

Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky FMFI UK,
oddelenie geometrie

Základné geometrické telesá a ich styčné, dotykové roviny

Soňa Kudličková, Daniela Hansmanová

Úvod	3
1. Práca v GeoGebre	4
2. Základné geometrické telesá a ich vlastnosti	7
2.1. Hranolová plocha, hranolový priestor, hranol.....	7
2.2. Kružnicová valcová plocha, kružnicový valcový priestor, valec.....	15
2.3. Ihlanová plocha, ihlanový priestor, ihlan.	21
2.4. Kružnicová kužeľová plocha, kruhový kužeľový priestor, kužeľ.....	29
2.5. Guľová plocha, guľa.	35
3. Algoritmy konštrukcie styčných a dotykových rovín	39
3.1. Algoritmus konštrukcie styčných rovín hranola	39
3.2. Algoritmus konštrukcie dotykových rovín valca	44
3.3. Algoritmus konštrukcie styčných rovín ihlana	48
3.4. Algoritmus konštrukcie dotykových rovín kužeľa.....	54
3.5. Algoritmus konštrukcie dotykových rovín guľovej ploche	63
4. Aplikácia algoritmov na konštrukciu styčných a dotykových rovín	62
Záver	72
Literatúra.....	73

Úvod

Hlavným cieľom práce je rozšíriť učivo na tému Styčné a dotykové roviny geometrických telies [4]. Mnohé témy z geometrie sú spracované podrobne, ale dôraz sa kladie viac na teoretickú časť ako na vizualizáciu pojmov a obrázky. V práci je snaha vytvoriť vizualizáciu definícií, viet a príkladov. Obrázky sú tvorené v matematickom softvéri GeoGebra, ktorý umožňuje konštrukcie telies v priestore a výsledný 2D priemet telesa doplniť o názorný – priestorový obrázok pomocou jeho anaglyfu.

Práca má štyri kapitoly. V prvej kapitole sú uvedené základné informácie o tvorbe obrázkov v matematickom softvéri GeoGebra, v práci sú tri rôzne typy obrázkov vytvorené v tomto softvéri. Prvý typ obrázkov sú klasické priemety geometrických telies a ich dotykových a styčných rovín. Najdôležitejším typom obrázkov sú anaglyfické obrázky vytvorené v GeoGebre nástrojom „Projekcia pre okuliare“. Výsledkom je obrázok, ktorý pri použití špeciálnych okuliarov ponúka priestorovú informáciu objektu a je pomôckou najmä pre čitateľov, ktorí majú problémy s priestorovou predstavivosťou a z klasického 2D priemetu si nevedia vymodelovať objekt v priestore. Tretí typ obrázkov vytvorený v GeoGebre je zameraný na konštrukciu dotykových rovín jednotlivých telies v pravouhlej axonometrii.

Témou druhej kapitoly sú základné geometrické telesá, ich vytvorenie, súvisiace pojmy, vlastnosti, vyšetrovanie vzájomnej polohy telesa s priamkou a rovinou. Každá situácia je reprezentovaná klasickým priemetom a anaglyfickým obrázkom.

Algoritmy styčných a dotykových rovín tvoria tretiu kapitolu. Jednotlivé prípady sú spracované ako konštrukčné úlohy t.j. obsahujú rozbor, konštrukciu, diskusiu a záver. Pričom v diskusii sú graficky ilustrované všetky možné situácie deviatich algoritmov.

Štvrtá kapitola práce chce poukázať na aplikáciu navrhnutého algoritmu v zobrazovacej metóde – pravouhlej axonometrii a to pre každé spracované teleso – hranol, valec, ihlan, kužeľ a guľu. Navrhnuté úlohy obsahujú zadanie, vykreslenie telesa v pravouhlej axonometrii a použitie zodpovedajúceho algoritmu ku konštrukcii styčnej resp. dotykovej roviny v danej zobrazovacej metóde. Tieto úlohy poukazujú na to, že ak poznáme algoritmus konštrukcie styčnej resp. dotykovej roviny z tretej kapitoly, tak konštrukcia v pravouhlej axonometrii využíva vlastnosti a kroky tohto algoritmu.

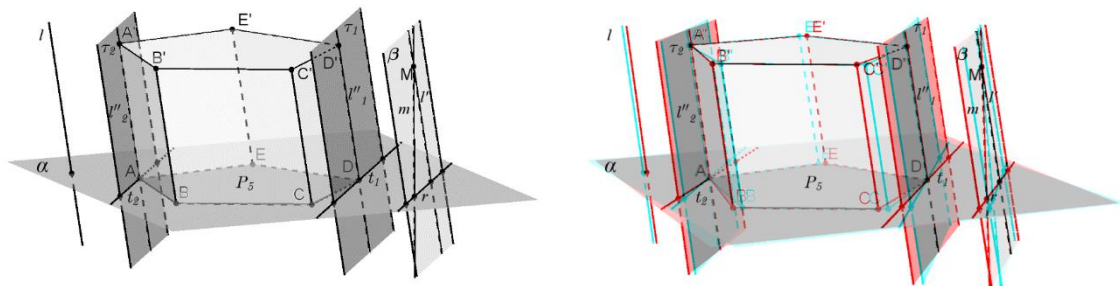
Snahou práce je podporiť priestorovú predstavivosť, pri dodržovaní teoretických východísk, práve tvorbou anaglyfických obrázkov v softvéri GeoGebra.

1. Práca v GeoGebre

GeoGebra je počítačový program, ktorý umožňuje používateľovi riešiť príklady a reprezentovať rôzne prípady a spôsoby riešenia matematických príkladov. Tento softvér je zameraný na geometriu, ktorá je prepojená s analýzou a algebrou, umožňuje konštruovať rôzne grafy, telesá, tabuľky a iné. Geogebra je voľne dostupný softvér, ktorý vytvoril Markus Hohenwarter v roku 2001 a používa sa v mnohých školách a v rôznych vzdelávacích programoch.

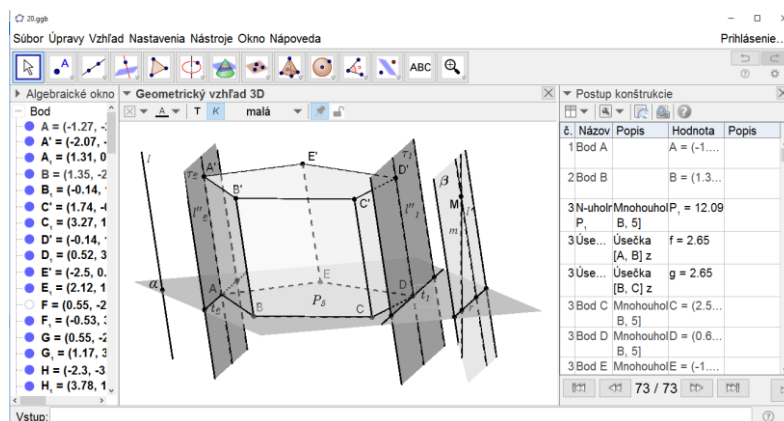
Práca v Geogebre vyžaduje precíznosť a dôslednosť. Softvér obsahuje viacero nastavení, pomocou ktorých vieme vybrať prácu v rovine alebo v priestore, pričom softvér zaznamenáva postup konštrukcie a kreslenie sa uskutočňuje prostredníctvom rôznych nástrojov a rôznych ďalších funkcií.

Grafické ilustrácie v práci sú vytvorené v GeoGebre. Každý obrázok má dva segmenty, klasický a anaglyfický obrázok. (Obr. 1)



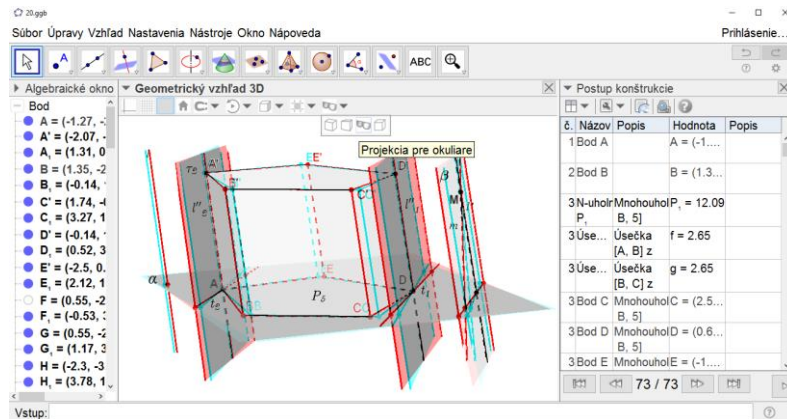
Obr. 1: Klasický a anaglyfický obrázok

Segment vľavo je zostrojený v GeoGebre tak, ako sa nachádza v učebniciach v kapitole stereometria. Obrázok je vytvorený konštrukciou telesa (obr. 2) pomocou vstupných údajov – mnohoúhelník, kružnica, priamka a ďalších nástrojov, ktoré GeoGebra ponúka.



Obr. 2: Konštrukcia telesa v GeoGebre

Pre lepšiu vizualizáciu scény je v segmente vpravo (obr. 1.), použitý nástroj „Projekcia pre okuliare“ = anaglyf. (Obr. 3)



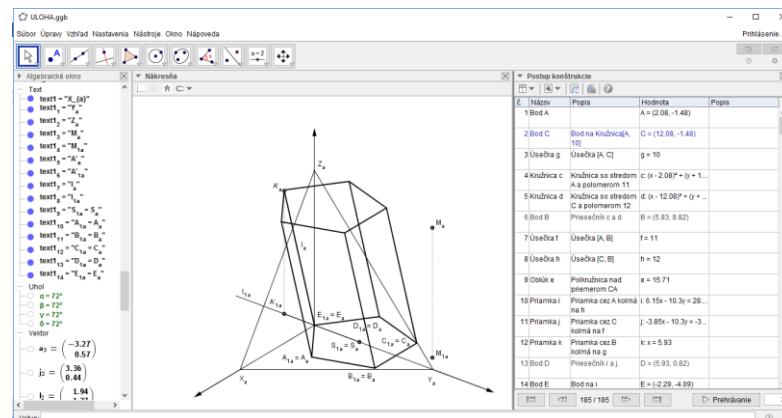
Obr. 3: Tvorba anaglyfu

Výsledkom je anaglyfický obrázok, ktorý po prezeraní zodpovedajúcimi okuliarmi (obr. 4), ponúkne priestorovú informáciu o vzájomnej polohe objektov v priestore.



