlavnú priamku prvej osnovy roviny  $\alpha$ , ktorá prechádza bodom  $S$ .)



Obr. 23a

**2.** Podľa vety o pravouhlom priemete kružnice, ktorej rovina nie je premietacia ani rovnobežná s priemetňou ([5], veta 5.4) je elipsa  $k_1 = (A_1B_1, C_1D_1)$ , ktorej hlavná os  $A_1B_1$  leží na pôdoryse hlavnej priamky prvej osnovy roviny  $\alpha$  ( ${}^S h^1$ ) a je zhodná s priemerom kružnice. Analogicky pre hlavnú os elipsy  $k_2 = (K_2L_2, M_2N_2)$  platí:  $K_2L_2 \subset {}^S h_2^{II} \wedge |K_2L_2| = |A_1B_1| = 2r$ .

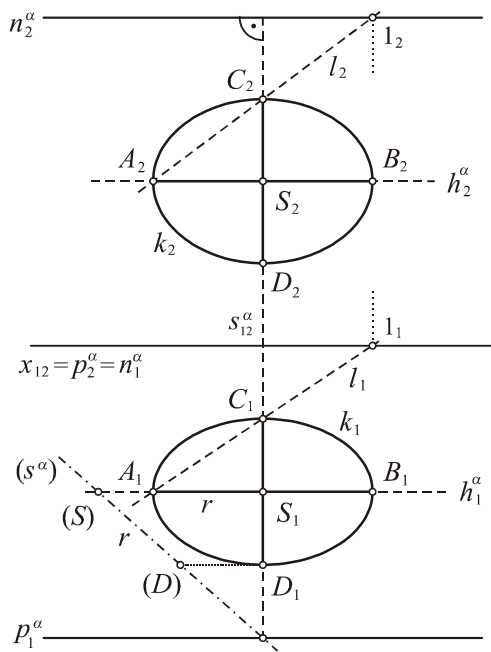
<sup>33</sup> Veta je dôsledkom analogickej vety dokázanej v kapitole venovanej kótovanému zobrazeniu ([5], vety 5.1, 5.2.).

<sup>34</sup> Čitateľovi sa odporúča oboznámiť sa so znením vety, jej dôkazom a aplikáciou vety v riešení úlohy 5.5.

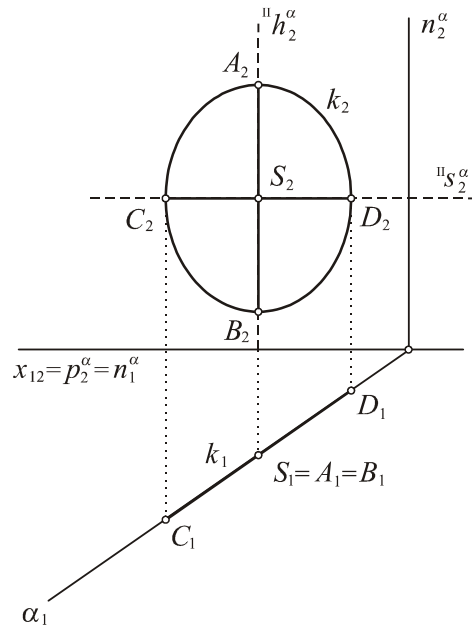
3. Vedľajšiu os  $C_1D_1$  elipsy  $k_1$ , resp.  $M_2N_2$  elipsy  $k_2$  môžeme zostrojiť prúžkovou konštrukciou pomocou jej ďalšieho bodu, napr.  $K_1$ , resp.  $A_2$  ([4]). Záver:  $k = (k_1, k_2)$ .

*Poznámky*

1. Na konštrukciu obrazu kružnice roviny  $\alpha$  vo všeobecnej polohe v Mongeovom zobrazení teda nie je potrebné otočenie roviny kružnice. Výnimkou je prípad roviny rovnobežnej s priamkou  $x$ , t.j. ak  $p^\alpha \parallel n^\alpha \parallel x$ . Hlavná priamka prvej osnvy roviny je súčasne hlavnou priamkou druhej osnvy, čo znamená, že do osí elíps  $k_i$  sa zobrazia tie isté navzájom kolmé priemery  $AB, CD$  kružnice  $k$ . Na dourčenie pôdorysu  $k_1$  danej kružnice stačí zostrojiť pôdorys napr. bodu  $D$  spádovej priamky roviny  $\alpha$  (incidentnej so stredom  $S$  kružnice  $k$ ). Túto konštrukciu urobíme pomocou sklopenia premietacej roviny tejto spádovej priamky do priemetne  $\pi$ . Pre bod  $D$  platí:  $D \in s^\alpha \wedge |DS| = r$ , odkiaľ je zrejma konštrukcia sklopenej polohy ( $D$ ) bodu  $D$  a spätne jeho pôdorysu  $D_1$ . Pre bod  $C_1$  platí:  $(C_1D_1S_1) = -1$  (odôvodnite). Konštrukcia nárysu niektorého z bodov  $C, D$  je elementárnou polohovou úlohou.<sup>35</sup> (Obr. 23b)



Obr. 23b



Obr. 23c

2. V prípade roviny rovnobežnej s priemetňou, napr.  $\alpha \parallel \pi$ , je pôdorys  $k_1$  kružnica zhodná s kružnicou  $k$  a nárysom kružnice je úsečka ( $k_2 \subset \alpha_2$  ( $\alpha_2 \parallel \pi_2$ )) zhodná s priemerom kružnice.

V prípade roviny, ktorá je kolmá na jednu z priemetní a nie je rovnobežná so zvyšnou priemetňou, napr.  $\alpha \perp \pi$ ,  $\alpha \# \nu$ , je pôdorysom kružnice  $k$  úsečka ( $k_1 \subset \alpha_1$ ) zhodná s jej priemerom a nárysom je elipsa  $k_2 = (A_2B_2, C_2D_2)$ , kde  $AB$  je priemer kružnice na hlavnej priamke druhej osnvy roviny ( $|A_2B_2| = 2r$ ) a body  $C_2, D_2$  sú nárysy bodov  $C, D$ , ktorých pôdorysy sú krajnými bodmi úsečky  $k_1$ . ( $CD \parallel \pi$ , t.j. priamka  $CD$  je hlavnou priamkou prvej osnvy roviny  $\alpha$ ; ale pretože je táto priamka kolmá na nárysnú stopu  $n^\alpha$  roviny (odôvodnite), je súčasne i jej spádovou priamkou druhej osnvy.) (Obr. 23c)<sup>36</sup>

<sup>35</sup> Na obrázku je zostrojený nárys bodu  $C$  pomocou priamky  $l = \leftrightarrow AC$  a jej bodu  $1 = \leftrightarrow AC \cap n^\alpha$ .

<sup>36</sup> Formulujte analogické tvrdenia o obraze kružnice v rovine rovnobežnej s priemetňou  $\nu$  a obraze kružnice v rovine kolmej na priemetňu  $\nu$  a nerovnobežnej s rovinou  $\pi$ .

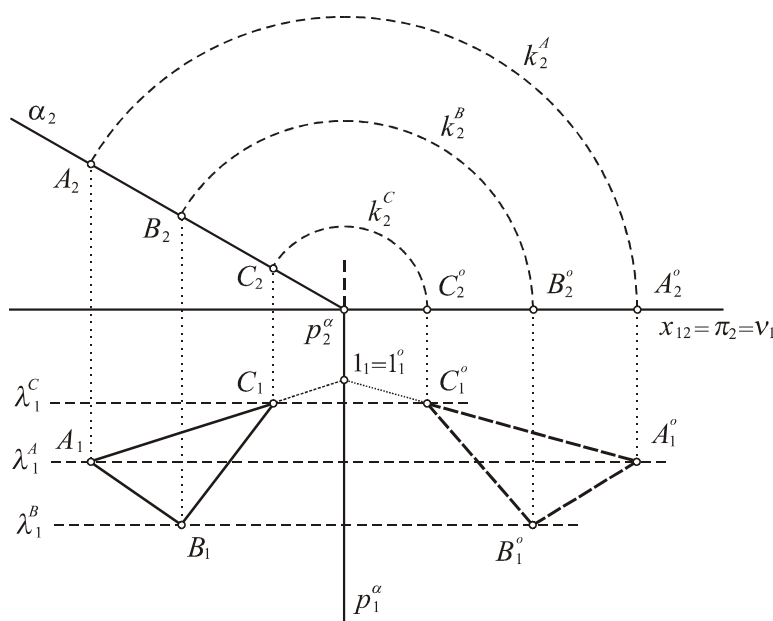


**Úloha 4.3** Daný je obraz trojuholníka  $ABC$ , ktorý leží v rovine  $\alpha$  kolmej na jednu z priemetní, ktorá nie je rovnobežná so zvisnou priemetňou, ani na ňu kolmá (napr.  $\alpha \perp v$ , obr. 24). Zostrojte trojuholník zhodný s trojuholníkom  $ABC$ . [ $A = (A_1, ?)$ ,  $B = (B_1, ?)$ ,  $C = (C_1, ?)$ ;  $\alpha = (?, \alpha_2)$ ]

*Riešenie*

Úlohu budeme riešiť pomocou otočenia roviny  $\alpha$  do priemetne  $\pi$ .<sup>37</sup>

1. Osou otáčania danej roviny  $\alpha$  je priesečnica  $\alpha \cap \pi = p^\alpha$ . Rovina otáčania každého bodu danej roviny je kolmá na jej os otáčania, čo znamená, že ide o rovinu rovnobežnú s priemetňou  $v$ . Nárýs kružnice otočenia každého bodu je preto zhodný s touto kružnicou a má stred v bode, ktorý je nárýsom osi otáčania  $p^\alpha$  (odôvodnite), t. j. v bode  $p_2^\alpha$ . Odtiaľ vyplýva jednoduchá konštrukcia nárýsov otočených polôh bodov:  $M_2^\circ = k_2^M \cap \pi_2$  (kde  $M^\circ$ , resp.  $k^M$  je označenie otočenej polohy, resp. príslušnej kružnice otočenia ľubovoľného bodu  $M$  ( $M \in \alpha, M \notin \pi$ );  $\lambda^M$  je označenie roviny otáčania bodu  $M$ ). (Obr. 24)



Obr. 24

2. Pôdorysy rovín otáčania jednotlivých bodov sú priamky, odkiaľ je zrejmé i jednoduchá konštrukcia pôdorysov otočených polôh bodov. Okrem toho je perspektívna afinita  $f$  otáčania roviny  $\alpha$  do roviny  $\pi$  určená osou  $p_1^\alpha$  a napríklad usporiadanou dvojicou bodov  $A_1, A_1^\circ$ . Čitateľ si môže skontrolovať presnosť konštrukcie pomocou konštrukcie samodružných bodov na priamkach, ktoré obsahujú strany trojuholníka  $A_1B_1C_1$ , ako aj presvedčiť sa o výhodnosti navrhnutej vykonanej konštrukcie bez použitia perspektívnej afinity  $f: (\alpha_1) \rightarrow (\alpha_1^\circ)$ . Na obrázku je zostrojený len samodružný bod priamky  $A_1C_1$  v afinite  $f$ .

<sup>37</sup> Mohli by sme použiť i sklápajú roviny kružnice do priemetne  $v$ . I keď sa metóda sklápajú roviny môže javiť jednoduchšou, vzhľadom na ďalšie aplikácie budeme úlohu riešiť dohodnutým spôsobom. Ukáže sa, že pri danej polohe roviny  $\alpha$  nie je potrebné zostrojovať polomer otočenia žiadneho bodu, čím sa konštrukcia stane dokonca jednoduchšou a prehľadnejšou (hlavne v prípade rovinného  $n$ -uholníka s väčším počtom vrcholov). Riešenie sa používa v riešení úloh o konštrukcii plášťov šikmých telies typu hranol – valec a následne modelov šikmých hranolov a valcov, aj s prípadnými rovinnými rezmi.

### 4.3 Priamka kolmá na rovinu a rovina kolmá na priamku. Aplikačné úlohy

V kótovanom zobrazení sme dokázali, že ak je priamka kolmá na rovinu, ktorá nie je rovnobežná s priemetňou, tak jej pravouhlý priemet do priemetne je kolmý na pravouhlý priemet hlavnej priamky roviny (vzhľadom na zvolenú priemetňu). V Mongeovom zobrazení potom platí:

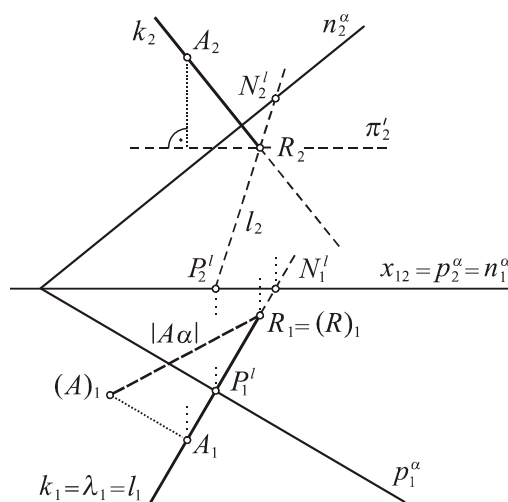
#### Veta 4.3

a) Ak je priamka  $k$  kolmá na rovinu  $\alpha$ , ktorá nie je rovnobežná so žiadnou z priemetní  $\pi, \nu$ , tak platí:  $k_1 \perp {}^1h_1 \wedge k_2 \perp {}^2h_2$ , kde  ${}^1h$ , resp.  ${}^2h$  je hlavná priamka prvej, resp. druhej osnovy roviny  $\alpha$ .

b) Priamka  $k$  je kolmá na rovinu  $\alpha$ , ktorá nie je rovnobežná s priesečnicou  $x$  priemetní  $\pi, \nu$  práve vtedy, keď platí:  $k_1 \perp {}^1h_1, k_2 \perp {}^2h_2$ , kde  ${}^1h$ , resp.  ${}^2h$  je hlavná priamka prvej, resp. druhej osnovy roviny  $\alpha$ .<sup>38</sup>

*Poznámka.* Vzhľadom na určenie priamky v Mongeovej metóde je dôsledkom bodu b) vety 4.3 fakt, že priamka kolmá na rovinu je – v prípade roviny nerovnobežnej s priesečnicou  $x$  priemetní – určená svojím pôdorysom a nárysom. Tým sa konštrukcia priamky kolmej na rovinu v takejto polohe a splňujúcej ďalšiu predpísanú podmienku značne zjednodušuje. Konštrukcia je súčasťou riešenia úloh 4.5, resp. 4.6 (obr. 25, resp. 26, 27).

**Úloha 4.5** Zostrojte vzdialenosť bodu  $A = (A_1, A_2)$  od roviny  $\alpha = \leftrightarrow p^\alpha n^\alpha$ . (Obr. 25)



Obr. 25

*Riešenie.*

Vzdialenosť bodu  $A$  od roviny  $\alpha$  sa rovná dĺžke úsečky  $AR$ , kde bod  $R$  je päta kolmice prechádzajúcej bodom  $A$  na rovinu  $\alpha$ . Odtiaľ vyplýva nasledujúca jednoduchá konštrukcia.

a) Rovina  $\alpha$  nie je rovnobežná s priamkou  $x$ , odkiaľ vyplýva podľa vety 4.3b jednoduchá konštrukcia priamky  $k$  ( $A \in k \wedge k \perp \alpha$ ). Platí:  $A_i \in k_i$  ( $i = 1, 2$ )  $\wedge k_1 \perp p_1^\alpha \wedge k_2 \perp n_2^\alpha$ . Podľa poznámky za vetou 4.3 je priamka  $k$  určená.

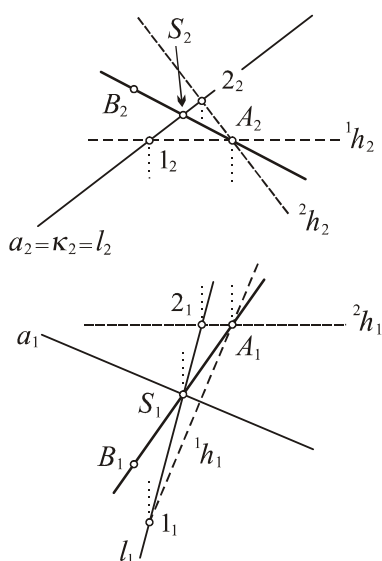
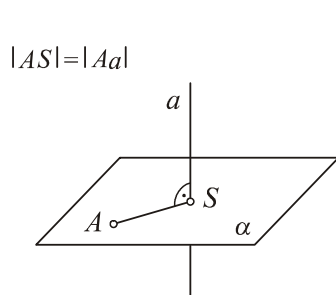
b) Bod  $R = k \cap \alpha$  je päta kolmice z daného bodu  $A$  na danú rovinu.

<sup>38</sup> Špeciálne, za podmienok uvedených v a), resp. b) platí:  $k \perp \alpha \Rightarrow k_1 \perp p_1^\alpha, k_2 \perp n_2^\alpha$ , resp.  $k \perp \alpha \Leftrightarrow k_1 \perp p_1^\alpha, k_2 \perp n_2^\alpha$ .

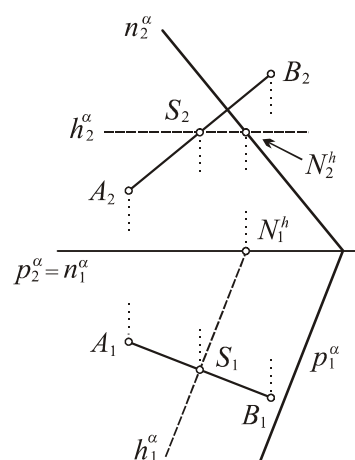
c) Záver:  $|A\alpha| = |AR|$

Konstrúcia priesečníka priamky  $k$  s rovinou  $\alpha$ , ako aj dĺžky úsečky  $AR$  sa pre jednoduchosť neuvádza. Na obrázku 25 je použitá prvá premietacia rovina priamky  $k$  ( $\lambda: k \subset \lambda, \lambda \perp \pi$ ) v bode b) algoritmu riešenia a sklopenie tejto roviny do úrovne  $\pi'$  v bode c). Priamka  $l = \lambda \cap \alpha$  je spádovou priamkou prvej osnovy danej roviny. Určili sme i viditeľnú polpriamku priamky  $k$  so začiatkom  $R$  vzhľadom na danú rovinu a na kolmé premietanie do priemetne  $\pi$ , resp.  $\nu$ . Odôvodnite, prečo z nerovností  $z^A > z^R, y^A > y^R$  vyplýva viditeľnosť polpriestoru  $\rightarrow \alpha A$ , t. j. polpriamky  $\rightarrow RA$  v oboch prípadoch.

**Úloha 4.6** Zostrojte rovinu  $\alpha$  prechádzajúcu bodom  $A$  a kolmú na danú priamku  $a$ . [ $A = (A_1, A_2), a = (a_1, a_2)$ ]. (Obr. 26)



Obr. 26



Obr. 27

**Riešenie**

Podľa definície je priamka  $a$  kolmá na rovinu  $\alpha$  práve vtedy, keď je rovinu  $\alpha$  kolmá na priamku  $a$ . Pretože daná priamka  $a$  nie je kolmá na priesečnicu  $x$  priemetní, možno pri konštrukcii roviny požadovaných vlastností použiť vetu 4.3. Rovina je určená dvoma navzájom rovnobežnými (rôznymi) alebo rôznobežnými priamkami, preto stačí zostrojiť hlavné priamky oboch osnov roviny  $\alpha$  tak, aby prechádzali bodom  $A$ . Pri označení hlavnej priamky prvej, resp. druhej osnovy roviny požadovaných vlastností  ${}^1h$ , resp.  ${}^2h$  platí:

$$A_i \in {}^1h_i \cap {}^2h_i, {}^1h_1 \perp a_1, {}^2h_2 \perp a_2 \quad (i = 1, 2), \text{ t. j. } \alpha = \leftrightarrow {}^1h^2h.$$

Na obr. 26 je zostrojený i priesečník  $S$  roviny  $\alpha$  s priamkou  $a$  a bod  $B$ , pre ktorý je bod  $S$  stredom úsečky  $AB$ . Okrem pôvodnej úlohy (4.6) je preto tento obrázok i ilustráciou riešenia nasledujúcich troch úloh: – zostrojte priamku, ktorá prechádza daným bodom  $A$ , je kolmá na danú priamku  $a$  a je s touto priamkou rôznobežná (riešením je priamka  $\leftrightarrow AS$ ); zostrojte vzdialenosť bodu  $A$  od priamky  $a$ ; – zostrojte bod  $B$ , ktorý je súmerne združený s bodom  $A$  podľa priamky  $a$ . Urobte zápis aj iného stereometrického riešenia oboch úloh a presvedčte sa o výhodnosti riešenia pomocou roviny kolmej na danú priamku.

V riešení úlohy 4.6, ak je daná základnica, stačí zostrojiť jednu z hlavných priamok  ${}^i h$  ( $i = 1, 2$ ) incidentnú s bodom  $S$  (konštruovaná je hlavná priamka prvej osnovy roviny s označením  $h^\alpha$ ) a zostrojiť stopy roviny  $\alpha$ . Tento postup ilustruje obrázok 27, na ktorom je riešená úloha: Zostrojte rovinu súmernosti danej úsečky  $AB$ , t. j. rovinu, ktorá prechádza stredom  $S$  úsečky  $a$  a je kolmá na priamku incidentnú s danou úsečkou. Urobte podrobnejší zápis riešenia.

## 5 Konštrukcie obrazov základných telies. Riešenie stereometrických úloh o základných telesách a plochách v Mongeovej metóde

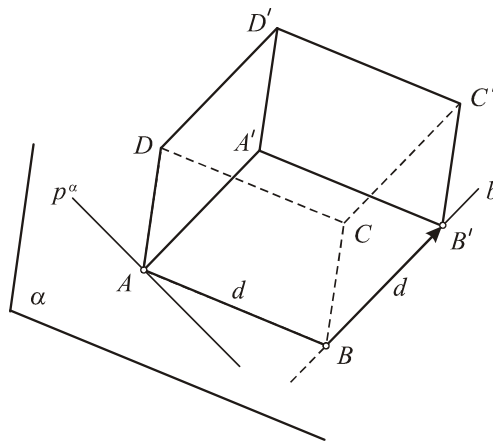
Piata kapitola učebného textu je zameraná na aplikáciu Mongeovej metódy na riešenie rozmanitých stereometrických úloh o základných telesách a plochách. Riešenie takýchto úloh si vyžaduje – okrem dokonalého ovládania polohových a metrických vlastností priestorových útvarov, ktorými sa budeme zaoberať – bezpečné ovládanie ich reprezentácie v Mongeovom zobrazení. Táto plánovaná zbierka riešených úloh je v etape svojho zrodu. Prvá časť bude venovaná zobrazeniu základných telies a plôch, predovšetkým vo všeobecných polohách vzhľadom na základné priemetne  $\pi$ ,  $\nu$ . Na začiatku predstavíme riešenie len niektorých „typových“ úloh a zbierku budeme postupne obohacovať riešeniami komplexnejších stereometrických úloh (vzájomné polohy priestorových útvarov s rovinami a priamkami, konštrukcie styčných a dotykových rovín požadovaných vlastností, konštrukcie súvisiace s osvetlením/premietaním, zobrazenie netriviálnych pravidelných mnohostenov, dve sústavy kružnicových rezov kružnicovej valcovej / kužeľovej plochy a i.). Zbierku budeme dopĺňať aj vydatenými úlohami, ktoré boli vypracované v rámci bakalárskych a magisterských prác.

**Úloha 5.1.** Zostrojte kocku so stenou  $ABCD$  v danej rovine  $\alpha$ , ak je daný vrchol  $B'$  protíľahlej steny a vrchol  $A$  leží v priemetni  $\pi$  (pri štandardnom označení vrcholov telesa<sup>39</sup>). Zobrazte riešenie, pre ktoré platí:  $x^A < x^B$ . [Rovina  $\alpha$  je určená obrazmi stôp  $p^\alpha$ ,  $n^\alpha$  a bod  $B'$  svojím pôdorysom a nárysom ( $B'_1, B'_2$ ).] (Obr. 28b)

*Riešenie*

a) *Stereometrické riešenie úlohy*

**1. Konštrukcia vrcholu  $B$  steny kocky v rovine  $\alpha$ .** Vrchol  $B$  je kolmým priemetom bodu  $B'$  do roviny  $\alpha$ , teda priesečníkom priamky  $b$  ( $B' \in b \wedge b \perp \alpha$ ) s touto rovinou. (Obr. 28a)



Obr. 28a

**2. Konštrukcia vrcholu  $A$ .** Bod  $A$  leží v rovinách  $\alpha$  a  $\pi$ , t. j. je bodom ich priesečnice  $\alpha \cap \pi = p^\alpha$  a hrana  $AB$  kocky je zhodná s hranou  $BB'$ . Pri konštrukcii v nákresni sa ukáže, že v rovine  $\alpha$  (pri zvolenom zadaní) existuje práve jeden bod stopy  $p^\alpha$  roviny, ktorý má požadované vlastnosti v zadaní úlohy ( $AB \cong BB' \wedge x^A < x^B$ ).

<sup>39</sup> Za štandardné považujeme také označenie vrcholov telesa, pri ktorom sú spojnice rovnomenných vrcholov ( $A, A'$ ;  $B, B'$ , atď.) kolmé na rovinu steny  $ABCD$ . Priamky určené týmito dvojicami vrcholov budeme označovať rovnomennými malými písmenami  $a, b, c, d$ . Takéto jednoduché označenie je výhodné hlavne pri zložitejších úlohách (v porovnaní s práve riešenou úlohou). V úlohe sme písmenom  $d$  označili dĺžku hrany kocky.

3. Konštrukcia štvorca  $ABCD$  v rovine  $\alpha$ . V rovine  $\alpha$  existujú práve dva štvorce so spoločnou stranou  $AB$ . Úloha má dve riešenia, zobrazíme ľubovoľné z nich.
4. Konštrukcia vrcholov  $A', C', D'$ , protíľahlej steny telesa. Hrany  $AA', CC', DD'$ , sú súhlasne rovnobežné a zhodné s hranou  $BB'$ .
5. Určenie viditeľnosti hrán telesa vzhľadom na kolmé premietanie do rovín  $\pi, \nu$ .

b) Riešenie úlohy v nákrese

1. Pre pôdorys, resp. nárys priamky  $b$  ( $B' \in b \wedge b \perp \alpha$ ) platí:  $B'_i \in b_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $b_1 \perp p_1^\alpha$ ,  $b_2 \perp n_2^\alpha$ . Priamka  $b$  je vzhľadom na polohu roviny  $\alpha$  určená ( $b = (b_1, b_2)$ ). Konštrukcia priesečníka priamky  $b$  s rovinou  $\alpha$  je jednoduchá polohová úloha. V riešení na obrázku 28 sme použili druhú premietáciu rovinu  $\lambda$  priamky  $b$  ( $b \subset \lambda \wedge \lambda \perp \nu$ ). Potom:

$$b \cap \alpha = b \cap (\lambda \cap \alpha) = b \cap l = B,$$

kde  $l$  je krycia priamka priamky  $b$  ležiaca v rovine  $\alpha$  ( $b_2 = \lambda_2 = l_2$ ) a je určená svojimi stopníkmi  $P^l, N^l$ . Pôdorys bodu  $B$  zostrojíme na základe incidencie bodu  $B$  s priamkami  $b, l$ ; konštrukcia jeho nárysu  $B_2$  je triviálna. Záver:  $B = (B_1, B_2)$ .

2. Konštrukcia vrcholu  $A$  je metrickou úlohou v rovine  $\alpha$  (vysvetlite). Riešime ju pomocou perspektívnej afinity otáčania danej roviny do niektorej z priemetní. Použili sme otočenie roviny  $\alpha$  do priemetne  $\pi$ . Podľa vety 4.1:

„Existuje pravouhlá perspektívna afinita  $f: (\alpha_1) \rightarrow (\alpha_0)$  určená osou  $p_1^\alpha$  a usporiadanou dvojicou bodov  $B_1, B_0 = f(B_1)$ , kde  $B_0$  je pôdorys otočenej polohy bodu  $B$ .“<sup>40</sup>

Rovina otáčania bodu  $B$  je rovina  $\kappa$  ( $B \in \kappa \wedge \kappa \perp p^\alpha$ ), polomer  $r^B$  otočenia bodu  $B$  zostrojíme pomocou sklopenia tejto roviny do priemetne  $\pi$  ( $r^B = |Bp^\alpha| = |BP^s|$ , kde  $s$  je spádová priamka prvej osnovej roviny  $\alpha$  prechádzajúca bodom  $B$ ). Na obrázku 28b je vyznačený pôdorys sklopenej polohy časti kružnice  $k^B$  otáčania bodu  $B$  a v sklopení roviny  $\alpha$  je zostrojená i dĺžka  $d$  úsečky  $BB'$ .<sup>41</sup>

Pre pôdorys otočenej polohy bodu  $A$  platí:  $A_0 \in p_0^\alpha$  ( $p_0^\alpha = p_1^\alpha$ ),  $|B_0A_0| = d$ ,  $x^A < x^B$ <sup>42</sup>; bod vyhovujúci týmto podmienkam je práve jeden. Pre nárys bodu  $A$  z podmienky jeho incidencie s priemetňou  $\pi$  vyplýva:  $A_2 \in \pi_2$  ( $\pi_2 = x_{12}$ ).