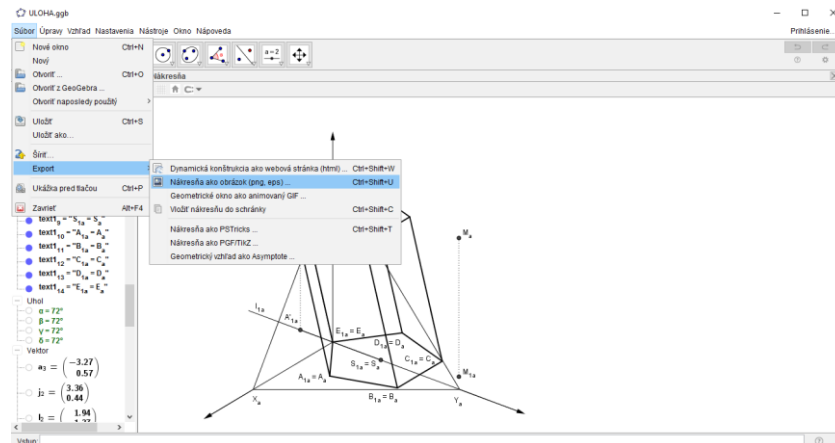
Obr. 4: Okuliare pre anaglyfické obrázky

Nástroje GeoGebry na kreslenie sú použité aj na konštrukcie objektov v pravouhlej axonometrii. Na obr. 5 je zachytený postup konštrukcie jednej z úloh.



Obr. 5: Konštrukcia úlohy v pravouhlej axonometrii

Vytvorený obrázok v programe GeoGebra sa môže exportovať v rôznych formátoch, ako obrázok (obr. 6), resp. animovaný GIF či webová stránka.



Obr. 6: Exportovanie obrázku z programu GeoGebra

V ďalšom texte sú obrázky telies zmenšené. Pre zvýšenie predstavivosti je vhodné čítať text na monitore počítača a použiť zväčšenie obrázkov. Použitím zodpovedajúcich okuliarov, anaglyfický obrázok ponúkne čierno – biely priestorový obraz.

2. Základné geometrické telesá a ich vlastnosti

2.1. Hranolová plocha, hranolový priestor, hranol.

Definícia 2.1.1:

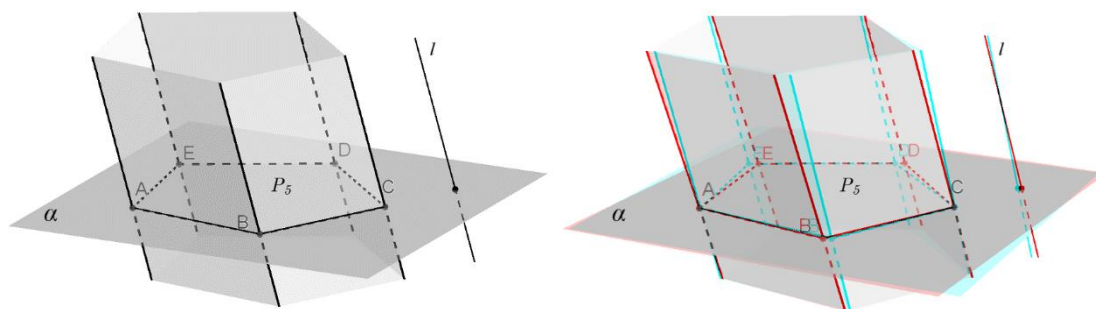
Nech je daný mnohouholník P_n v rovine α a priamka l rôznobežná s touto rovinou.

Hranolová plocha je množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú mnohouholník P_n a patria do osnovy priamky l .

Hranolový priestor je množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú mnohouholník P_n , jeho vnútro a patria do osnovy priamky l .

Označenie: hranolová plocha $\bar{H}_n(P_n \subset \alpha, l)$, obr. 7: $\bar{H}_5(P_5 \subset \alpha, l)$

hranolový priestor $H_n(P_n \subset \alpha, l)$



Obr. 7: $\bar{H}_5(P_5 \subset \alpha, l)$

Súvisiace pojmy:

Určujúci mnohouholník plochy – mnohouholník P_n v rovine α ; **osnovová priamka** – priamka l a každá priamka rovnobežná s priamkou l ; **osnovová rovina** – rovina rovnobežná s priamkou l ; **tvoriace priamky plochy** – osnovové priamky patriace ploche; **hrana plochy** – tvoriaca priamka prechádzajúca vrcholom určujúceho mnohouholníka; **stena plochy** – množina bodov tvoriacich priamok, ktoré pretínajú jednu stranu určujúceho mnohouholníka; **styčná rovina plochy** – osnovová rovina, ktorá má s plochou spoločnú práve jednu hranu alebo stenu.

Keď hovoríme o hranolovej ploche a hranolovom priestore, riadime sa vlastnosťami určujúceho mnohouholníka P_n . Uvažujeme len **konvexný mnohouholník** P_n a príslušnú konvexnú hranolovú plochu, ktorá rozdeľuje priestor na oblasť konvexnú a nekonvexnú.

Súvisiace pojmy:

Vnútorne body hranolovej plochy – body priestoru patriace konvexnej oblasti vytvorenej hranolovou plochou; **vnútro hranolovej plochy** – množina všetkých vnútorných bodov hranolovej plochy; **vonkajšie body hranolovej plochy** – body priestoru patriace nekonvexnej oblasti určenej hranolovou plochou.

Veta 2.1.1:

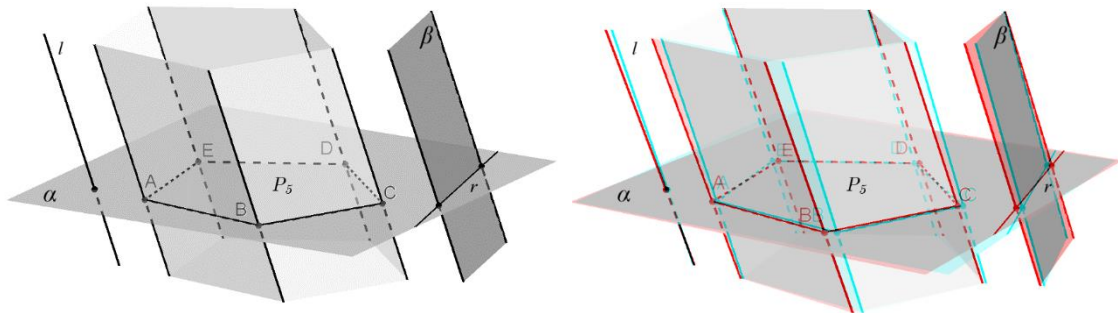
Osnovová rovina β a hranolová plocha $\bar{H}_n(P_n \subset \alpha, l)$ majú nasledovné polohy:

- žiaden spoločný bod (obr. 8a);
- spoločnú jednu hranu plochy (obr. 8b);
- spoločnú stenu plochy (obr. 8c);
- spoločné dve rôzne tvoriace priamky plochy (obr. 8d).

Dôkaz:

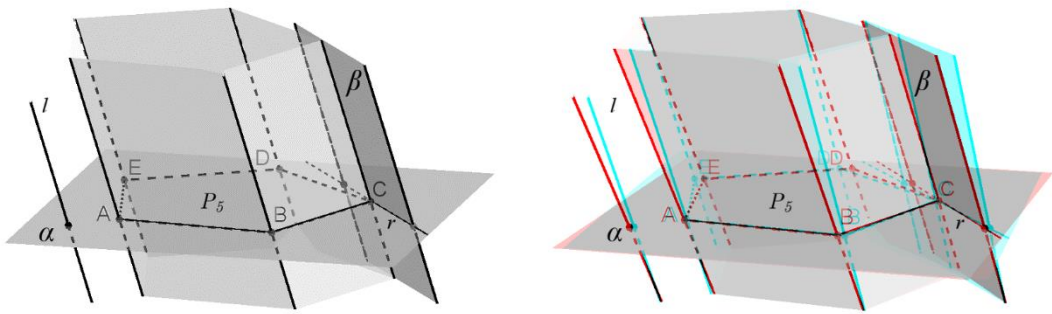
Vzájomnú polohu hranolovej plochy $\bar{H}_n(P_n \subset \alpha, l)$ a osnovovej roviny β môžeme určiť na základe polohy priesečnice rovín $\beta \cap \alpha = r$ a určujúceho mnohouholníka P_n , na obr. 8a – 8d je hranolová plocha $\bar{H}_5(P_5 \subset \alpha, l)$. V prípade, že:

- priesečnica rovín $\beta \cap \alpha = r$ a určujúci mnohouholník P_n nemajú žiadny spoločný bod (obr. 8a), potom ani osnovová rovina β a hranolová plocha nemajú žiadny spoločný bod.



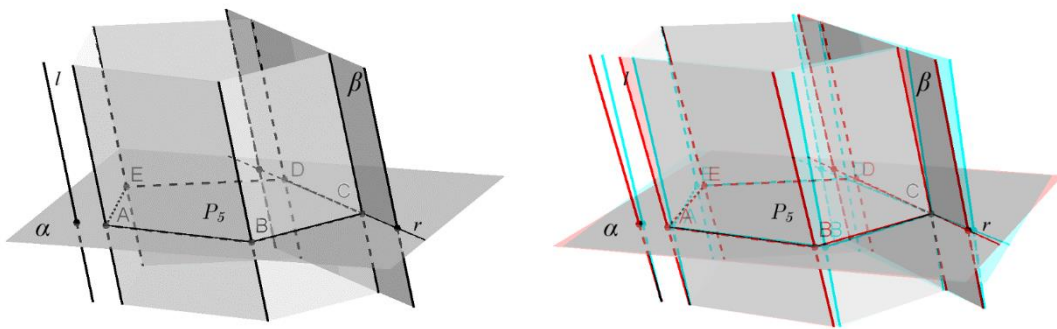
Obr. 8a: $r \cap P_5 = \emptyset$

- priesečnica rovín $\beta \cap \alpha = r$ a určujúci mnohouholník P_n majú spoločný práve jeden bod, ktorý je vrcholom určujúceho mnohouholníka P_n (obr. 8b, bod C), potom aj osnovová rovina β a hranolová plocha \bar{H}_n majú spoločnú jednu hranu plochy incidujúcu vrcholom.