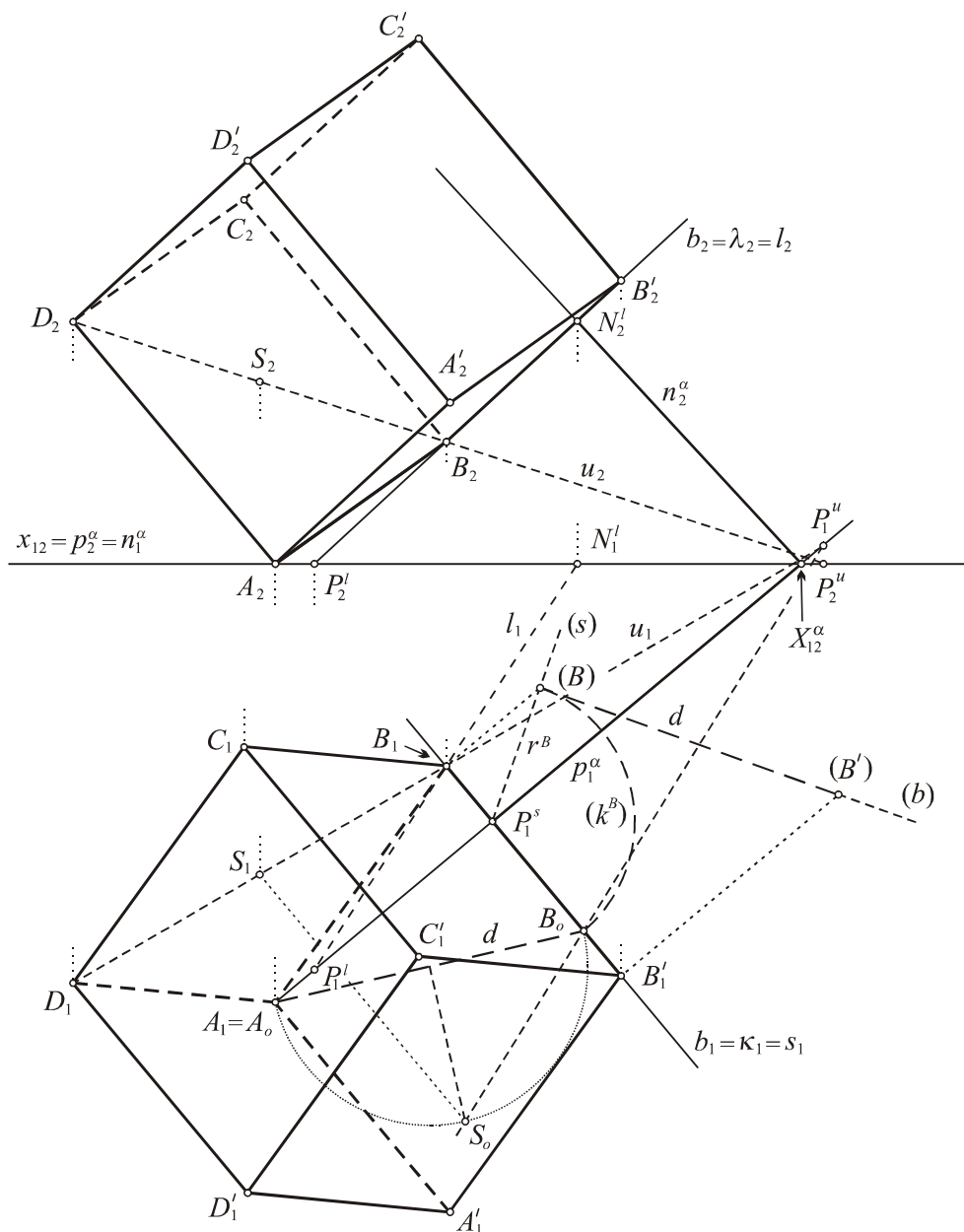
3. Konštrukcia štvorca  $ABCD$  v rovine  $\alpha$ . Namiesto konštrukcie pôdorysu otočenej polohy štvorca  $ABCD$  stačí zostrojiť pôdorys otočenej polohy jeho stredu  $S$ . Trojuholník  $ABS$  je totiž pravouhlý rovnoramenný s pravým uhlom pri vrchole  $S$ , čo platí i pre pôdorys jeho otočenej polohy. (Vysvetlite konštrukciu bodu  $S_0$ .) Na konštrukciu pôdorysu bodu  $S$  ( $S_1 = f^{-1}(S_0)$ ) sme použili samodružný bod priamky  $B_0S_0$  v danej afinite  $f$  ( $P_0^\alpha = \leftrightarrow B_0S_0 \cap p_1^\alpha = P_1^\alpha$  ( $u = \leftrightarrow BS$ )). Bod  $S$  je stredom súmernosti štvorca ( $(ACS) = (BDS) = -1$ ), odkiaľ vyplýva, že štvoruholník  $A_iB_iC_iD_i$  je rovnobežník so stredom  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ). (Vysvetlite!) Bod  $S_0$  možno zostrojiť v ľubovoľnej z polrovín roviny  $\alpha$  s hranicou v priamke  $\leftrightarrow A_0B_0$ , preto má úloha dve (navzájom

<sup>40</sup> Bod  $B_0$ , resp. rovinné pole  $(\alpha_0)$  by mali mať správne označenie  $(B_0)_1$ , resp.  $((\alpha_0))_1$ . Ide o pôdorys bodu  $B_0$  a o pôdorys otočenej polohy rovinného poľa  $(\alpha)$  v príslušnom otočení roviny  $\alpha$  do priemetne  $\pi$ . V záujme zjednodušenia označenia od tohto zápisu upúšťame. To isté bude platiť pre pôdorysy sklopených polôh bodov v sklapaní roviny do priemetne. (Pozrite si na definíciu pôdorysov bodov/útvarov v úvode prvého paragrafu.)

<sup>41</sup> Z kolmosti priamky  $b$  na rovinu  $\alpha$  vyplýva i kolmosť priamky  $b$  na spádovú priamku  $s$ . Obe priamky ležia v tej istej premietacej rovine  $\kappa$ ; teda táto kolmosť sa prejaví aj na pôdorysoch ich sklopených polôh (v sklopení roviny  $\kappa$  do priemetne  $\pi$ ). Skontrolujte si túto kolmosť pri riešení ďalších analogických úloh zo zbierky úloh venovaných zobrazeniu základných telies (ide o úlohy uvedené už v metóde kótovaného zobrazenia).

<sup>42</sup> Vyznačená polpriamka na základnici (obr. 28b) je súhlasne rovnobežná s kladnou polpriamkou súradnicovej osi  $x$ . O voľbe bázy ortonormálnej súradnicovej sústavy v Mongeovej metóde sa hovorí v prvom paragrafe textu (poznámka 1.2).

zhodné) riešenia. V záujme prehľadnosti sme vybrali riešenie, pre ktoré sa pôdorys otočenej polohy štvorca *neprekryva* s pôdorysom štvorca (rovnoobežník  $A_1B_1C_1D_1$  a štvorec  $A_0B_0C_0D_0$  ležia v navzájom opačných polrovinách nákrrese s hranicou  $p_1^\alpha$ ). Narys bodu  $B$  leží na naryse  $u_2 = \overrightarrow{P_2^u B_2}$  priamky  $u$ .



Obr. 28b

4. Pre vrcholy  $A', C', D'$  protíľahlej steny kocky ku stene v rovine  $\alpha$  platí:

$$AA' \uparrow\uparrow BB' \uparrow\uparrow CC' \uparrow\uparrow DD' \wedge AA' \cong BB' \cong CC' \cong DD', \text{ odkiaľ vyplýva:}$$

$$A_i A_i' \uparrow\uparrow B_i B_i' \uparrow\uparrow C_i C_i' \uparrow\uparrow D_i D_i' \wedge A_i A_i' \cong B_i B_i' \cong C_i C_i' \cong D_i D_i' \quad (i = 1, 2)$$

5. Určenie viditeľnosti hrán telesa v oboch obrazoch

a) Viditeľnosť hrán telesa vzhľadom na kolmé premietanie do roviny  $\pi$ : Hrana  $BB'$  je kolmá na rovinu  $\alpha$  a platí  $z^{B'} > z^B$ , čo znamená, že polpriestor  $\mapsto \alpha B'$  je viditeľným

polpriestorom.<sup>43</sup> Rovina steny  $ABCD$  je rovnobežná s rovinou rovnomennej steny s indexmi s čiarkou, odkiaľ vyplýva viditeľnosť steny  $A'B'C'D'$  a tým všetkých jej hrán. Stena  $ABCD$  viditeľná nie je; viditeľné sú z nej len hrany patriace príslušnému obrysu telesa,<sup>44</sup> t. j. hrany  $BC$  a  $CD$ . Vrchol  $A$  nie je viditeľný, pretože nepatrí do obrysu telesa (vzhľadom na kolmé premietanie do roviny  $\pi$ ), teda ani tretia hrana ním prechádzajúca ( $AA'$ ) viditeľná nie je. Všetky zvyšné hrany telesa (kolmé na rovinu  $\alpha$ ) sú viditeľné.<sup>45</sup>

b) Viditeľnosť hrán telesa *vzhľadom na kolmé premietanie do roviny  $\nu$*  sa určí celkom analogicky a necháva sa čitateľovi.

**Úloha 5.2.** Zostrojte obrys guľovej plochy  $G = (S, r)$  v rovnobežnom premietaní, ktoré je určené osnovou  $\{l^S\}$  ( $l^S$  je premietacia priamka stredu guľovej plochy a má všeobecnú polohu vzhľadom na priemetne  $\pi, \nu$ ), ako aj rovnobežné priemety plochy v tomto premietaní do oboch priemetní  $\pi, \nu$ .<sup>46</sup>

*Riešenie*

1. *Premietacím útvarom* danej guľovej plochy je rotačný valcový priestor  $\bar{V}$  s osou v priamke  $l^S$ . K nemu príslušnú valcovú plochu označme  $V$  (dotykový premietací útvar plochy  $G$ ). *Obrysom guľovej plochy  $G$*  v premietaní s osnovou  $\{l^S\}$  je prienik plôch  $G$  a  $V$ ; prienikom je hlavná kružnica  $k$  guľovej plochy ležiaca v rovine kolmej na priamku  $l^S$ . (Obr. 29)

2. Podľa úlohy 4.2 je  $k_1$  elipsa so stredom  $S_1$  a hlavnou osou  $A_1B_1$  na pôdoryse hlavnej priamky  $^1h$  prvej osnovy roviny  $\alpha$  ( $S \in \alpha \wedge \alpha \perp l^S$ ) a platí  $|A_1B_1| = 2r$ . Analogicky je  $k_2$  elipsa so stredom  $S_2$  a hlavnou osou  $K_2L_2$  na náryse hlavnej priamky  $^2h$  druhej osnovy roviny  $\alpha$  ( $|K_2L_2| = 2r$ )<sup>47</sup>. Vedľajšiu os elipsy  $k_1$ , resp.  $k_2$  možno dourčiť príčkou konštrukciou (úloha 4.2, [4]) pomocou bodu  $K_1$ , resp.  $A_2$ ; označme ju  $C_1D_1$ , resp.  $M_2N_2$ . *Záver:*  $k = (k_1, k_2)$ ,  $k_1 = (A_1B_1, C_1D_1)$ ,  $k_2 = (K_2L_2, M_2N_2)$ .

3. *Viditeľnosť obrysu  $k$  guľovej plochy  $G$*

a) *Viditeľnosť kružnice  $k$  vzhľadom na kolmé premietanie do roviny  $\pi$* . Vzhľadom na kolmé premietanie do roviny  $\pi$  je z danej guľovej plochy viditeľná jej polplocha v polpriestore  $z \geq z^S$ . Z nerovnosti  $z^K < z^S$  vyplýva, že je viditeľná tá polkružnica kružnice  $k$  s krajnými bodmi  $A, B$ , ktorá neprechádza bodom  $K$  (t. j. prechádzajúca napr. bodom  $D$ ).

b) *Viditeľnosť kružnice  $k$  vzhľadom na kolmé premietanie do roviny  $\nu$* . Vzhľadom na kolmé premietanie do roviny  $\nu$  je z danej guľovej plochy viditeľná jej polplocha v polpriestore  $y \geq y^S$ . Z nerovnosti  $y^A > y^S$  vyplýva, že je viditeľná tá polkružnica kružnice  $k$  s krajnými bodmi  $K, L$ , ktorá prechádza bodom  $A$ .

<sup>43</sup> Tento fakt je zřejmý z polohy nárysov oboch bodov. Uvedený vzťah čítame: súradnica  $z$  bodu  $B'$  je väčšia než súradnica  $z$  bodu  $B$ .