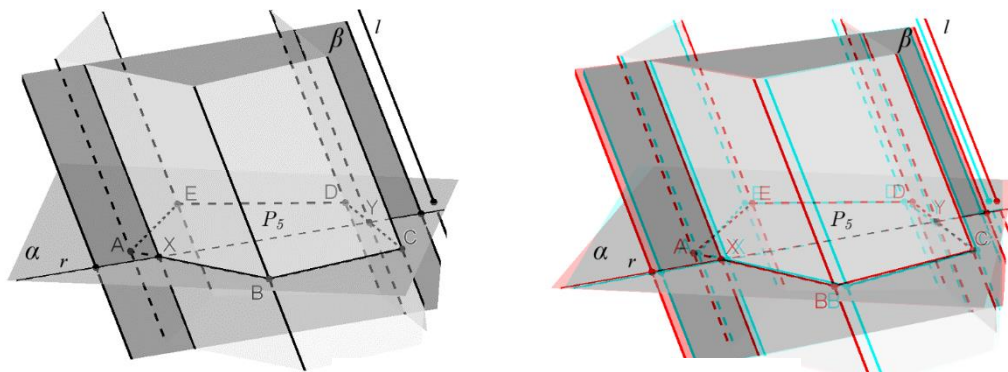
Obr. 8b: $r \cap P_5 = \{C\}$

- c) priesečnica rovín $\beta \cap \alpha = r$ a určujúci mnohouholník P_n majú spoločnú práve jednu stranu mnohouholníka, potom osnovová rovina β a hranolová plocha \bar{H}_n majú spoločnú stenu plochy. (Obr. 8c)



Obr. 8c: $r \cap P_5 = \overline{CD}$

- d) priesečnica rovín $\beta \cap \alpha = r$ a určujúci mnohouholník P_n majú spoločné práve dva rôzne body (obr. 8d, body X, Y), ktoré nepatria tej istej hrane mnohouholníka P_n . Vtedy osnovová rovina β a hranolová plocha \bar{H}_n majú spoločné dve rôzne tvoriace priamky plochy.



Obr. 8d: $r \cap P_5 = \overline{XY}$

V prípade b) a c) je osnovová rovina β styčnou rovinou hranolovej plochy $\bar{H}_n(P_n \subset \alpha, l)$.

Veta 2.1.2:

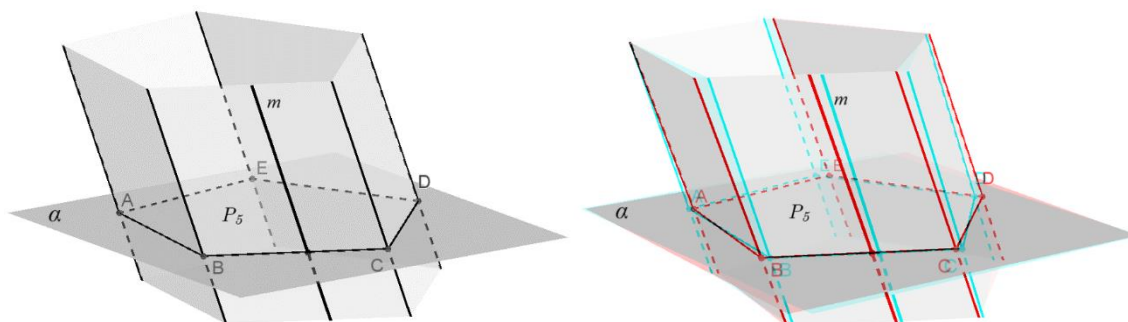
Priamka m a hranolová plocha $\bar{H}_n(P_n \subset \alpha, l)$ majú nasledovné polohy:

1. Ak priamka m je osnovová priamka, tak je buď:
 - a) tvoriaca priamka plochy (obr. 9a) alebo
 - b) nemá s plochou žiaden spoločný bod (obr. 9b).
2. Ak priamka m nie je osnovová priamka tak:
 - c) nemá s plochou žiaden spoločný bod (obr. 9c);
 - d) obsahuje bod hrany (obr. 9d);
 - e) obsahuje úsečku v stene (obr. 9e);
 - f) pretína plochu v dvoch rôznych bodoch (obr. 9f).

Dôkaz:

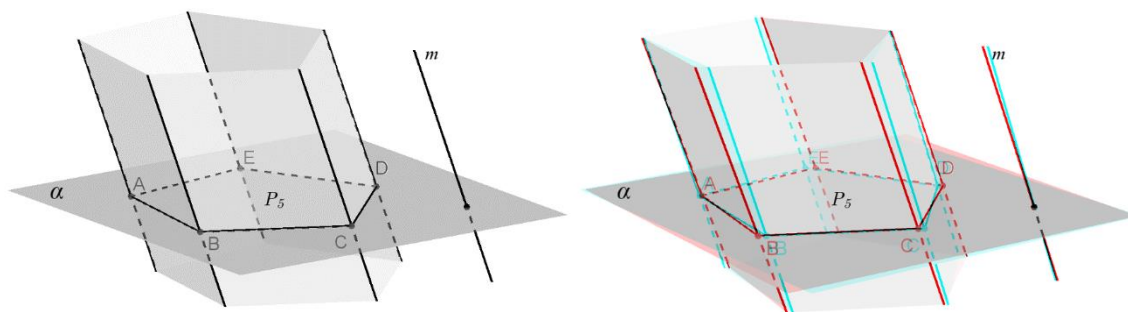
1. Priamka m je osnovová:

- a) teda priamka m patrí hranolovej ploche, je jej tvoriacou priamkou. (Obr. 9a)



Obr. 9a: $m \cap \bar{H}_5 = m$

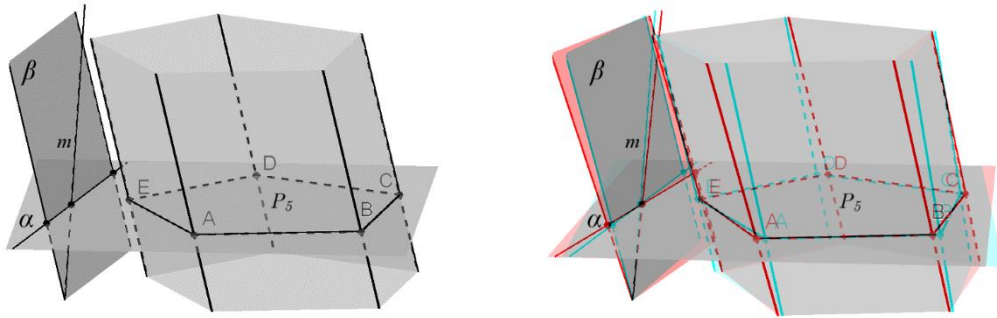
- b) a prechádza vonkajším bodom hranolovej plochy. Vtedy je priamka m rovnobežná s tvoriacimi priamkami plochy a nemá s plochou žiaden spoločný bod. (Obr. 9b)



Obr. 9b: $m \cap \bar{H}_5 = \emptyset$

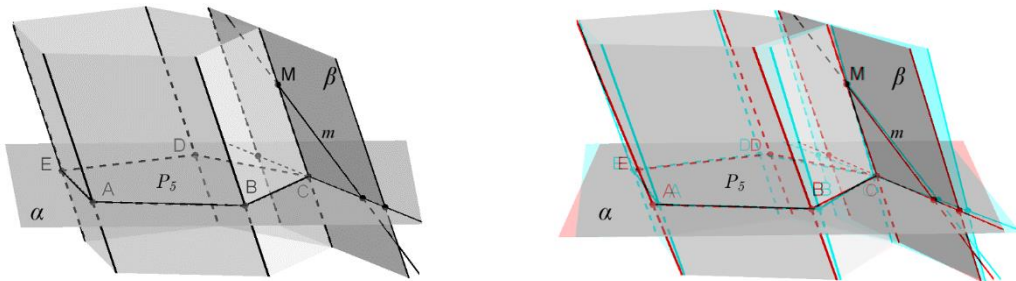
2. Určíme osnovovú rovinu β incidentnú s priamkou m . Priamka m nie je osnovová. Polohu priamky a hranolovej plochy \bar{H}_n určíme na základe vzájomnej polohy osnovovej roviny β a hranolovej plochy (veta 2.1). Vieme, že môžu nastať nasledovné prípady:

c) osnovová rovina β a hranolová plocha nemajú žiaden spoločný bod, teda ani priamka m a hranolová plocha nemajú žiaden spoločný bod. (Obr. 9c)



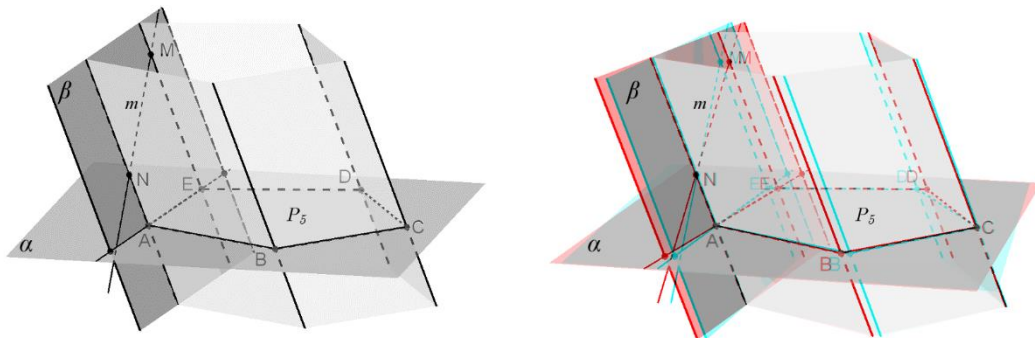
Obr. 9c: $m \cap \bar{H}_5 = \emptyset$

d) osnovová rovina β a hranolová plocha majú spoločnú práve jednu hranu plochy, vtedy priamka m obsahuje bod hrany hranolovej plochy \bar{H}_n . (Obr. 9d bod M)