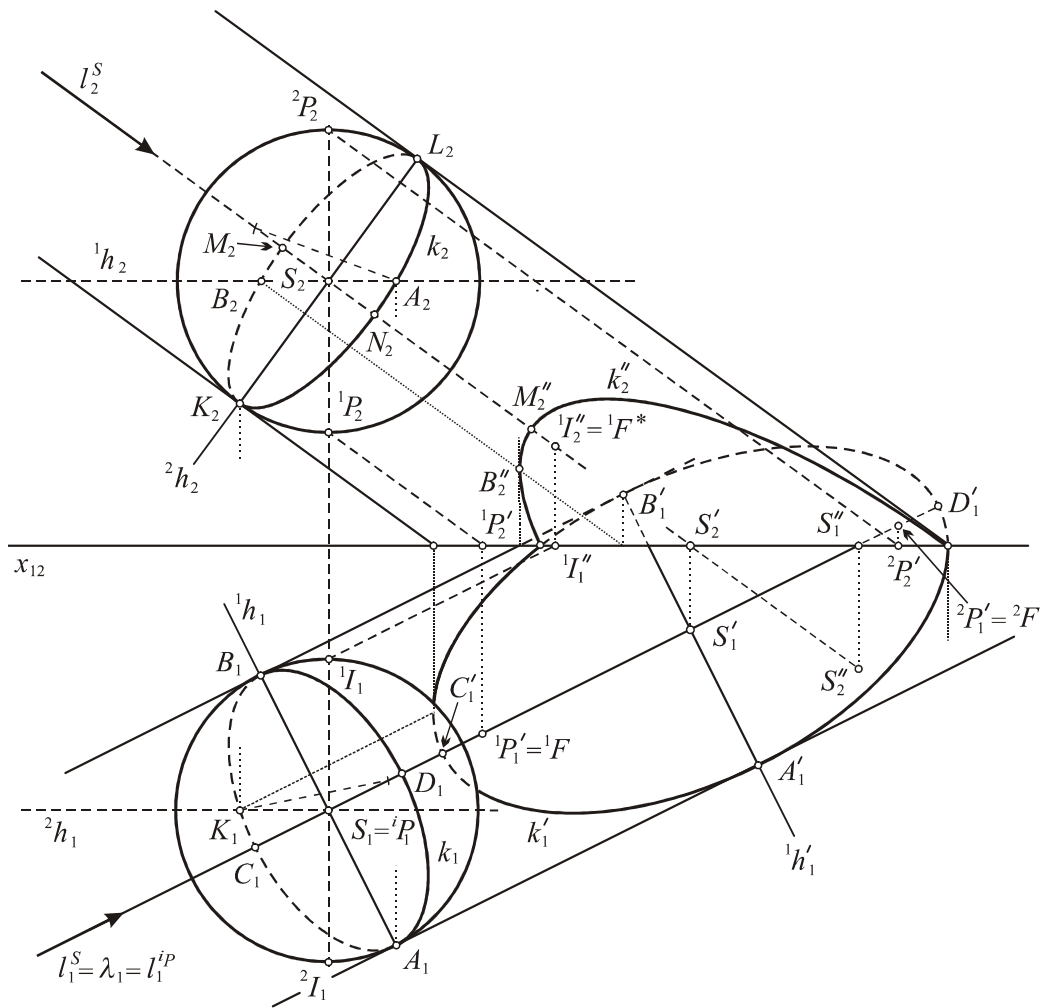
<sup>44</sup> Obrysom kocky *vzhľadom na kolmé premietanie do roviny  $\pi$*  je uzavretá lomená čiara  $BCDD'A'B'B$ . Načrtnite si ju farebne na stereometrickom znázornení situácie vo voľnom rovnobežnom premietaní (obr. 28a). Pretože žiadna stena telesa nie je prvou premietacou rovinou, je obrys kocky vzorom obrysu jej priemetu (obr. 28b).

<sup>45</sup> Hrany sú viditeľné, pretože sú viditeľné oba krajné body každej z nich.

<sup>46</sup> Ide o aplikačnú úlohu k téme o obraze kružnice v Mongeovej metóde a jej rovnobežného priemetu (šikmého) do priemetní  $\pi, \nu$  ([4]).

<sup>47</sup> Z kolmosti  $l^S \perp \alpha$  vyplýva:  $l_1^S \perp ^1h_1 \wedge l_2^S \perp ^2h_2$  (veta 4.3);  $k$  je hlavná kružnica plochy  $G \Rightarrow S \in ^1h \cap ^2h$ .

4. Rovnobežným priemetom guľovej plochy  $G$  do roviny  $\pi$  v danom rovnobežnom premietaní je elipsa  $k' = V \cap \pi$  so svojím vnútrom.<sup>48</sup> Ohniská elipsy  $k'$  sú podľa vety Queteletovej-Dandelinovej ([4]) priemety krajných bodov priemeru  ${}^1P {}^2P$  guľovej plochy, ktorý je kolmý na priemetňu  $\pi$  a vedľajšia os tejto elipsy je zhodná s priemerom danej guľovej plochy. Odtiaľ vyplýva, že vedľajšou osou elipsy  $k'$  je úsečka  $A'B'$  ( $AB \parallel \pi \Rightarrow A'B' \parallel AB$ , t. j.  $A'B' \cong AB$ ). Elipsa  $k'$  je vedľajšou osou a ohniskami určená. Navyše body  ${}^1P$  ležia na prvej premietacej priamke stredy  $S$  plochy, odkiaľ vyplýva, že šikmo premietacie priamky týchto bodov, ako aj bodov  $C, D$  ležia v tej istej prvej premietacej rovine  $\lambda$  ( $l^S \subset \lambda \wedge \lambda \perp \pi$ ). Pretože priamka  $AB$  (hlavná priamka prvej osnovej roviny  $\alpha$  kružnice  $k$ ) je kolmá na rovinu  $\lambda$ , je úsečka  $C'D'$  hlavnou osou elipsy  $k'$ .<sup>49</sup>



Obr. 29

Analogicky je rovnobežným priemetom guľovej plochy  $G$  do roviny  $\nu$  elipsa  $k'' = V \cap \nu$  so svojím vnútrom. Čitateľ si samostatne môže doplniť poznatok o ohniskách elipsy  $k''$  a jej

<sup>48</sup> Rovnobežné priemety všetkých bodov guľovej plochy  $G$  do roviny  $\pi$  sa budú označovať rovnomenným písmenom s jednou čiarkou vpravo hore, premietaciu priamku ľubovoľného bodu  $R$  budeme označovať  $l^R$ . (Platí teda: bod  $R' = l^R \cap \pi$  je prvým stopníkom premietacej priamky bodu  $R$ .)

<sup>49</sup> Odtiaľ vyplýva o niečo zložitejšia konštrukcia bodov  $C, D$ , no krajšia, než tá, ktorú sme použili. Body  $C, D$  sú dotykové body tvoriacich priamok valcovej plochy  $V$  s danou guľovou plochou (ležiacich v rovine  $\lambda$ ); sú to teda dotykové body priamok  $l^C, l^D$  s kružnicou  $G \cap \lambda$ . Konštrukcia sa používa pri zložitejších rotačných plochách.



hlavných vrcholoch. (Priemety útvarov do roviny  $\nu$  v danom rovnobežnom premietaní sú označené dvoma čiarkami vpravo hore; ohniská elipsy  $k''$  sú označené  ${}^iF^*$  ( $i = 1, 2$ ).) Na obrázku 29 je označené len viditeľné ohnisko vzhľadom na rovinu  $\pi$ .

5. Okrem toho platí:

a) Medzi elipsami  $k_1, k_1'$  je vzťah perspektívnej afinity  $f$ , ktorej osou je priamka  $(\alpha \cap \pi)_1 = p_1^\alpha$ , pričom obrazom bodu  $S_1$  je bod  $f(S_1) = S_1'$ . (Odôvodnite.)

b) Medzi elipsami  $k_2$  a  $k_2''$  je vzťah perspektívnej afinity  $g$  s osou v priamke  $(\alpha \cap \nu)_2 = n_2^\alpha$ , pričom obrazom bodu  $S_2$  je bod  $g(S_2) = S_2''$ .

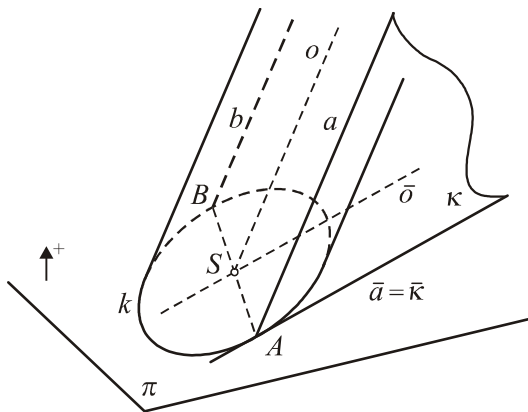
c) Medzi elipsami  $k_1'$  a  $k_2''$  je vzťah perspektívnej afinity  $h$  s osou v základnici  $x_{12}$ , pričom  $h(S_1') = S_2''$ . (Odôvodnite.)<sup>50 51</sup>

**Úloha 5.3.** Daná je šikmá kružnicová valcová plocha  $V$  určujúcou kružnicou  $k$  v priemetni  $\pi$  a osou  $o$ . Zobraďte druhú sústavu kružnicových rezov tejto plochy.

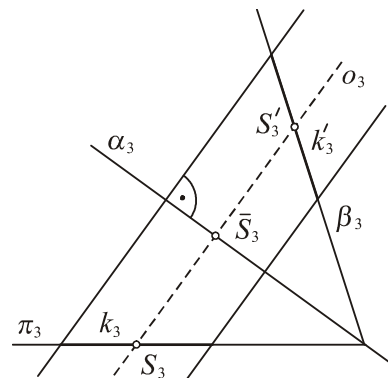
Riešenie

a) *Stereometrické riešenie*

1. *Obrysom plochy  $V$  vzhľadom na kolmé premietanie do roviny  $\pi$ , resp. do roviny  $\nu$  sú dve tvoriace priamky  $a, b$ , resp.  ${}^1t, {}^2t$  plochy, ktoré ležia v jej dotykových rovinách kolmých na priemetňu  $\pi$ , resp.  $\nu$  ([1]). Obrysom kolmého priemetu plochy do roviny  $\pi$  sú preto dotyčnice určujúcej kružnice  $k$  valcovej plochy, ktoré sú rovnobežné s kolmým priemetom  $\bar{o}$  osi  $o$  plochy do priemetne  $\pi$ .<sup>52</sup> (Obr. 30a)*



Obr. 30a



Obr. 30b

Jednou sústavou kružnicových rezov plochy  $V$  je množina všetkých rovín rovnobežných s rovinou  $\pi$ . Ak existuje druhá sústava kružnicových rovinných rezov plochy  $V$  a označíme  $k'$  ( $k' \subset \beta$ ) jednu z kružníc tejto sústavy, tak sú kružnice  $k (= \pi \cap V)$  a  $k' (= \beta \cap V)$  navzájom zhodné. Zhodnostné zobrazenie euklidovského priestoru, v ktorom sú všetky

<sup>50</sup> Konštrukcia je formálne totožná s konštrukciou hranice vlastného tieňa a hranice hodeného tieňa guľovej plochy v rovnobežnom osvetlení; odlišnosť spočíva – hlavne, ale nielen – v rozdielnej terminológii teórií premietania a osvetlenia. Základné pojmy teórie osvetlenia možno nájsť v [3].

<sup>51</sup> Doplňte do obrázka obrazy stôp roviny kružnice  $k$  ( $\alpha \stackrel{\ominus}{\mapsto} h^2 h$ ).

<sup>52</sup> Ide o prvé stopy spomenutých dotykových rovín. Na obrázku je označená jedna z nich (rovina  $\kappa$ ). Pretože ide o prvú premietacu rovinu ( $\kappa \perp \pi$ ), platí:  $\bar{\kappa} = \bar{a}$  (prúžok nad znakom útvaru označuje v tomto ilustračnom stereometrickom obrázku kolmý priemet útvaru do roviny  $\pi$  (v súlade s kapitolou 1)).

tvoriace priamky danej valcovej plochy  $V$  samodružné a ktoré nie je posunutím, je súmernosť  $f$  podľa roviny, ktorá je normálovou rovinou plochy (kolmá na os plochy). Rovina  $f(\pi) = \beta$ , ktorá je súmerne združená s rovinou  $\pi$  podľa ľubovoľnej normálovej roviny  $\alpha$  plochy, pretína plochu v kružnici patriacej do druhej sústavy kružnicových rezov plochy. Situácia je znázornená na obrázku 30b (v kolmom premietaní do roviny kolmej na priesečnicu  $p^\alpha = \pi \cap \alpha$ ).

Odtiaľ vyplýva nasledujúca konštrukcia (bod 2).<sup>53</sup>

**2.** Konštrukcia ľubovoľnej *normálovej roviny*  $\alpha$  ( $\alpha \perp o$ ) danej valcovej plochy a bodu  $\bar{S} = \alpha \cap o$ . (Je zrejmé, že bod  $\bar{S}$  nemá žiaden súvis s „prúžkovanými“ bodmi na obr. 30a.)

**3.** Konštrukcia roviny  $\beta$  *súmerne združenej s rovinou  $\pi$  podľa roviny  $\alpha$* . Rovina  $\beta$  prechádza priesečnicou  $\alpha \cap \pi$  ( $\Rightarrow p^\alpha = p^\beta$ ) a napríklad bodom  $S'$  ( $S' = f(S)$ ), kde bod  $S$  je stredom kružnice  $k$ . (Bod  $\bar{S}$  je stredom úsečky  $SS'$ .)

**4.** *Zobrazenie kružnicového rezu*  $k' = \beta \cap V$ .

**5.** Určenie viditeľnosti kružníc  $k$  a  $k'$  plochy  $V$ .

*Riešenie úlohy v nákrese*

**1.** *Obrysom pôdorysu plochy  $V$*  sú pôdorysy  $a_1, b_1$  tvoriacich priamok  $a, b$  plochy v jej dotykových prvých premietacích rovinách ( $a_1, b_1$  sú dotyčnice kružnice  $k_1$  rovnobežné s priamkou  $o_1$ .) Označme:  $a \cap k = A, b \cap k = B$ . Analogicky *obrysom nárýsu plochy* sú nárýsy tvoriacich priamok  ${}^i t$  ( $i = 1, 2$ ) plochy v jej dotykových druhých premietacích rovinách  ${}^i \tau$  ( ${}^i t \subset {}^i \tau, {}^i t \parallel o$ ). Odtiaľ vyplýva, že pôdorysné stopy rovín  ${}^i \tau$  sú dotyčnice kružnice  $k$  kolmé na priemetňu  $v$ ; ich dotykové body s kružnicou  $k$  sú označené  ${}^i T = k \cap {}^i \tau$ . Potom  ${}^i T_2$  ( $i = 1, 2$ ) sú krajné body nárýsu  $k_2$  kružnice  $k$ . (Obr. 30c)

**2.** Konštrukcia ľubovoľnej *normálovej roviny plochy  $V$*

$$\alpha \perp o \Rightarrow p_1^\alpha \perp o_1 \wedge n_2^\alpha \perp o_2; \alpha = \overrightarrow{p^\alpha n^\alpha}$$

Priesečník priamky  $o$  s rovinou  $\alpha$  je zostrojený pomocou druhej premietacej roviny  $\lambda$  priamky  $o$  ( $o \cap \alpha = o \cap (\lambda \cap \alpha) = o \cap l = \bar{S}$ ), kde  $l$  je druhá krycia priamka priamky  $o$  v rovine  $\alpha$  ( $l = \overrightarrow{P^l N^l}$ ). Potom:  $l_1 \cap o_1 = \bar{S}_1$ ; konštrukciu nárýsu bodu  $\bar{S}$  si čitateľ môže doplniť sám (na doriešenie úlohy ho nebudeme potrebovať). *Záver:*  $\bar{S} = (\bar{S}_1, \bar{S}_2)$ .

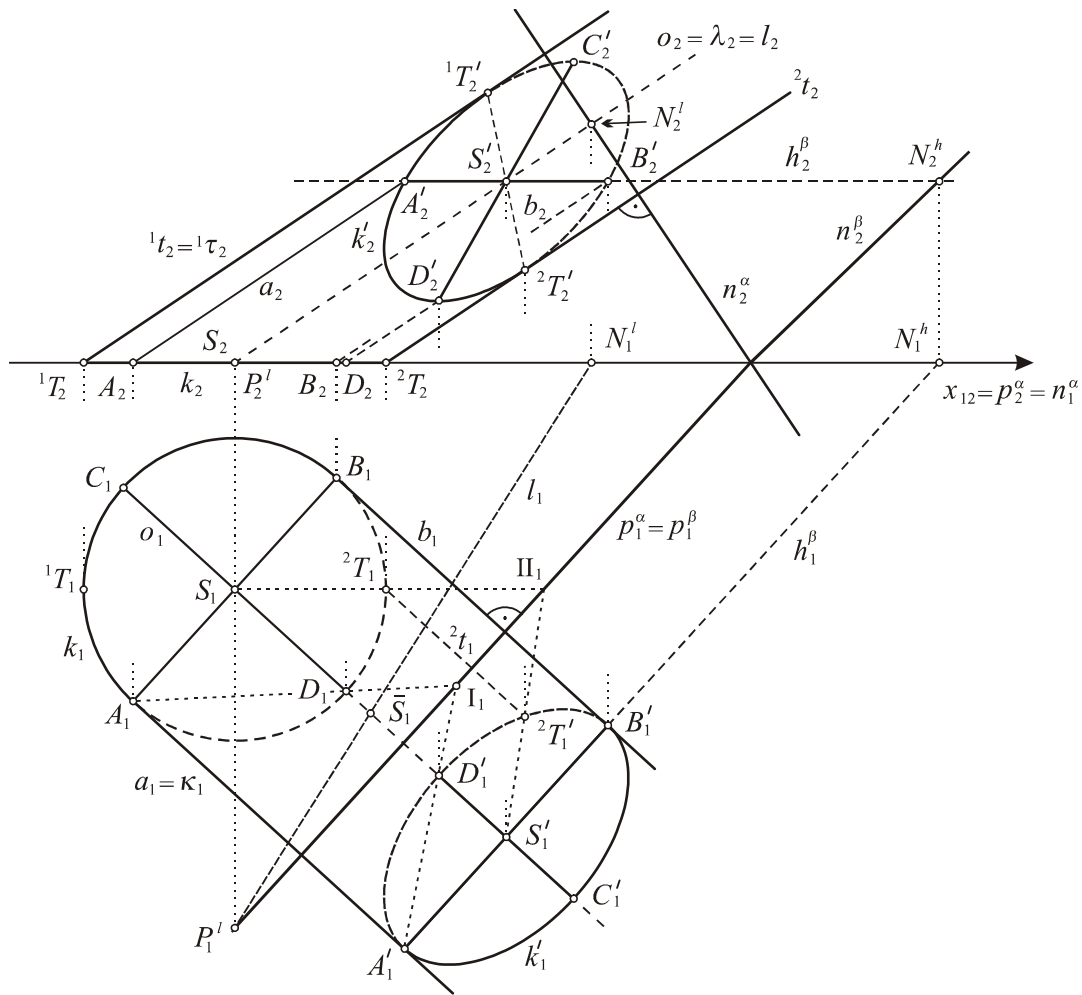
**3.** Pretože  $p^\beta = p^\alpha$ , stačí zostrojiť jeden bod roviny  $\beta$  neležiaci na jej prvej stope. Zostrojíme bod  $S'$ , ktorý je súmerne združeným bodom so stredom  $S$  kružnice  $k$  podľa roviny  $\alpha$ . Pre tento bod platí:  $(SS'\bar{S}) = -1$  (bod  $\bar{S}$  je stredom úsečky  $SS'$ ). Ide o afinnú vlastnosť rovnobežného premietania, preto aj  $(S_i S'_i \bar{S}_i) = -1$  ( $i = 1, 2$ ). Tento fakt sme použili na konštrukciu pôdorysu bodu  $S'$ . Na konštrukciu jeho nárýsu stačí použiť odpovedajúcu ordinálu a incidenciu bodu  $S'$  s osou  $o$  plochy. *Záver:*  $S' = (S'_1, S'_2), \beta = \overrightarrow{p^\beta S'}$ . Do druhej sústavy kružnicových rezov plochy patria všetky rovinné rezy plochy  $V$  rovinami, ktoré sú rovnobežné s rovinou  $\beta$ .

**4.** *Zobrazenie kružnice*  $k' = \beta \cap V$

Pôdorys kružnice  $k'$  zostrojíme na základe dôsledku 2 vety 1.3 učebného textu [4]. Podľa nej existuje perspektívna afinita  ${}^1 f: k_1 \mapsto k'_1$ , ktorá je určená osou  $(\pi \cap \beta)_1 = p_1^\beta$

<sup>53</sup> Kružnicu druhej sústavy kružnicových rezov možno zostrojiť i pomocou guľovej plochy  $G$  so stredom v bode  $S$  a hlavnou kružnicou v kružnici  $k$ . Potom  $G \cap V = k \cup {}^1 k$ , kde kružnica  ${}^1 k$  patrí do hľadanej sústavy kružnicových rezov.

a usporiadanou dvojicou bodov  $S_1, S'_1$ . Nech  $A_1B_1, C_1D_1$  sú navzájom kolmé priemery kružnice  $k_1$ . Odtiaľ vyplýva, že  $A'_1B'_1, C'_1D'_1$  ( ${}^1f: A_1B_1, C_1D_1 \mapsto A'_1B'_1, C'_1D'_1$ ) sú združené priemery pôdorysu  $k'_1$  kružnice  $k'$ .<sup>54</sup> Z rovnobežnosti priamky  $A_1B_1$  s osou afinity  ${}^1f$  vyplýva:  $A'_1B'_1 \parallel A_1B_1, A'_1B'_1 \cong A_1B_1$  a  $A'_1B'_1, C'_1D'_1$  sú osami elipsy  $k'_1$ . Na konštrukciu nárysov bodov  $A',$  resp.  $D'$  stačí použiť incidenciu týchto bodov s príslušnými tvoriacimi priamkami  $a,$  resp.  $d$  plochy, ktoré prechádzajú bodmi  $A,$  resp.  $D$ . (Na obrázku je označená len priamka  $a = \overleftrightarrow{AA'}$ ).<sup>55</sup> Okrem toho je priamka  $\overleftrightarrow{A'B'} (=h^\beta)$  hlavná priamka prvej osnovej roviny  $\beta$  (prechádzajúca bodom  $S'$ ), t. j.  $A'_2B'_2 \subset h_2^\beta$ . Záver:  $k' = (k'_1, k'_2)$ .



Obr. 30c

## 5. Viditeľnosť kružníc $k, k'$ plochy $V$

### a) Viditeľnosť vzhľadom na kolmé premietanie do priemetne $\pi$

Viditeľné sú tie tvoriace polpriamky zobrazenej polplochy plochy  $V$  (v kladnom polpriestore s hranicou  $\pi$ ), ktorých pôdorysné stopničky ležia na polkružnici kružnice  $k$  patriacej obrysu pôdorysu uvažovanej polplochy. Z bodov kružnice  $k$  sú teda viditeľné body

<sup>54</sup> Na konštrukciu bodu  $D'_1$  sme použili samodružný bod  $I_1$  priamky  $A_1D_1$  v afinitě  ${}^1f$ .

<sup>55</sup> Zrejme platí:  $AA' \parallel DD' \parallel o \Rightarrow A_iA'_i \parallel D_iD'_i \parallel o_i$  ( $i = 1, 2$ ).

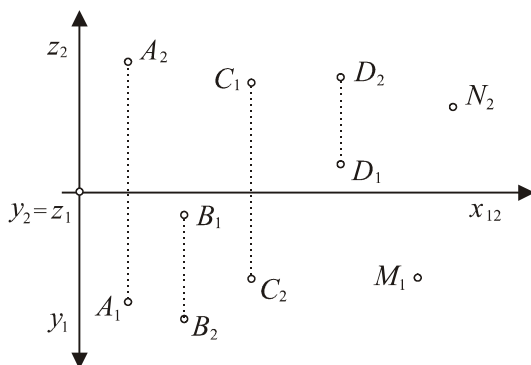
polkružnice s krajnými bodmi  $A, B$  prechádzajúcej bodom  $C$ . Pretože súradnica z bodu  $S'$  je menšia než súradnica z bodu  $C'$ , viditeľné sú body tej polkružnice s krajnými bodmi  $A', B'$ , ktorá prechádza bodom  $C'$  (polkružnica kružnice  $k$  prechádzajúca bodom  $D'$  viditeľná nie je, pretože nie je viditeľná tvoriaca polpriamka  $\leftrightarrow DD'$  uvažovanej polplochy).

**b) Viditeľnosť vzhľadom na kolmé premietanie do priemetne  $v$**

Analogicky súradnica  $y$  bodu  $D$  je väčšia než súradnica  $y$  bodu  $S$ , teda je viditeľná polkružnica kružnice  $k$  s krajnými bodmi  ${}^1T, {}^2T$  prechádzajúca bodom  $D$ ; odtiaľ vyplýva i viditeľnosť tvoriacich priamok plochy, ktoré pretínajú túto polkružnicu. Dôsledkom je viditeľnosť tej polkružnice kružnice  $k'$  s krajnými bodmi  ${}^1T', {}^2T'$ , ktorá prechádza bodom  $D'$ . Dotykové body  ${}^i T'_2$  elipsy  $k_2$  s obrysom nárysu plochy  $V$  sú nárysmi priesečníkov tvoriacich priamok  ${}^i t$  s rovinou  $\beta$  ( ${}^i t \cap \beta = {}^i T'$ ) ( $i = 1, 2$ ). Najprv zostrojíme ich pôdorysy  ${}^i T'_1$  ako obrazy bodov  ${}^i T_1$  v pravouhlej perspektívnej afinite  ${}^1 f$  z bodu 4 riešenia úlohy, t. j.  ${}^i T'_1 = {}^1 f ({}^i T_1)$ ; v riešení sme použili samodružný bod  $\Pi_1$  priamky  $\leftrightarrow {}^1 T_1 {}^2 T_1$ . Konštrukcia nárysov bodov  ${}^i T'$  je triviálna a necháva sa čitateľovi.

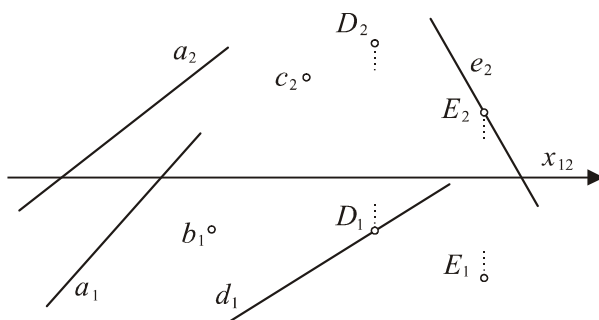
## 6 Mongeovo zobrazenie (cvičenia)

1. Dané sú body  $A, B, C, D$ . a) Určite kvadrant, do ktorého patrí každý z nich; b) Dourčite body  $M, N$  tak, aby  $M \in \pi, N \in \nu$ ; c) Zobrazte priamky  $a, b, c, d$  incidentné v danom poradí s bodmi  $A, B, C, D$  tak, aby:  $a \perp \pi, b \perp \nu, c \perp x$  ( $c \perp \pi, c \perp \nu$ ),  $d \parallel x$ . V ktorom prípade nie je priamka určená svojím pôdorysom a nárysom? (Obr. 1)



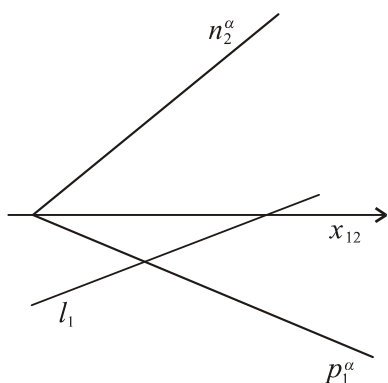
Obr. 1

2. Dourčite priamky  $b, c, d, e$  tak, aby:  $b \perp \pi, c \perp \nu, d \parallel \pi \wedge D \in d, e \parallel \nu \wedge E \in e$  a zostrojte existujúce stopníky priamok  $a, b, c, d, e$ . (Obr. 2)

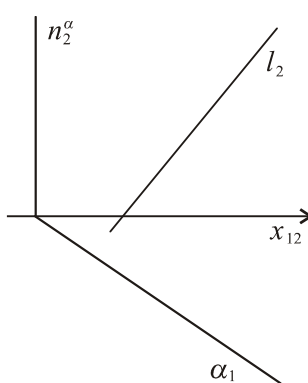


Obr. 2

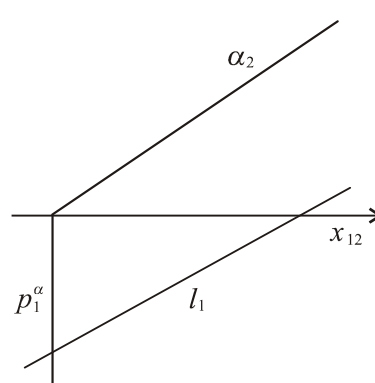
3. Dourčite priamku  $l$  tak, aby ležala v danej rovine  $\alpha$ . Ako by ste riešili úlohu, ak by niektorý zo stopníkov priamky  $l$  v úlohe 3a) alebo 3d) bol nedostupný? (Obr. 3a – 3e)