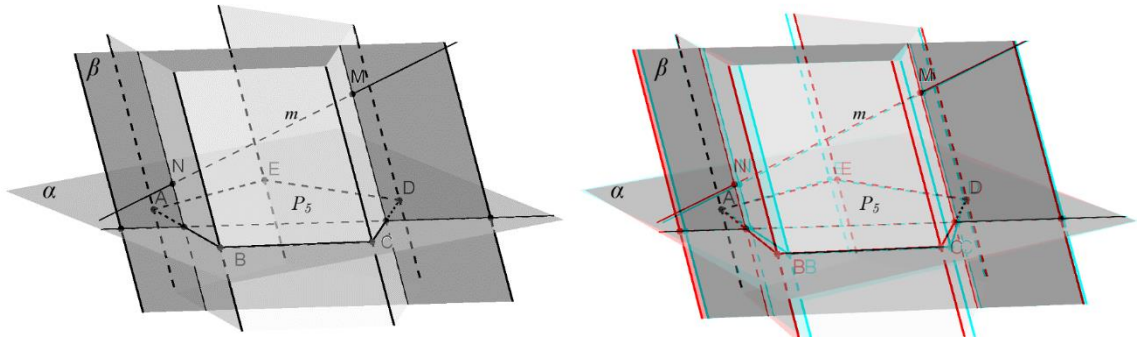
Obr. 9d: $m \cap \bar{H}_5 = \{M\}$

e) osnovová rovina β a hranolová plocha majú spoločnú stenu plochy, vtedy priamka m obsahuje úsečku v stene hranolovej plochy \bar{H}_n . (Obr. 9e úsečka \overline{MN})



Obr. 9e: $m \cap \bar{H}_5 = \overline{MN}$

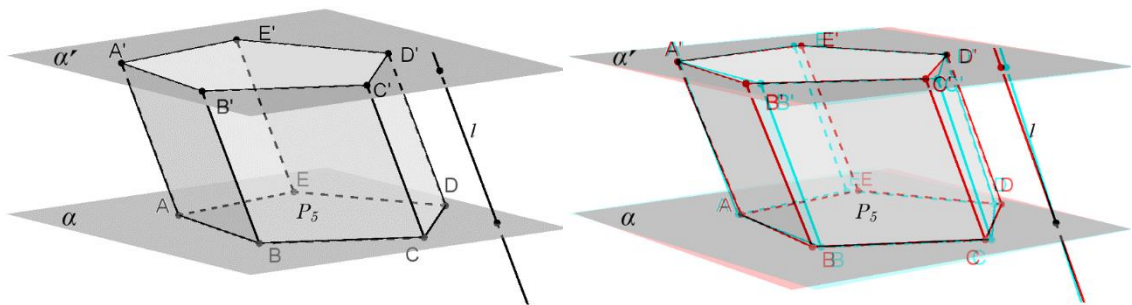
- f) osnovová rovina β a hranolová plocha majú spoločné dve rôzne tvoriace priamky, vtedy priamka m pretína plochu v dvoch rôznych bodoch. (Obr. 9f body M, N)



Obr. 9f: $m \cap \bar{H}_5 = \{M, N\}$

Definícia 2.1.2:

Hranol je prienik hranolového priestoru $H(P_n \subset \alpha, l)$ a priestorovej vrstvy určenej dvomi rovnobežnými rovinami $\alpha, \alpha' \neq \alpha$, ktoré nie sú osnovové roviny hranolového priestoru. (Obr. 10)



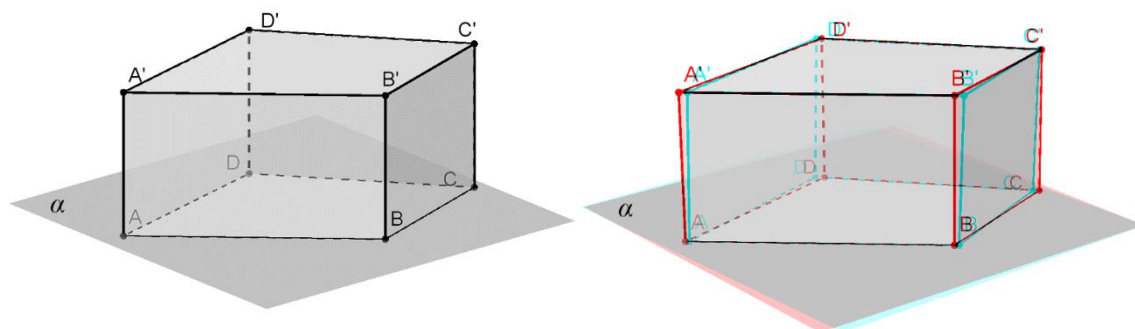
Obr. 10: $H_5(ABCD, A'B'C'D')$

Súvisiace pojmy:

Podstavy hranola – mnohouholníky $H \cap \alpha, H \cap \alpha'$, (zhodné mnohouholníky); **vrcholy hranola** – vrcholy podstáv; **bočné hrany** – časti hrán príslušnej hranolovej plochy patriace hranolu; **podstavné hrany** – hrany podstáv; **bočné steny** – časti stien príslušnej hranolovej plochy patriace hranolu (rovnobežníky); **steny hranola** – podstavy a bočné steny; **výška hranola** – vzdialenosť rovín podstáv.

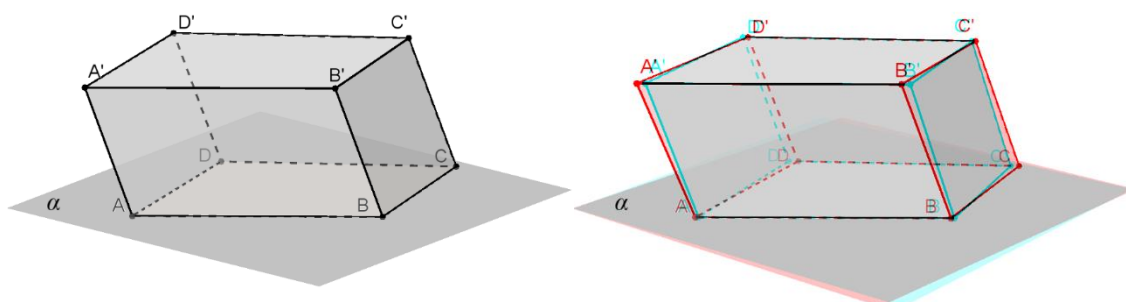
V pedagogickej praxi sa stretávame s hranolmi (obr. 11a – 11f):

a) **kolmý hranol** – bočné steny sú kolmé na rovinu podstáv



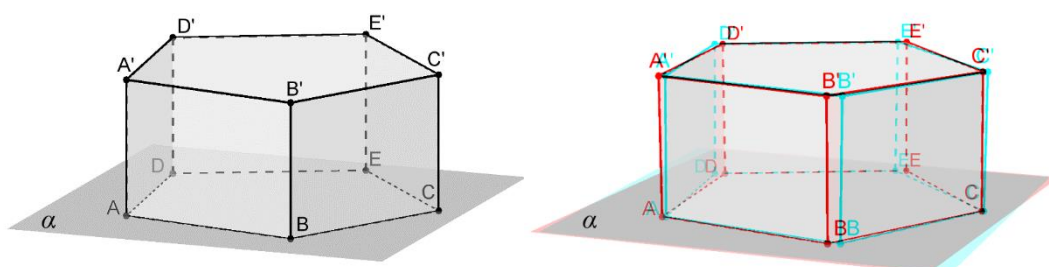
Obr. 11a: Kolmý 4-boký hranol

b) **šikmý hranol** – hranol, ktorý nie je kolmý



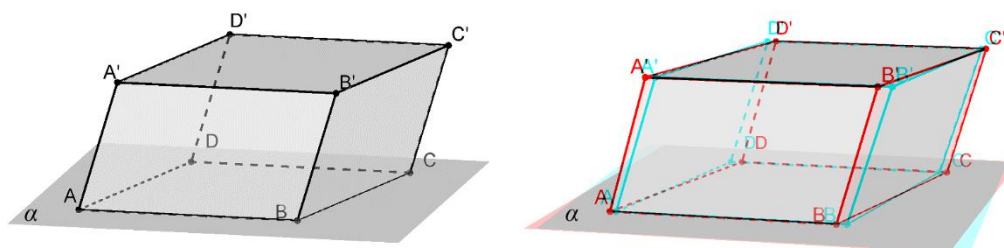
Obr. 11b: Šikmý 4-boký hranol

c) **pravidelný hranol** – kolmý hranol, ktorého určujúci mnohouholník je pravidelný mnohouholník



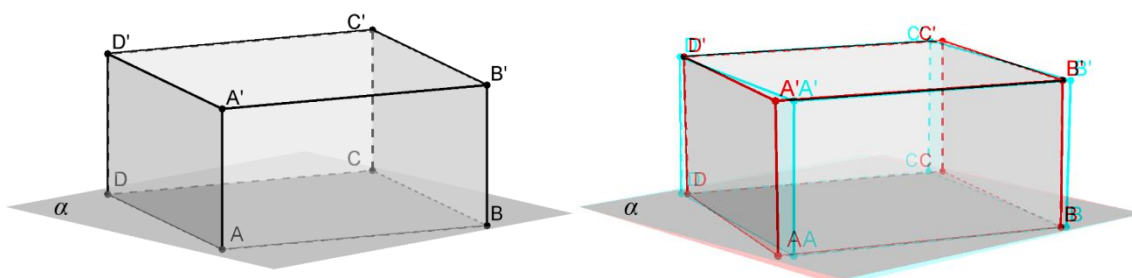
Obr. 11c: Pravidelný 5-boký hranol

d) **rovnobežnost** – šikmý hranol, ktorého podstava je rovnobežník



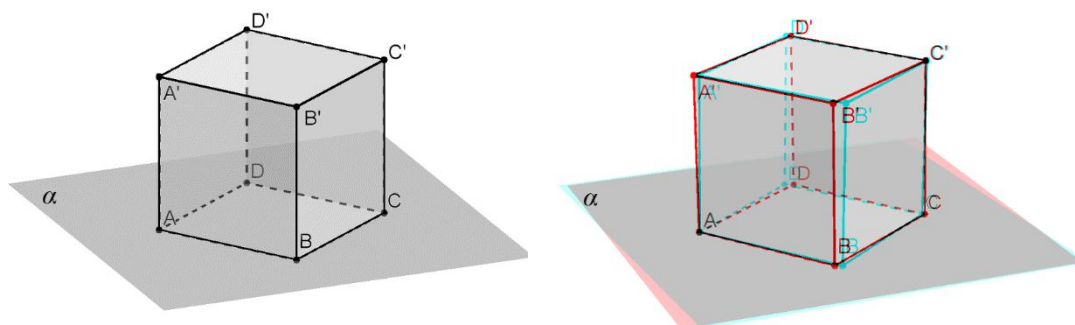
Obr. 11d: Rovnobežnost

e) **kváder** – kolmý hranol, ktorého podstava je pravouholník (obdĺžnik, štvorec)



Obr. 11e: Kváder

f) **kocka** – pravidelný hranol, ktorého každá stena je štvorec



Obr. 11f: Kocka

2.2. Kružnicová valcová plocha, kružnicový valcový priestor, valec.

Definícia 2.2.1:

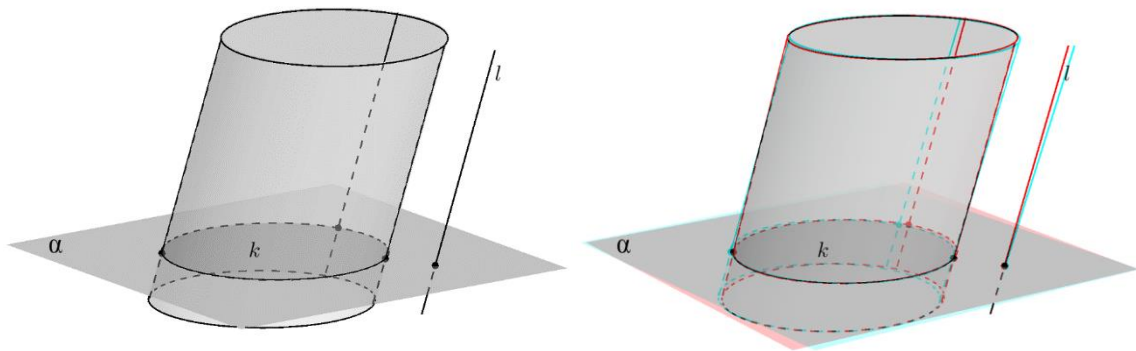
Nech je daná kružnica k v rovine α a priamka l rôznobežná s touto rovinou.