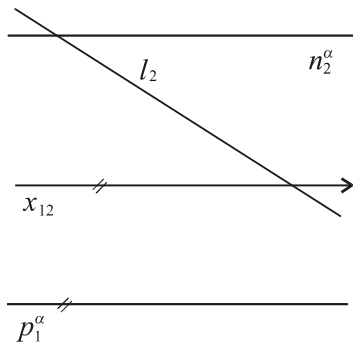
Obr. 3a



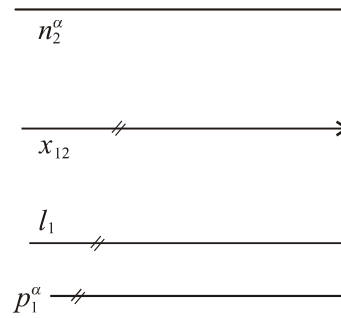
Obr. 3b



Obr. 3c

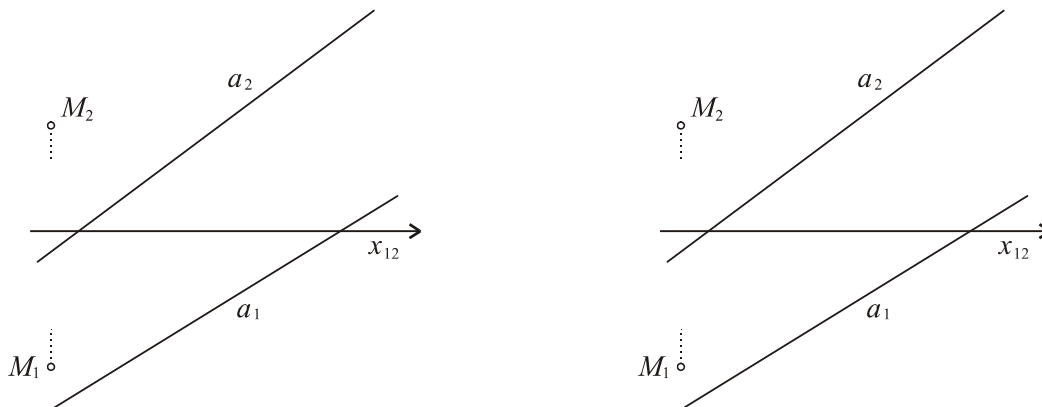


Obr. 3d



Obr. 3e

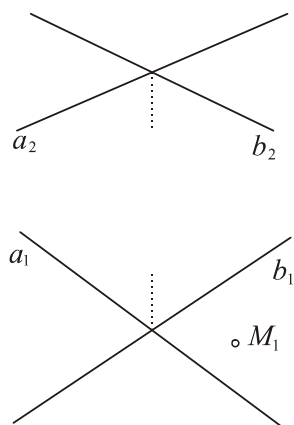
4. Zvoľte si obrazy troch nekolineárnych bodov  $A, B, C$ . Zostrojte trojuholník  ${}^1A {}^1B {}^1C$  zhodný s trojuholníkom  $ABC$ , uhly zhodné s uhlami priamok obsahujúcich strany trojuholníka  $ABC$  s priemetňami a obraz jeho ťažiska.
5. Zobrazte dvojice rovnobežných, rôznobežných a mimobežných priamok (vo všetkých osobitných polohách vzhľadom na priemetne).
6. Zobrazte roviny  $\pi, \nu, \pi'(M \in \pi', \pi' \parallel \pi), \nu'(M \in \nu', \nu' \parallel \nu), \alpha(a \subset \alpha, \alpha \perp \pi), \beta(a \subset \beta, \beta \perp \nu), \gamma(a \subset \gamma, \gamma \parallel x)$  a zostrojte existujúce stopy rovín. (Na konštrukciu použite oba obrázky.) (Obr. 4)



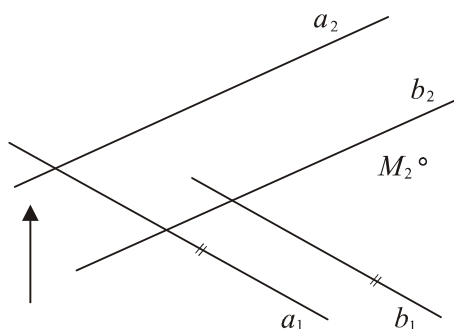
Obr. 4

7. Dourčite bod  $M$  tak, aby ležal v danej rovine  $\alpha$  (obr. 5a – 5f). a), b)  $\alpha = \leftrightarrow ab$ ; c)  $\alpha = \leftrightarrow ABC$ ; d) rovina je určená spádovou priamkou prvej osnovy; e) rovina je určená spádovou priamkou druhej osnovy; f)  $l \subset \alpha, \alpha \parallel x$ .<sup>56</sup>
8. Vo všetkých prípadoch z predchádzajúcej úlohy zostrojte v rovine  $\alpha$  hlavné priamky oboch osnov.

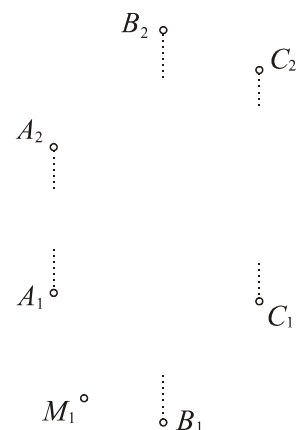
<sup>56</sup> Poznámka: v prípade, keď sa v zadaní úlohy nevyskytuje základnica, daný je vždy smer ordinál (platí to aj pre všetky nasledujúce cvičenia).



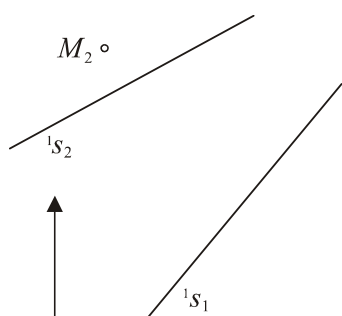
Obr. 5a



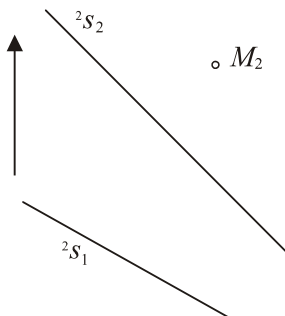
Obr. 5b



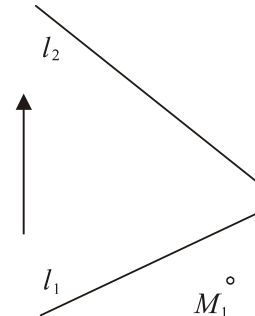
Obr. 5c



Obr. 5d

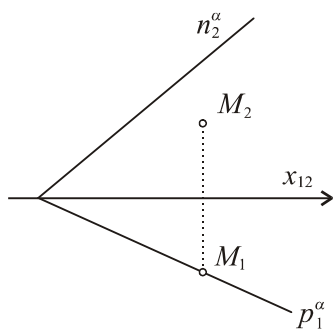


Obr. 5e

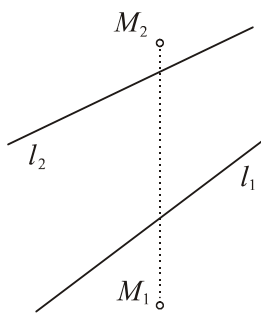


Obr. 5f

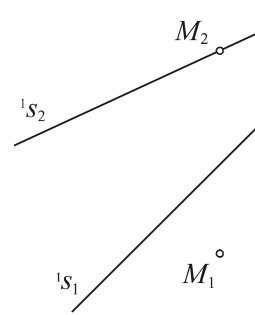
9. Zostrojte rovinu prechádzajúcu bodom  $M$  a rovnobežnú s danou rovinou  $\alpha$  (obr. 6a – 6d).  
 b)  $l \subset \alpha \wedge \alpha \parallel x$ ; c) Rovina je určená spádovou priamkou prvej osnovy; d)  $\alpha = \leftrightarrow ab, a \parallel b$ .  
 V prípade 6d využite priesečnicu roviny  $\alpha$  s rovinou totožnosti. Pri nezvolenej základnici rovinu určite dvoma ľubovoľnými priamkami; v prípade a) zostrojte jej stopy.



Obr. 6a

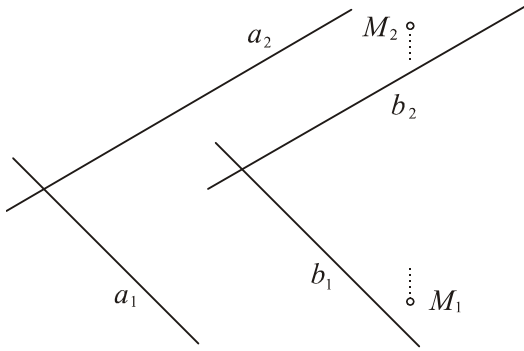


Obr. 6b

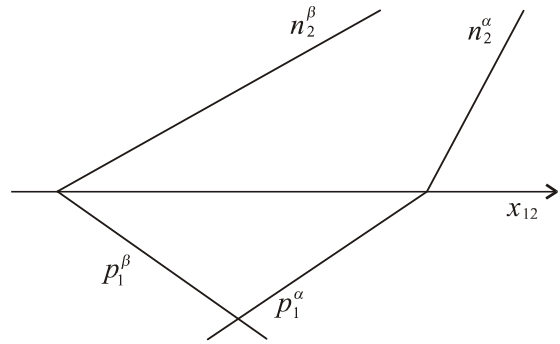


Obr. 6c

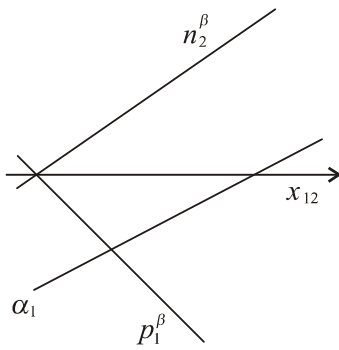
10. Zostrojte priesečnicu rovín  $\alpha, \beta$  (obr. 7a – 7e); b)  $\alpha \perp \pi$ ; c)  $\beta \parallel x$ ; d)  $X^\alpha = X^\beta$ ; e)  $\alpha \parallel x \parallel \beta$ .



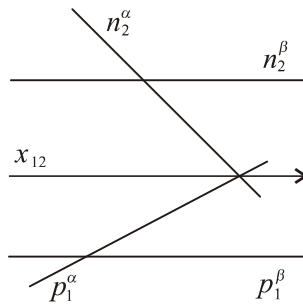
Obr. 6d



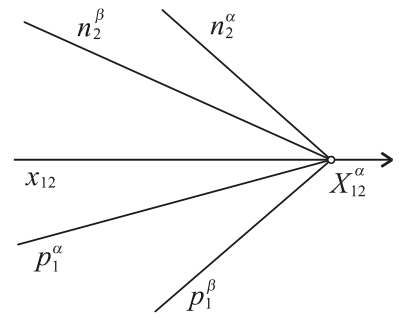
Obr. 7a



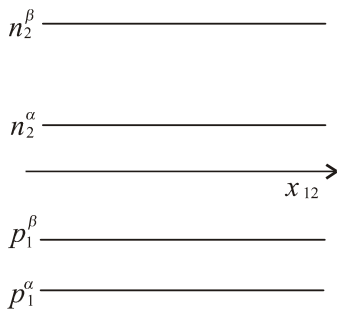
Obr. 7b



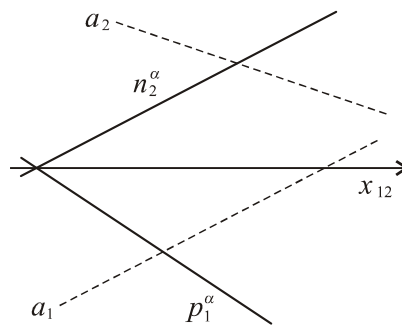
Obr. 7c



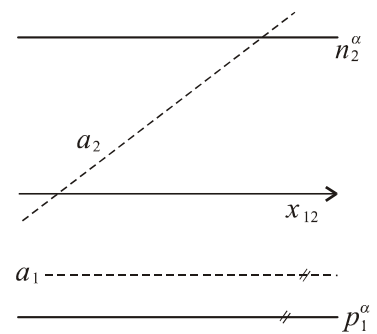
Obr. 7d



Obr. 7e



Obr. 8a

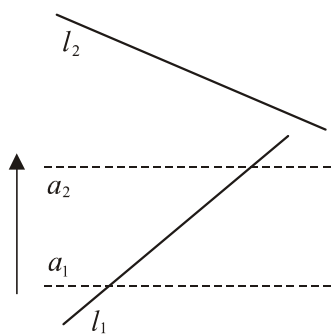


Obr. 8b

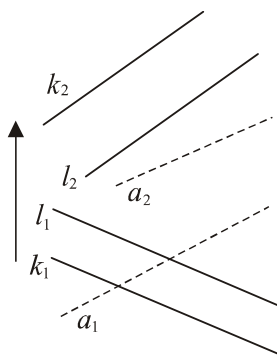
11. Určite vzájomnú polohu priamky  $a$  s rovinou  $\alpha$  (obr. 8a – 8f). b)  $\alpha \parallel x$ ; c)  $a \parallel x, \alpha \parallel x, l \subset \alpha$ ; d)  $\alpha = \leftrightarrow k l$  ( $k \parallel l$ ); e) rovina  $\alpha$  je určená spádovou priamkou prvej osnovy; f)  $a \parallel x$ , rovina  $\alpha$  je určená spádovou priamkou druhej osnovy. V prípade existencie spoločného



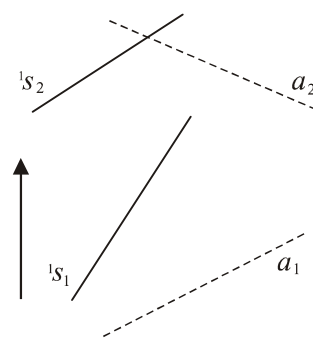
bodu zvýraznite viditeľnú polpriamku priamky  $a$  vzhľadom na rovinu  $\alpha$  (vzhľadom na kolmé premietanie do oboch priemetní  $\pi a \nu$ ).



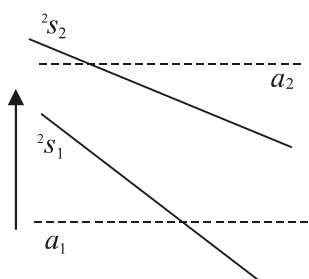
Obr. 8c



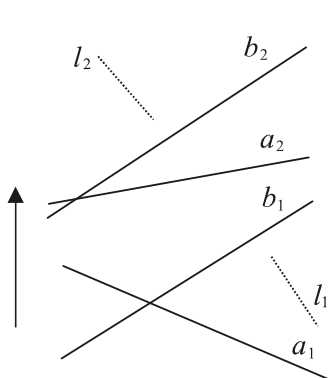
Obr. 8d



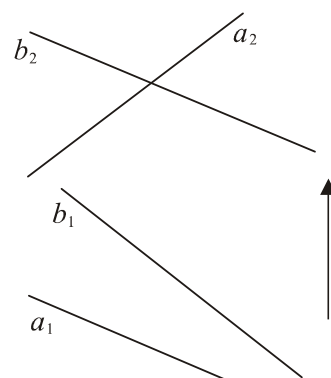
Obr. 8e



Obr. 8f

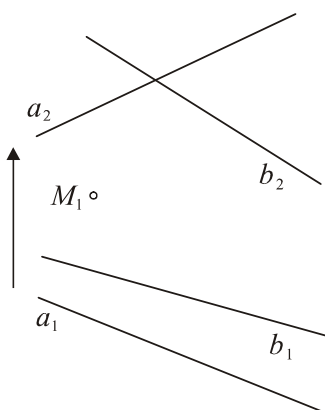


Obr. 9a

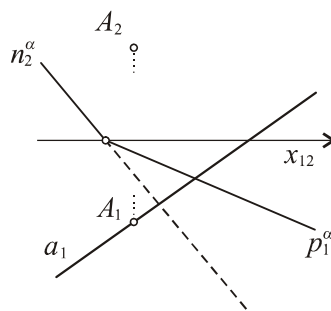


Obr. 9b

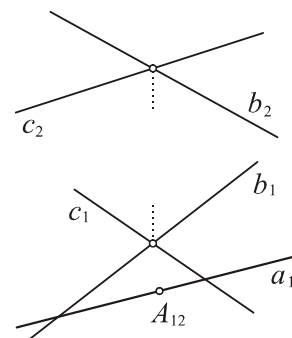
12. Zostrojte priečku mimobežných priamok  $a, b$  rovnobežnú s priamkou  $l$ . (Obr. 9a, 9b; v prípade 9b) je priamka  $l$  rovnobežná s priamkou  $x = \pi \cap \nu$ )
13. Zostrojte priečku mimobežných priamok  $a, b$  prechádzajúcu bodom  $M = (M_1, ?)$ , ktorý leží v rovine totožnosti. (Obr. 10)



Obr. 10

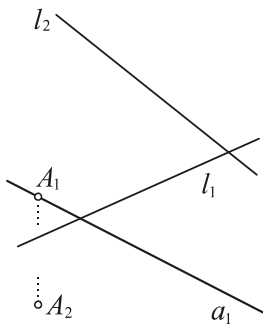


Obr. 11a

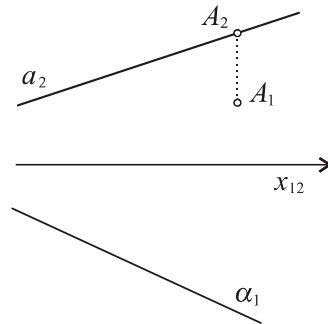


Obr. 11b

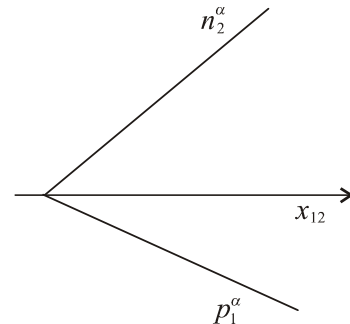
14. Zostrojte priesek rovinných oblastí s hranicami v trojuholníku  $ABC$  a rovnobežníku  $MNPQ$ . [ $A(0; j; 8j)$ ,  $B(4j; 6j; 0)$ ,  $C(-4,5j; j; j)$ ,  $M(-2j; 8j; j)$ ,  $N(5,5j; 4j; 3j)$ ,  $P(j; j; 7j)$ ]
15. Zostrojte priesek rovinných oblastí s hranicami v trojuholníkoch  $ABC$  a  $DEF$ . a)  $A(-2j; j; j)$ ,  $B(0; 4j; 5j)$ ,  $C(3j; 2j; 2j)$ ,  $D(-2j; 3j; 4j)$ ,  $E(3j; 0; 5j)$ ,  $F(0; 5j; 0)$ ; b)  $A(-4j; 1,5j; j)$ ,  $B(4j; 2,5j; j)$ ,  $C(-j; 7j; 5j)$ ,  $D(-5,5j; 4,5j; 2,5j)$ ,  $E(5j; 6j; 0)$ ,  $F(0; 0; 6j)$
16. Dourčite priamku  $a$  tak, aby prechádzala daným bodom  $A$  a bola rovnobežná s danou rovinou  $\alpha$ ; a)  $\alpha = \leftrightarrow p^\alpha n^\alpha$ ; b)  $\alpha = \leftrightarrow bc$ ; c)  $\alpha \parallel x \wedge l \subset \alpha$ ; d)  $\alpha \perp \pi$ . (Obr. 11a – 11d)



Obr. 11c

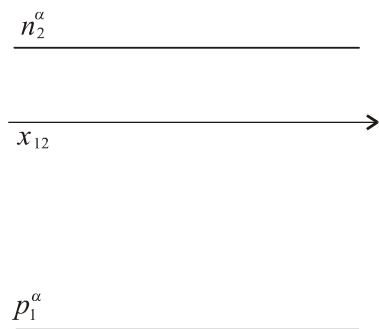


Obr. 11d

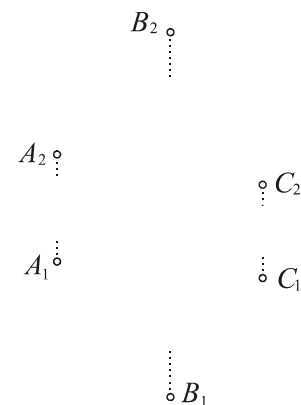


Obr. 12a

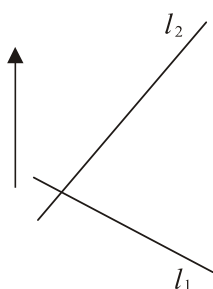
17. Zostrojte priesečnicu roviny  $\alpha$  s rovinou totožnosti a v prípade zvolenej základnice  $x_{12}$  i priesečnicu s rovinou súmernosti. a)  $\alpha = \leftrightarrow p^\alpha n^\alpha$ ; b)  $\alpha \parallel x$ ; c)  $\alpha = \leftrightarrow ABC$ ; d)  $\alpha \parallel x \wedge l \subset \alpha$ ; e)  $\alpha \perp \pi$ ; f)  $\alpha \perp x$ . (Ak nie je priesečnica určená pôdorysom a nárysom, dourčite ju dvojicou jej bodov.) (Obr. 12a – 12f)



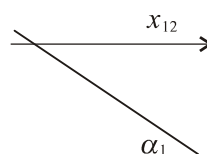
Obr. 12b



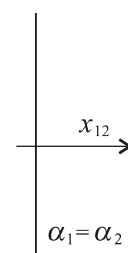
Obr. 12c



Obr. 12d

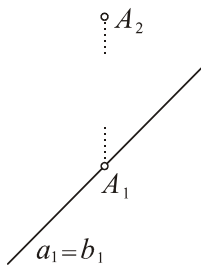


Obr. 12e

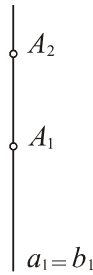


Obr. 12f

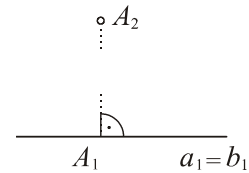
18. Dourčite priamky  $a, b$  tak, aby prechádzali bodom  $A$  a jedna z nich bola rovnobežná s rovinou súmernosti a druhá s rovinou totožnosti ( $a \parallel \sigma, b \parallel \tau$ ). (V prípade, ak priamka  $a/b$  nie je určená pôdorysom a nárysom, treba ju dourčiť ďalším bodom. (Obr. 13a – 13c)



Obr. 13a

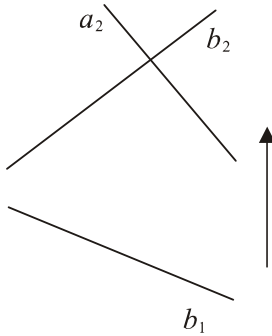


Obr. 13b

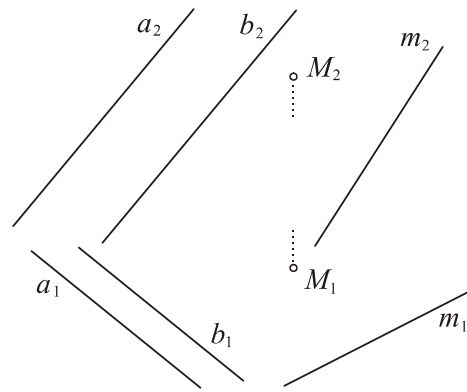


Obr. 13c

19. Dané sú priamky  $a = (? , a_2)$  ( $a_1 \parallel a_2$ ),  $b = (b_1, b_2)$ . Zostrojte priesečnicu roviny  $\alpha (b \subset \alpha \wedge \alpha \parallel a)$  s rovinou totožnosti. (Obr. 14)

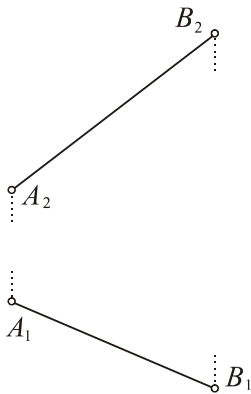


Obr. 14

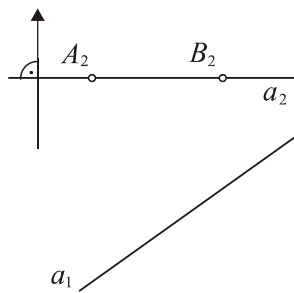


Obr. 15

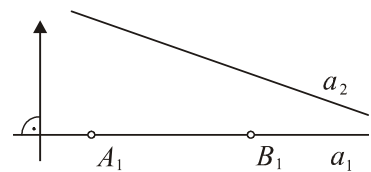
20. Zostrojte priamku, ktorá prechádza bodom  $M$ , je rovnobežná s danou rovinou  $\alpha = \leftrightarrow ab$  ( $a \parallel b$ ) a pretína priamku  $m$ . (Obr. 15)



Obr. 16a

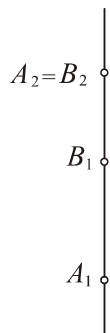


Obr. 16b



Obr. 16c

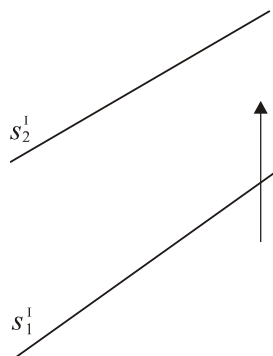
21. Zostrojte dĺžku úsečky  $AB$  a uhly zhodné s uhlami priamky  $AB$  s oboma priemetňami. (Obr. 16a – 16e).



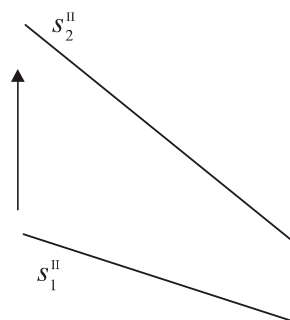
Obr. 16d



Obr. 16e

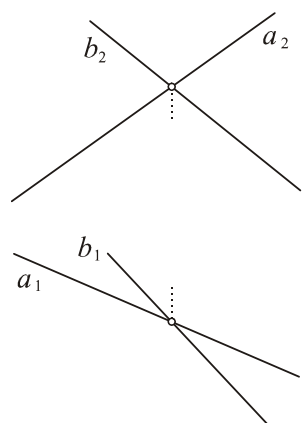


Obr. 17a

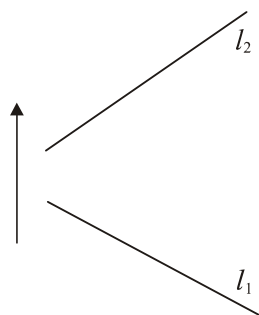


Obr. 17b

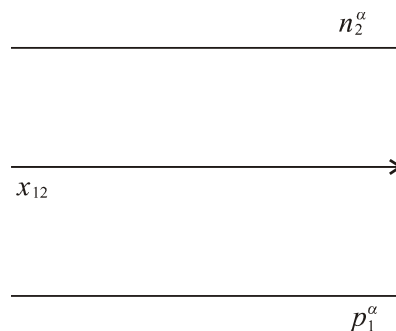
22. Zostrojte uhly zhodné s uhlami roviny  $\alpha$  s oboma priemetňami. V a), b) je rovina určená spádovou priamkou (príslušnej osnovy); c)  $\alpha = \leftrightarrow ab$ ; d)  $\alpha \parallel x \wedge l \subset \alpha$ ; e)  $\alpha \parallel x$ . (Obr. 17a – 17e)



Obr. 17c

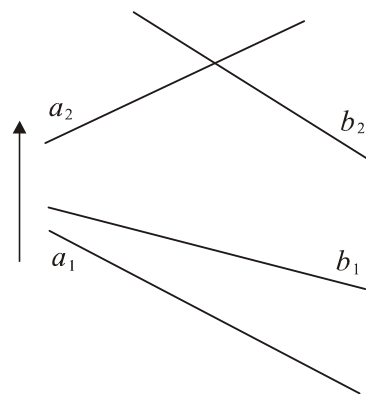


Obr. 17d

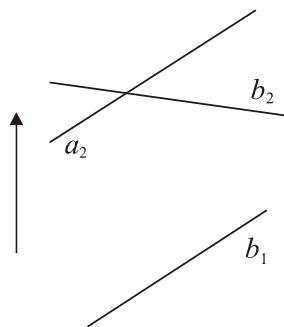


Obr. 17e

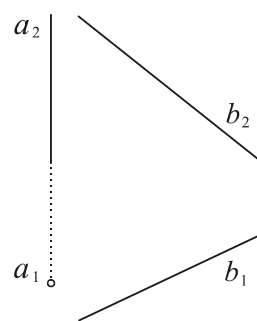
23. Zostrojte uhol zhodný s uhlom priamok  $a, b$  (obr. 18a – 18d); b)  $a \parallel v$ ; c)  $a \perp \pi$ ; d)  $a \parallel x$ .



Obr. 18a

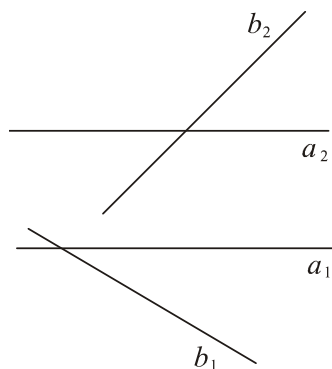


Obr. 18b

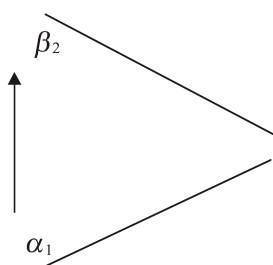


Obr. 18c

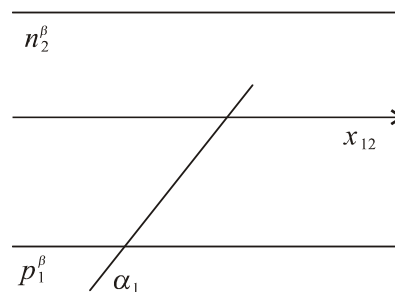
24. Zostrojte uhol zhodný s uhlom rovín  $\alpha, \beta$  (obr. 19a – 19d); a)  $\alpha \perp \pi, \beta \perp \nu$ ; b)  $\alpha \perp \pi, \beta \parallel x$ ; c)  $\alpha \parallel x \parallel \beta$ ; d)  $\beta = \leftrightarrow ab$ .