Kružnicová valcová plocha je množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú kružnicu k a patria do osnovy priamky l .

Kružnicový valcový priestor je množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú kružnicu k a jej vnútro a patria do osnovy priamky l .

Označenie: kružnicová valcová plocha $\bar{V}(k \subset \alpha, l)$, obr. 12: $\bar{V}(k \subset \alpha, l)$

kruhový valcový priestor $V(k \subset \alpha, l)$



Obr. 12: $\bar{V}(k \subset \alpha, l)$

Súvisiace pojmy:

Určujúca kružnica plochy – kružnica k v rovine α ; **osnovová priamka** – priamka l a každá priamka rovnobežná s priamkou l ; **osnovová rovina** – rovina rovnobežná s priamkou l ; **tvoriace priamky plochy** – osnovové priamky patriace ploche; **dotyková rovina plochy** – osnovová rovina, ktorá má s plochou spoločnú práve jednu tvoriacu priamku.

Poznámka:

V texte budeme hovoriť len o valcovej ploche, valcovom priestore, pretože určujúci útvar je kružnica resp. kruh.

Súvisiace pojmy:

Vnútorne body valcovej plochy – body priestoru patriace vnútornej oblasti vytvorenej valcovou plochou; **vnútro valcovej plochy** – množina všetkých vnútorných bodov valcovej plochy; **vonkajšie body valcovej plochy** – body priestoru patriace vonkajšej oblasti určenej valcovou plochou.

Veta 2.2.1:

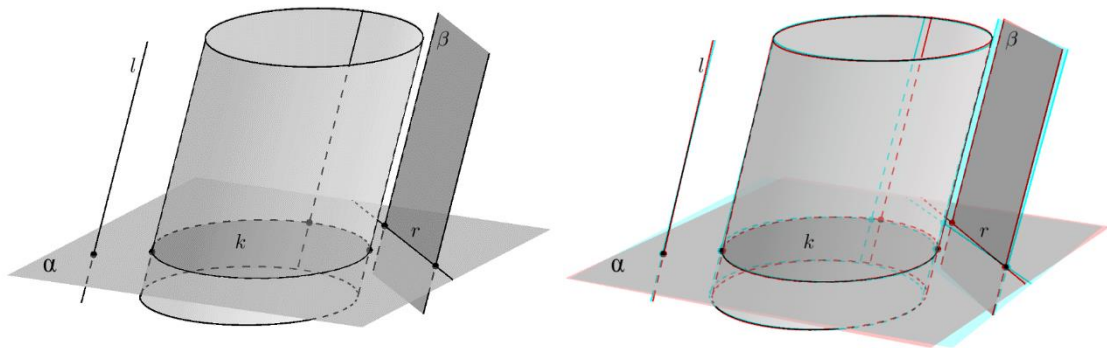
Osnovová rovina β a valcová plocha $\bar{V}(k \subset \alpha, l)$ majú nasledovné polohy:

- žiaden spoločný bod (obr. 13a);
- spoločnú práve jednu tvoriacu priamku plochy (obr. 13b);
- dve rôzne tvoriace priamky (obr. 13c).

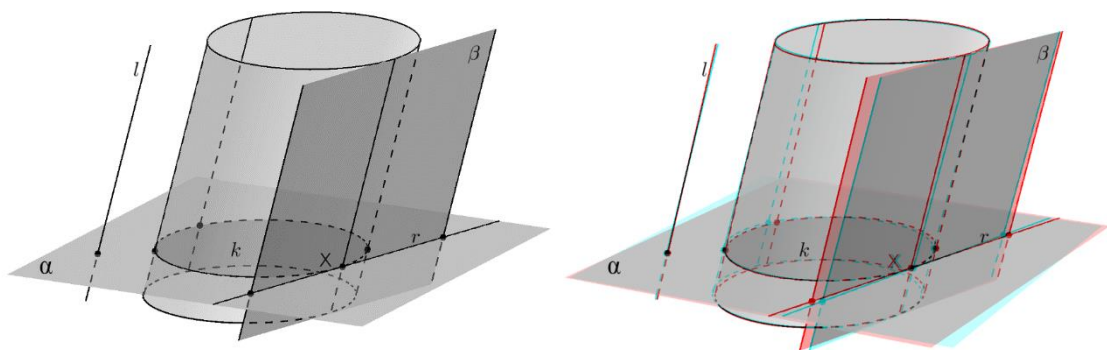
Dôkaz:

Vzájomnú polohu valcovej plochy $\bar{V}(k \subset \alpha, l)$ a osnovej roviny β môžeme určiť na základe polohy priesečnice rovín $\beta \cap \alpha = r$ a určujúcej kružnice k . V prípade, že:

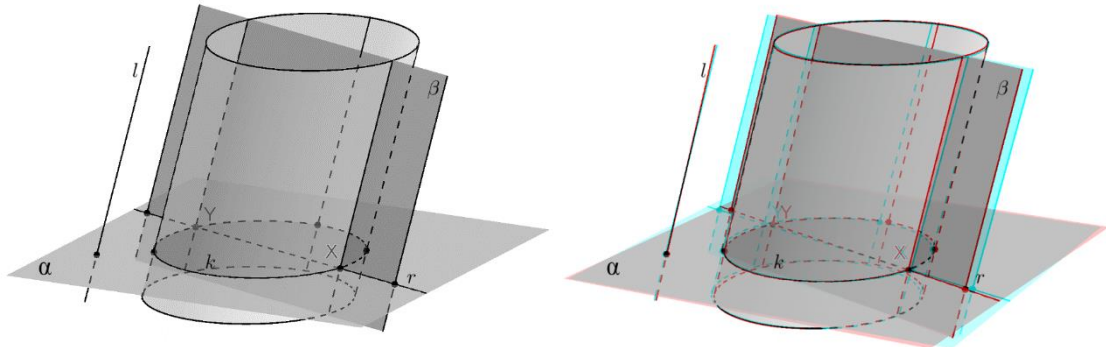
- priesečnica rovín $\beta \cap \alpha = r$ a určujúca kružnica k nemajú žiadny spoločný bod, potom ani osnovová rovina β a valcová plocha nemajú žiaden spoločný bod. (Obr. 13a)

Obr. 13a: $r \cap k = \emptyset$

- priesečnica rovín $\beta \cap \alpha = r$ a určujúca kružnica k majú spoločný práve jeden bod (obr.13b bod X), potom aj osnovová rovina β a valcová plocha \bar{V} majú spoločnú práve jednu tvoriacu priamku plochy.

Obr. 13b: $r \cap k = X$

- c) priesečnica rovín $\beta \cap \alpha = r$ a určujúca kružnica k majú spoločné práve dva rôzne body (obr. 13c body X, Y). Vtedy osnovová rovina β a valcová plocha majú spoločné práve dve tvoriace priamky plochy.



Obr. 13c: $r \cap k = \{X, Y\}$

V prípade b) je osnovová rovina β dotykovou rovinou valcovej plochy $\bar{V}(k \subset \alpha, l)$.

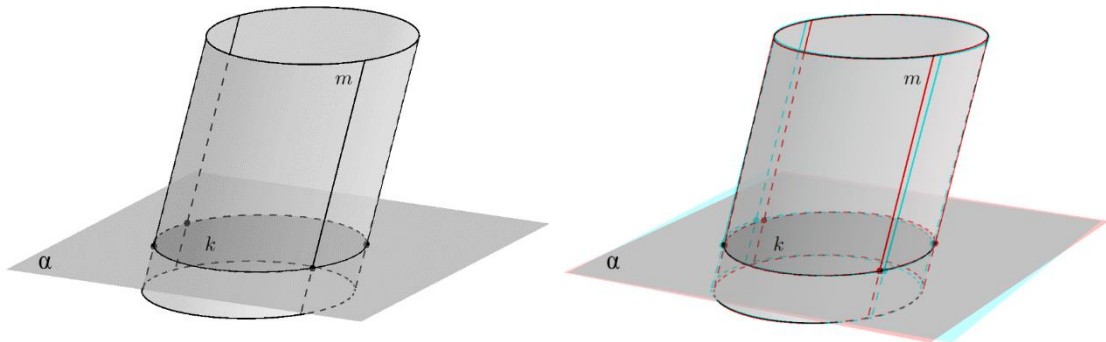
Veta 2.2.2:

Priamka m a valcová plocha $\bar{V}(k \subset \alpha, l)$ majú nasledovné polohy:

1. Ak priamka m je osnovová priamka, tak je buď:
 - a) tvoriaca priamka plochy (obr. 14a) alebo
 - b) nemá s plochou žiaden spoločný bod (obr. 14b).
2. Ak priamka m nie je osnovová priamka tak:
 - c) nemá s plochou žiaden spoločný bod (obr. 14c);
 - d) obsahuje bod tvoriacej priamky plochy (obr. 14d) alebo
 - e) pretína plochu v dvoch rôznych bodoch (obr. 14e).

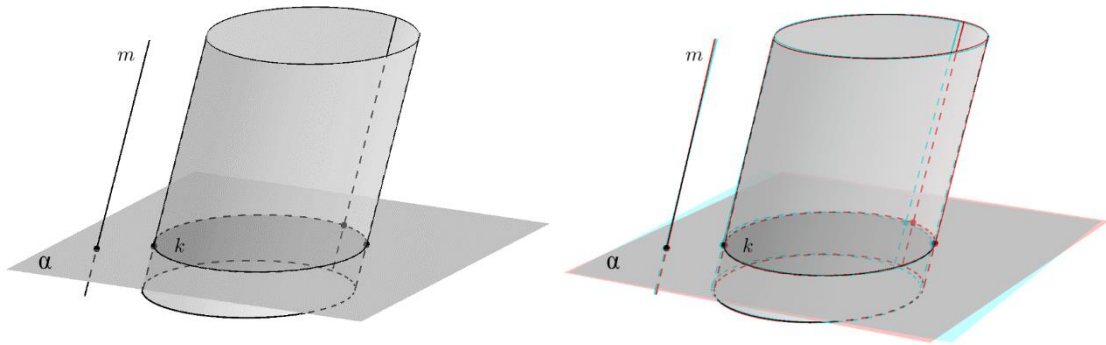
Dôkaz

1. Priamka m je osnovová:
 - a) teda priamka m patrí valcovej ploche, je jej tvoriacou priamkou. (Obr. 14a)



Obr.14a: $m \cap \bar{V} = m$

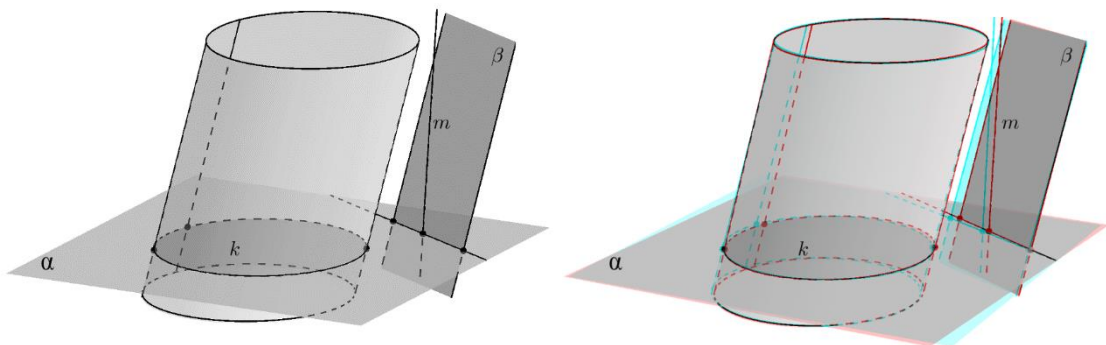
b) a prechádza vonkajším bodom valcovej plochy. Vtedy je priamka m rovnobežná s tvoriacimi priamkami plochy a nemá s plochou žiaden spoločný bod. (Obr. 14b)



Obr. 14b: $m \cap \bar{V} = \emptyset$

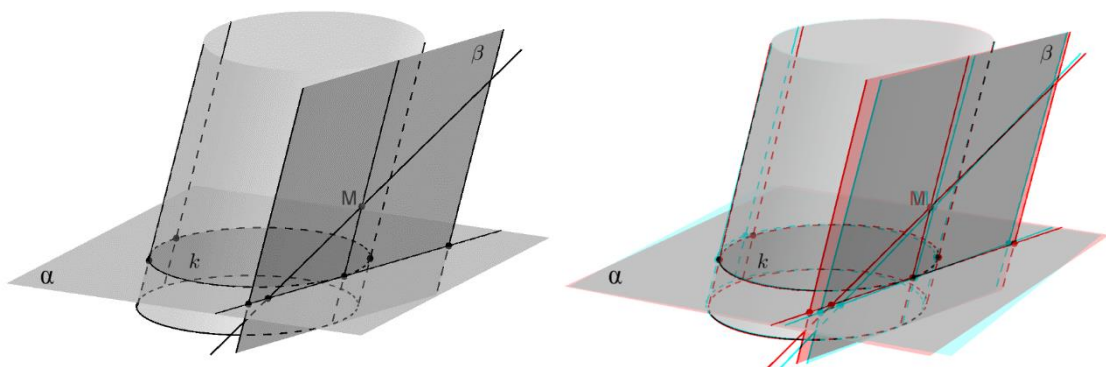
2. Určíme osnovovú rovinu β incidentnú s priamkou m . Priamka m nie je osnovová. Polohu priamky a valcovej plochy \bar{V} určíme na základe vzájomnej polohy osnovovej roviny β a valcovej plochy (veta 2.1). Vieme, že môžu nastať prípady:

c) osnovová rovina β a valcová plocha nemajú žiaden spoločný bod, teda ani priamka m nemá s valcovou plochou žiaden spoločný bod. (Obr. 14c)



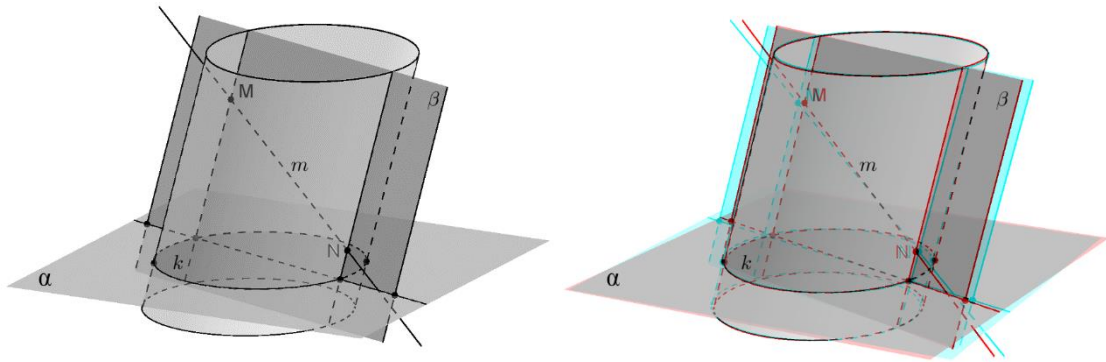
Obr. 14c: $m \cap \bar{V} = \emptyset$

d) osnovová rovina β a valcová plocha majú spoločnú práve jednu tvoriacu priamku plochy, vtedy priamka m obsahuje bod tvoriacej priamky valcovej plochy. (Obr. 14d bod M)



Obr. 14d: $m \cap \bar{V} = \{M\}$

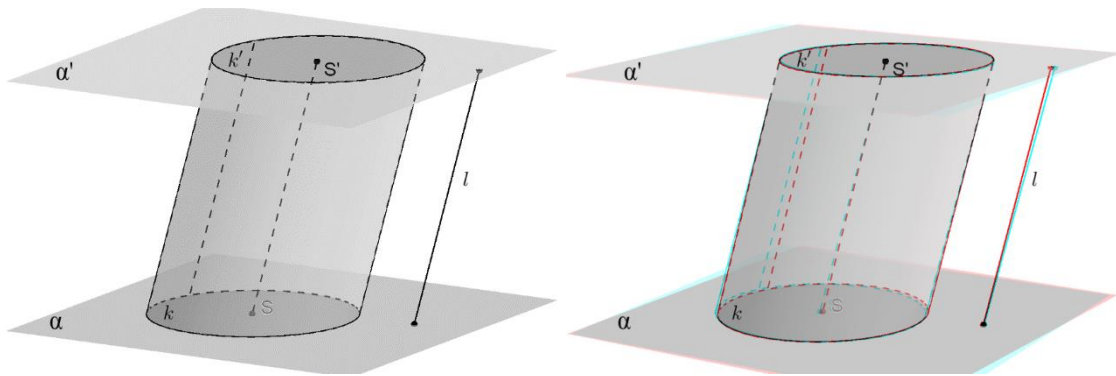
e) osnovová rovina β a valcová plocha majú spoločné dve rôzne tvoriace priamky, vtedy priamka m pretína plochu \bar{V} v dvoch rôznych bodoch (Obr. 14e body M, N).



Obr. 14e: $m \cap \bar{V} = \{M, N\}$

Definícia 2.2.2:

Valec je prienik valcového priestoru $V(k \subset \alpha, l)$ a priestorovej vrstvy určenej dvomi rovnobežnými rovinami $\alpha, \alpha' \neq \alpha$, ktoré nie sú osnovové roviny valcového priestoru.



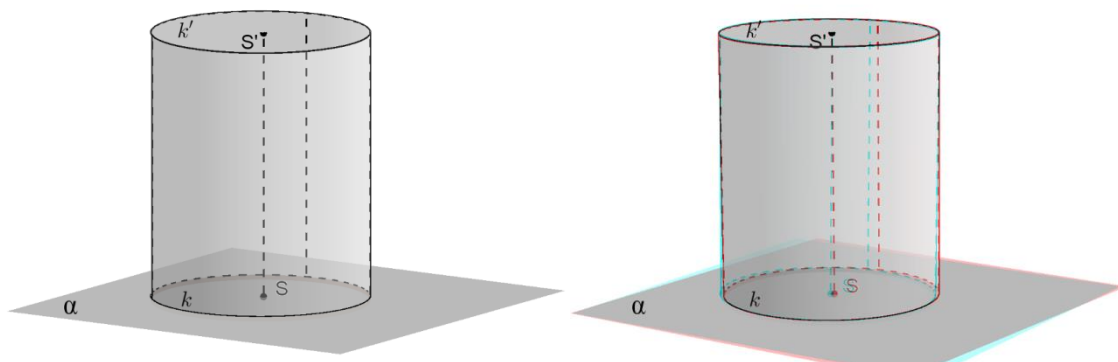
Obr. 15: Valec

Súvisiace pojmy:

Podstavy valca – kruhy $V \cap \alpha, V \cap \alpha'$ (zhodné); **strana valca** – úsečka hranice, ktorej krajné body sú na rôznych podstavách; **stred podstavy** – stred kruhu; **výška valca** – vzdialenosť rovín podstáv.