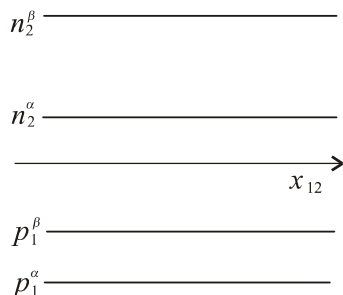
Obr. 18d



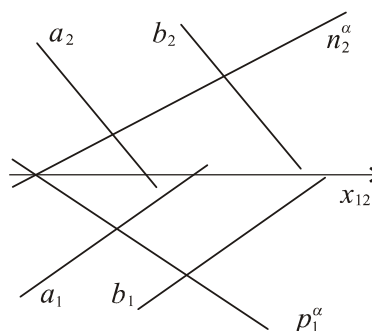
Obr. 19a



Obr. 19b

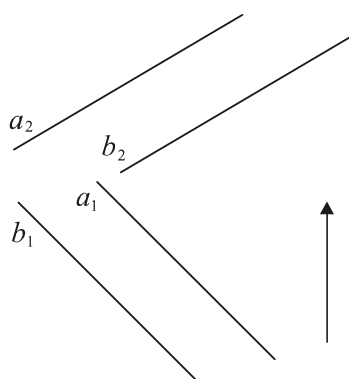


Obr. 19c

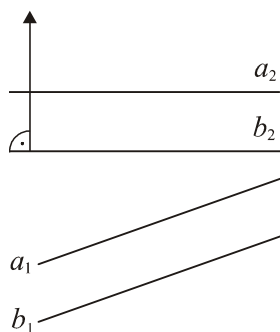


Obr. 19d

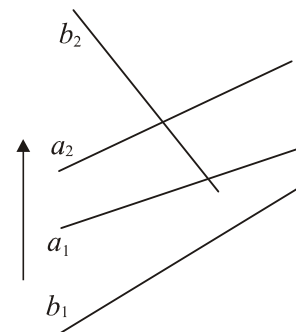
25. Zostrojte vzdialenosť priamok  $a, b$  (obr. 20a – 20c). (V a) i b) ide o rovnobežky.)



Obr. 20a



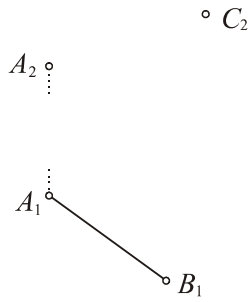
Obr. 20b



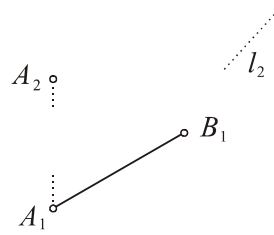
Obr. 20c

26. Dourčite obraz obdĺžnika  $ABCD$  ( $AB \parallel \pi$ ). ( $A = (A_1, A_2)$ ,  $B = (B_1, ?)$ ,  $C = (?, C_2)$ ) (Obr. 21)

27. Dourčite obraz štvorca  $ABCD$ , ak  $AB \parallel \pi$  a strana  $BC$  je rovnobežná s danou priamkou  $l$ . ( $A = (A_1, A_2)$ ,  $B = (B_1, ?)$ ,  $l = (?, l_2)$ ) (Obr. 22)

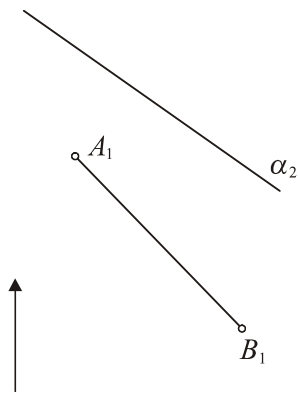


Obr. 21

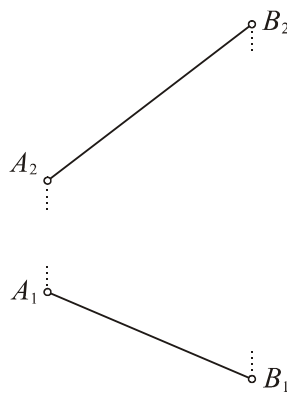


Obr. 22

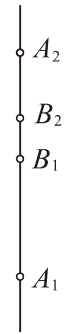
28. Zostrojte rovnostranný trojuholník  $ABC \subset \alpha$  ( $\alpha \perp \nu$ ). Úlohu riešte pomocou otočenia roviny  $\alpha$  okolo hlavnej priamky prvej osnovy do polohy rovnobežnej s priemietňou  $\pi$ . (Zvoľte si hlavnú priamku prechádzajúcu bodom A.) (Obr. 23)



Obr. 23

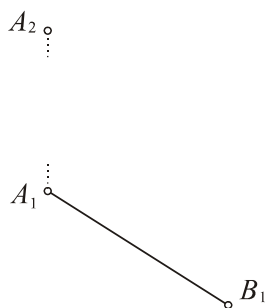


Obr. 24a

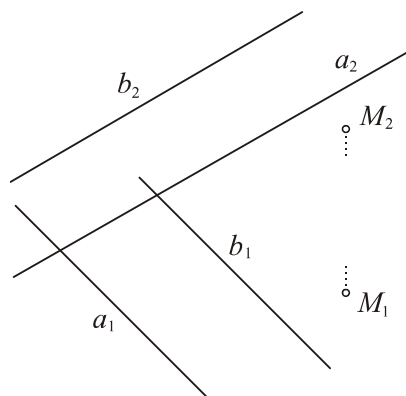


Obr. 24b

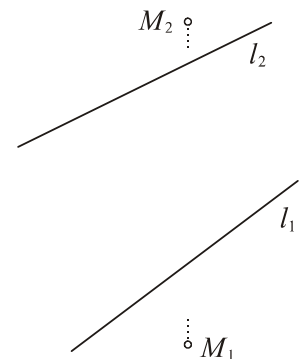
29. Zostrojte rovinu súmernosti úsečky  $AB$  (obr. 24a – 24c). (V c) platí:  $AB \parallel \pi$ .)



Obr. 24c

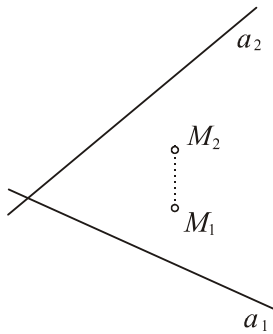


Obr. 25a

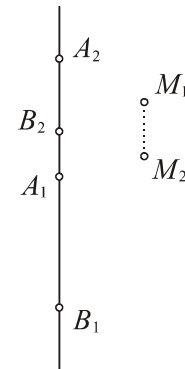


Obr. 25b

30. Zostrojte vzdialenosť bodu  $M = (M_1, M_2)$  od danej roviny  $\alpha$  (obr. 25a, b); a)  $\alpha = \leftrightarrow ab, a \parallel b$ ; b)  $\alpha \parallel x \wedge l \subset \alpha$ ; c)  $\alpha \perp \pi$ . V poslednom prípade si bod a rovinu zvolte v ľubovoľnej všeobecnej polohe (stopami) tak, aby neboli incidentné.
31. Zostrojte vzdialenosť bodu  $M$  od danej priamky  $a$  (obr. 26a – 26c); b)  $a = \leftrightarrow AB$ ; c) Priamka  $a$  je rovnobežná práve s jednou z priemetní – obraz priamky a bodu si zvolte ľubovoľne tak, aby bod neležal na priamke. Úlohu riešte dvoma spôsobmi.

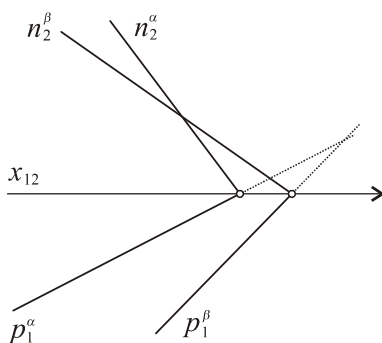


Obr. 26a

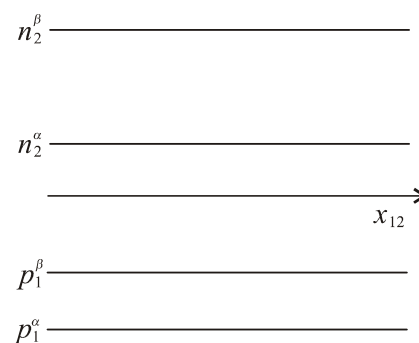


Obr. 26b

32. Zostrojte bod súmerne združený s daným bodom  $M$  podľa danej priamky  $a$ . (Obr. 26a – 26c, zadanie je zhodné so zadaním z cvičenia 31.)
33. Zostrojte priamku, ktorá prechádza daným bodom  $A$  a s priemetňami  $\pi, \nu$  má v danom poradí odchýlky a)  $30^\circ, 45^\circ$ ; b)  $60^\circ, 30^\circ$ ; c)  $60^\circ, 75^\circ$ . Obraz bodu  $A = (A_1, A_2)$  si zvolte ľubovoľne.
34. Zostrojte rovinu, ktorá prechádza daným bodom  $A$  a s priemetňami  $\pi, \nu$  má v danom poradí odchýlky a)  $60^\circ, 75^\circ$ ; b)  $30^\circ, 60^\circ$ ; c)  $45^\circ, 30^\circ$ .
35. Zostrojte rovinu súmernosti rovín  $\alpha, \beta$ . (Obr. 27a, b)



Obr. 27a

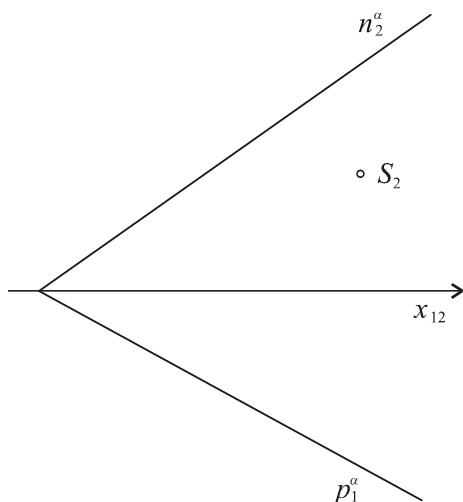


Obr. 27b

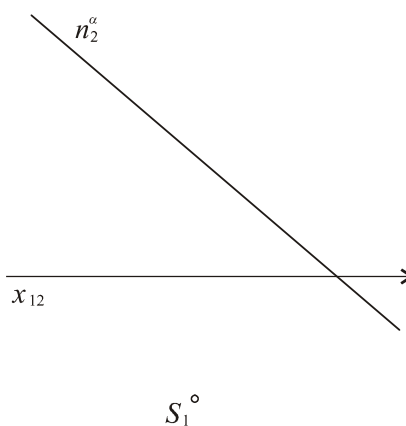
36. Daná je hranolová plocha osou  $o = \leftrightarrow SL$  a určujúcim pravidelným šesťuholníkom  $ABCDEF$  v rovine  $\pi$  so stredom  $S$ . Zostrojte ľubovoľný normálový rez tejto plochy a útvar zhodný s rezovým  $n$ -uholníkom. V prípade a) zostrojte aspoň jednu rovinu z druhej sústavy rovinných rezov plochy, ktoré sú pravidelnými šesťuholníkmi. [a)  $S(-6j; 3,5j; ?), L(0; 3,5j; 3j), A(-3,5j; 3j; ?)$ ; b)  $S, A$  ako v a),  $L(0; 6j; 3j)$ ]

37. Úlohu 36 vyriešte pre kružnicovú valcovú plochu s určujúcou kružnicou  $k$  so stredom  $S$  v rovine  $\pi$  a osou  $o$ . Polomer kružnice  $k$  si zvolte ľubovoľne. V prípade a) zostrojte aspoň jednu kružnicu z druhej sústavy kružnicových rezov plochy.

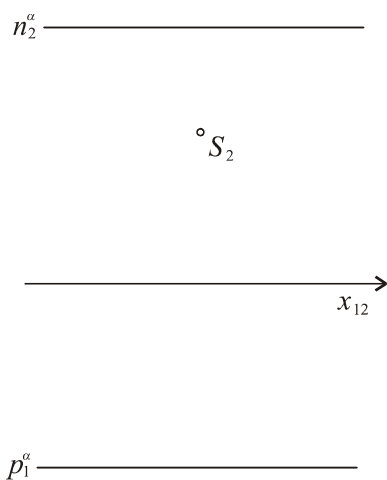
38. Zobrazte ľubovoľnú kružnicu so stredom  $S$  v rovine  $\alpha$ . a)  $\alpha \leftrightarrow p^\alpha n^\alpha$ ; b)  $\alpha \perp v$ ; c)  $\alpha \parallel x$  (obr. 28a – 28c).



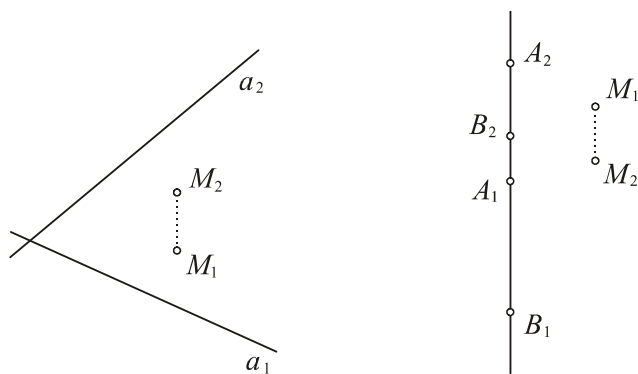
Obr. 28a



Obr. 28b



Obr. 28c



Obr. 29

39. Zostrojte dráhu bodu  $M$  pri rotácii okolo priamky  $a \leftrightarrow AB$ . (Obr. 29)

**Úlohy na konštrukcie základných telies:** Riešte v Mongeovej metóde úlohy 1 – 16 uvedené v závere cvičení v *metóde kótovaného zobrazenia*.



## Literatúra

- [1] Klenková, P.: *Stereometria – Elementárna geometria trojrozmerného euklidovského priestoru*. Diplomová práca, 2006, s. 120. Univerzita Komenského v Bratislave, FMFI UK, Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky. In: Internetová stránka Katedry algebry, geometrie a didaktiky matematiky MFF, oddelenie geometrie a počítačovej grafiky, UK Bratislava
- [2] Kraemer, E.: *Zobrazovací metody (I. diel, II. diel)*. Promítání rovnoběžné. 1991, 1. vydanie, s. 460. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. ISBN: 80-04-21778-8
- [3] Lászlóvá K.: *Osvetlenie základných geometrických telies*. Diplomová práca, 2000, s. 91. Univerzita Komenského v Bratislave, FMFI UK, Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
- [4] Sklenáriková, Z. – Pémová, M.: *Perspektívna afinita medzi dvoma rovinami* (učebný text a cvičenia), 2008 (úprava 2013), s. 23. In: Internetová stránka Katedry algebry, geometrie a didaktiky matematiky MFF, oddelenie geometrie a počítačovej grafiky, UK Bratislava
- [5] Sklenáriková, Z. : *Kótované zobrazenie* (učebný text a cvičenia), 2011 (úprava 2013), s. 52. In: Internetová stránka ako v [1]
- [6] Urban, A.: *Deskriptivní geometrie I*. 1965, 1. vydanie, s. 368. Praha: Státní nakladatelství technické literatury