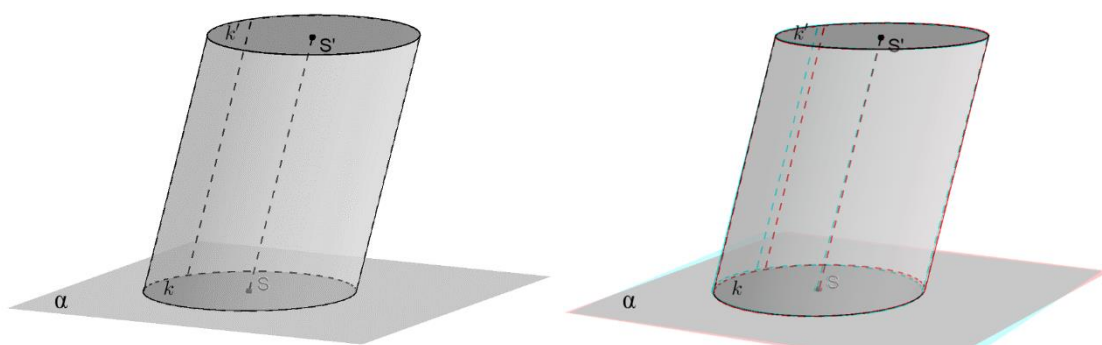
V pedagogickej praxi sa stretávame s telesami, ktoré sú valcami (obr. 16a – 16c):

a) **kolmý (rotačný) valec** – spojnice stredov podstáv je kolmá na rovinu podstavy



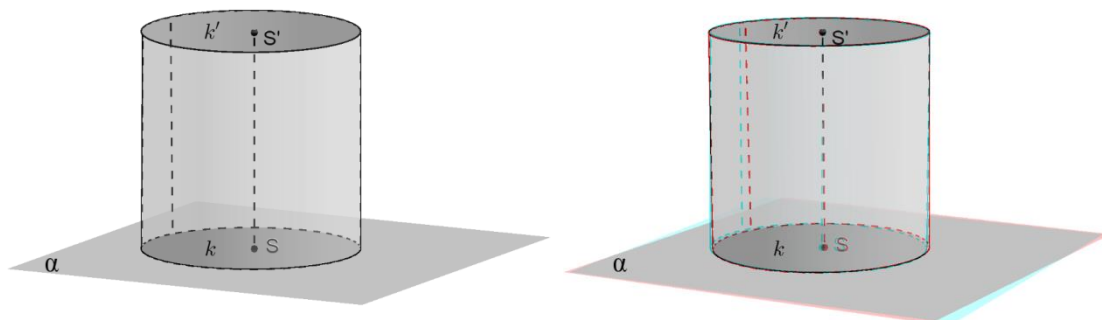
Obr. 16a: Kolmý valec

b) **šikmý valec** – valec, ktorý nie je kolmý



Obr. 16b: Šikmý valec

c) **rovnostranný valec** – výška kolmého valca je zhodná s priemerom podstavy



Obr. 16c: Rovnostranný valec

2.3. Ihlanová plocha, ihlanový priestor, ihlan.

Definícia 2.3.1:

Nech je daný mnohouholník P_n v rovine α a bod V neležiaci v tejto rovine.

Úplná ihlanová plocha je množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú mnohouholník P_n a prechádzajú bodom V .

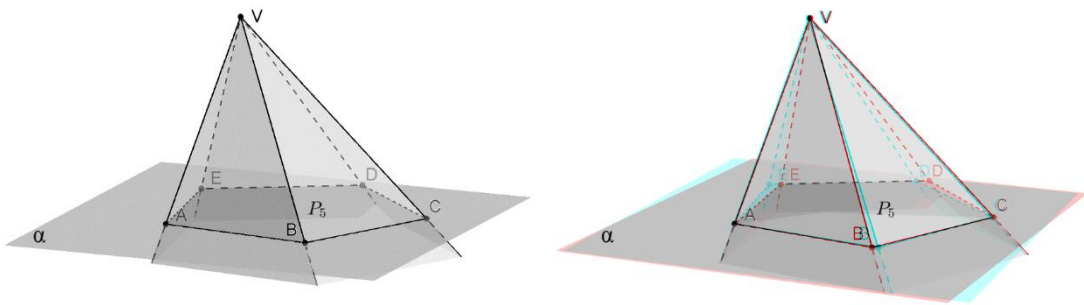
Úplný ihlanový priestor je množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú mnohouholník P_n a jeho vnútro a prechádzajú bodom V .

Jednoduchá ihlanová plocha je množina bodov všetkých polpriamok so začiatkom v bode V , ktoré pretínajú mnohouholník P_n .

Jednoduchý ihlanový priestor je množina bodov všetkých polpriamok so začiatkom v bode V , ktoré pretínajú mnohouholník P_n a jeho vnútro.

Označenie: ihlanová plocha $\bar{I}(P_n \subset \alpha, V)$, obr. 17: $\bar{I}_5(P_5 \subset \alpha, V)$

ihlanový priestor $I(P_n \subset \alpha, V)$



Obr. 17: $\bar{I}_5(P_5 \subset \alpha, V)$

Súvisiace pojmy:

Určujúci mnohouholník plochy – mnohouholník P_n v rovine α ; **vrchol plochy** – bod V ;
vrcholová priamka – priamka incidujúca vrcholom plochy; **vrcholová rovina** – rovina incidujúca vrcholom plochy; **tvoriace priamky plochy** – vrcholové priamky patriace ploche; **hrana plochy** – tvoriaca priamka prechádzajúca vrcholom určujúceho mnohouholníka P_n ; **stena plochy** – množina bodov tvoriacich priamok, ktoré pretínajú jednu stranu určujúceho mnohouholníka; **styčná rovina plochy** – vrcholová rovina obsahujúca práve jednu hranu alebo stenu plochy.

Poznámka:

V ďalšom texte budeme uvažovať a vykresľovať iba jednoduchú ihlanovú plochu.

Pri ihlanovej ploche a ihlanovom priestore riadime sa vlastnosťami určujúceho mnohouholníka P_n . Uvažujeme len konvexný mnohouholník a aj konvexnú ihlanovú plochu, ktorá rozdeľuje priestor na oblasť konvexnú a nekonvexnú.

Súvisiace pojmy:

Vnútorne body ihlanovej plochy – body priestoru patriace konvexnej oblasti vytvorenej ihlanovou plochou; **vnútro ihlanovej plochy** – množina všetkých vnútorných bodov ihlanovej plochy; **vonkajšie body ihlanovej plochy** – body priestoru patriace nekonvexnej oblasti určenej ihlanovou plochou.

Veta 2.3.1:

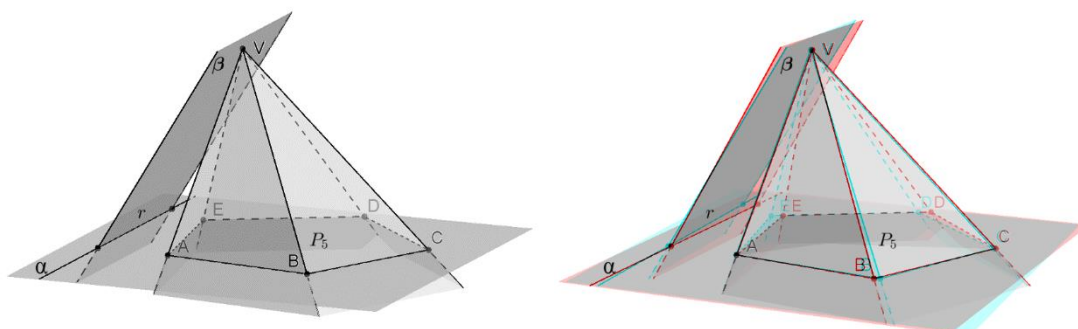
Vrcholová rovina β a ihlanová plocha $\bar{I}(P_n \subset \alpha, V)$ majú nasledovné polohy:

- spoločný iba vrchol plochy (obr. 18a);
- spoločnú práve jednu hranu plochy (obr. 18b);
- spoločnú stenu plochy (obr. 18c);
- dve rôzne tvoriace priamky (obr. 18d).

Dôkaz:

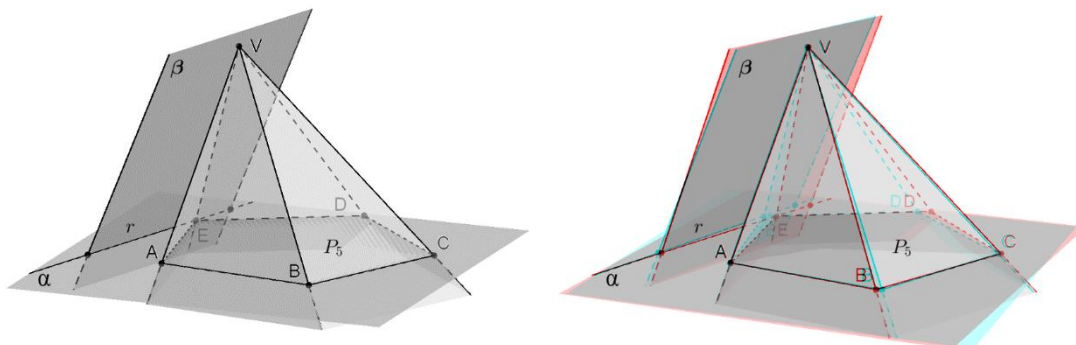
Vzájomnú polohu ihlanovej plochy $\bar{I}(P_n \subset \alpha, V)$ a vrcholovej roviny β určíme na základe polohy priesečnice rovín $\beta \cap \alpha = r$ a určujúceho mnohouholníka P_n . V prípade, že:

- priesečnica rovín $\beta \cap \alpha = r$ a určujúci mnohouholník P_n nemajú žiadny spoločný bod, potom vrcholová rovina β a ihlanová plocha majú spoločný iba vrchol plochy. (Obr. 18a);



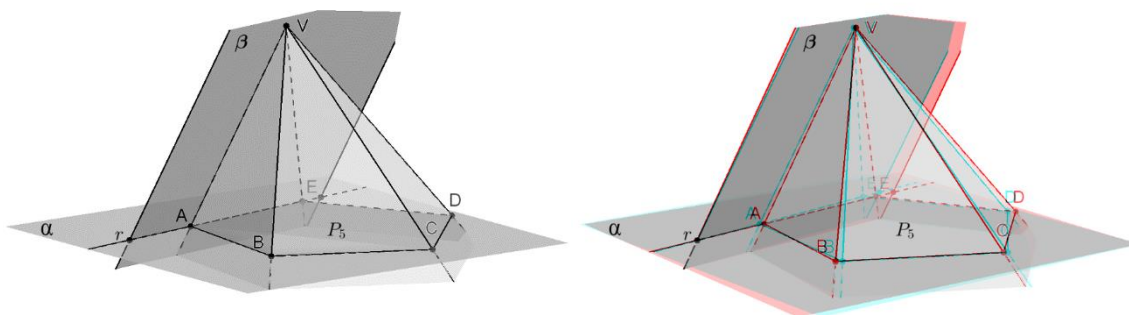
Obr. 18a: $r \cap P_5 = \emptyset$

- priesečnica rovín $\beta \cap \alpha = r$ a určujúci mnohouholník P_n majú spoločný práve jeden bod, ktorý je vrcholom určujúceho mnohouholníka P_n (na obr. 18b bod E), potom aj vrcholová rovina β a ihlanová plocha \bar{I} majú spoločnú práve jednu hranu plochy určenú vrcholom V a vrcholom určujúceho mnohouholníka.



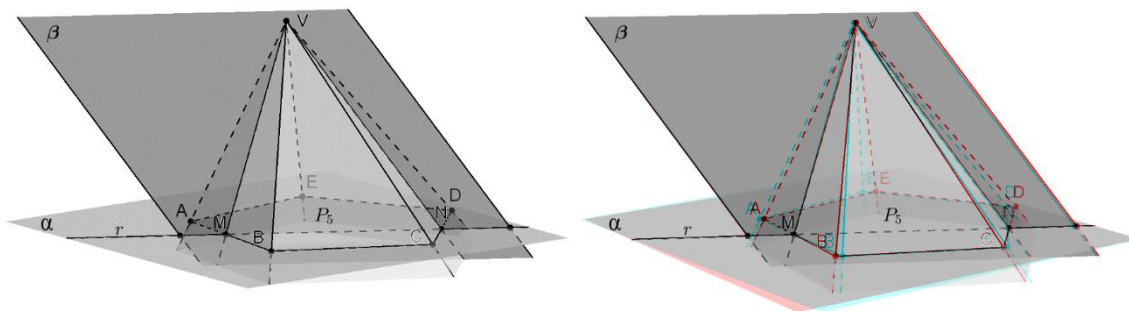
Obr. 18b: $r \cap P_5 = \{E\}$

- c) priesečnica rovín $\beta \cap \alpha = r$ a určujúci mnohouholník P_n majú spoločnú práve jednu stranu mnohouholníka, potom vrcholová rovina β a ihlanová plocha \bar{I} majú spoločnú práve jednu stenu. (Obr. 18c strana \overleftrightarrow{AE})



Obr. 18c: $r \cap P_5 = \overleftrightarrow{AE}$

- d) priesečnica rovín $\beta \cap \alpha = r$ a určujúci mnohouholník P_n majú spoločné práve dva rôzne body (buď body nesusedných strán alebo nesusedné vrcholy). Vtedy vrcholová rovina β a ihlanová plocha \bar{I} majú spoločné práve dve tvoriace priamky plochy. (Obr. 18d body M, N)



Obr. 18d: $r \cap P_5 = \{M, N\}$

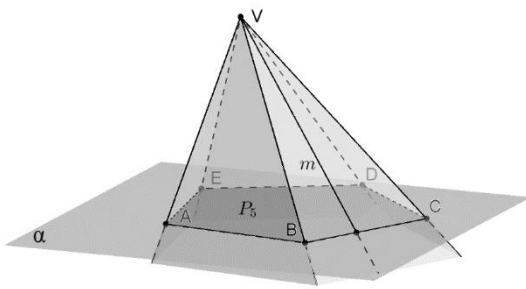
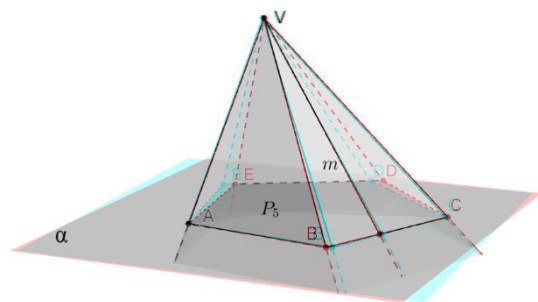
Veta 2.3.2:

Priamka m a ihlanová plocha $\bar{I}(P_n \subset \alpha, V)$ majú nasledovné polohy:

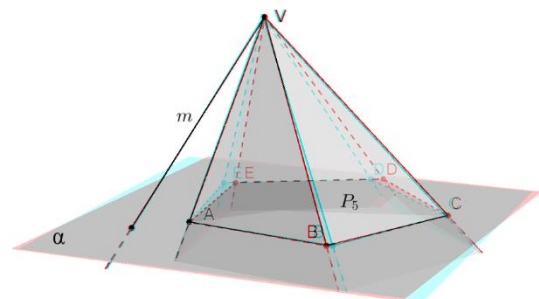
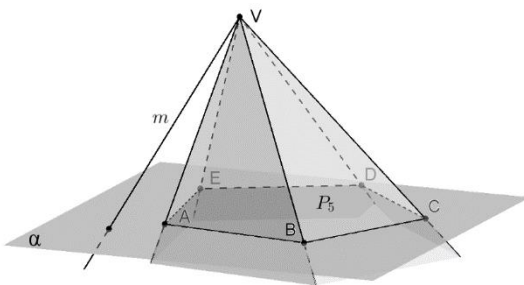
1. Ak priamka m je vrcholová priamka, tak je buď:
 - a) tvoriaca priamka plochy (obr. 19a) alebo
 - b) má s plochou spoločný iba vrchol plochy (obr. 19b).
2. Ak priamka m nie je vrcholová priamka, tak:
 - c) nemá s plochou žiaden spoločný bod (obr. 19c);
 - d) obsahuje bod hrany (obr. 19d);
 - e) obsahuje úsečku v stene (obr. 19e) alebo
 - f) pretína plochu v dvoch rôznych bodoch (obr. 19f).

Dôkaz:

1. Priamka m je vrcholová:
 - a) teda priamka m patrí ihlanovej ploche, je jej tvoriacou priamkou. (Obr. 19a)

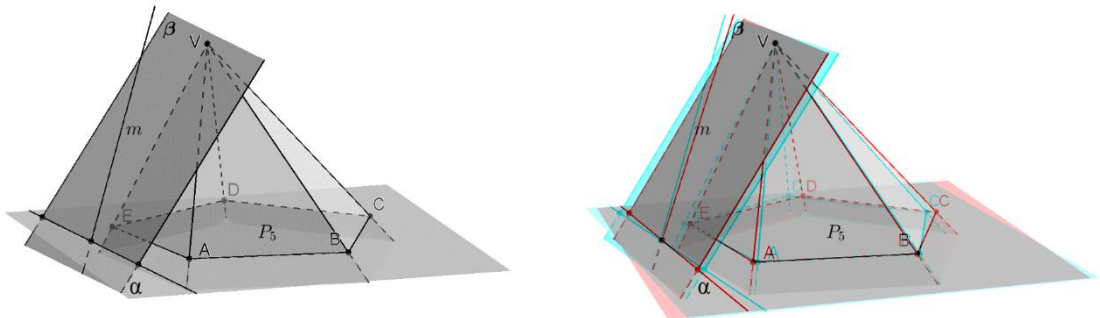
Obr. 19a: $\bar{I} \cap m = \{m\}$ 

- b) a prechádza vonkajším bodom ihlanovej plochy. Vtedy má priamka m s plochou \bar{I} spoločný iba vrchol plochy. (Obr. 19b)

Obr. 19b: $\bar{I} \cap m = \emptyset$

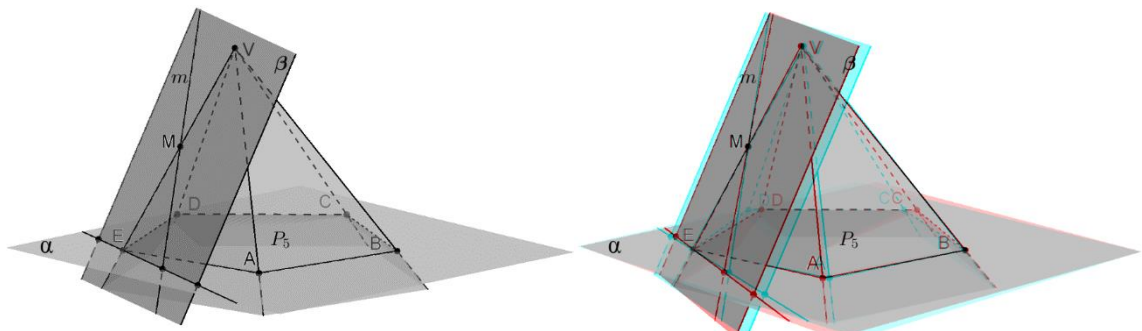
2. Určíme vrcholovú rovinu β incidentnú s priamkou m . Polohu priamky a ihlanovej plochy \bar{I} určíme na základe vzájomnej polohy vrcholovej roviny β a ihlanovej plochy (veta 3.1). Vieme, že môžu nastať prípady:

c) vrcholová rovina β a ihlanová plocha majú spoločný iba vrchol plochy, teda priamka m nemá s ihlanovou plochou \bar{I} žiaden spoločný bod. (Obr. 19c)



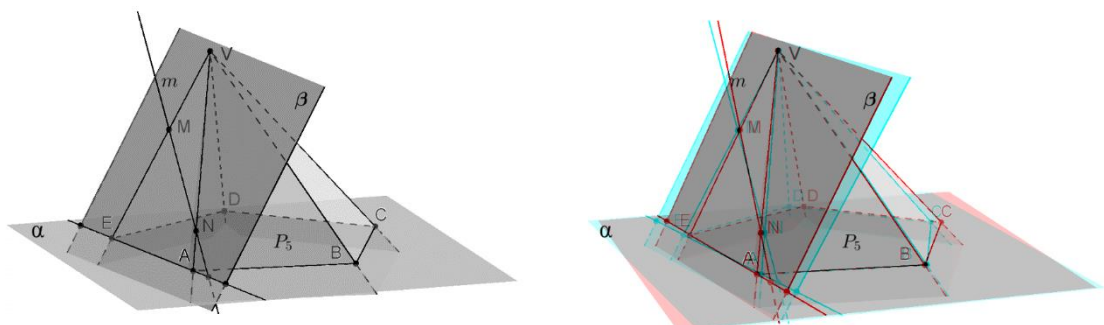
Obr. 19c: $\bar{I} \cap m = \emptyset$

d) vrcholová rovina β a ihlanová plocha majú spoločnú práve jednu hranu plochy, vtedy priamka m obsahuje bod hrany ihlanovej plochy \bar{I} . (Obr. 19d bod M)



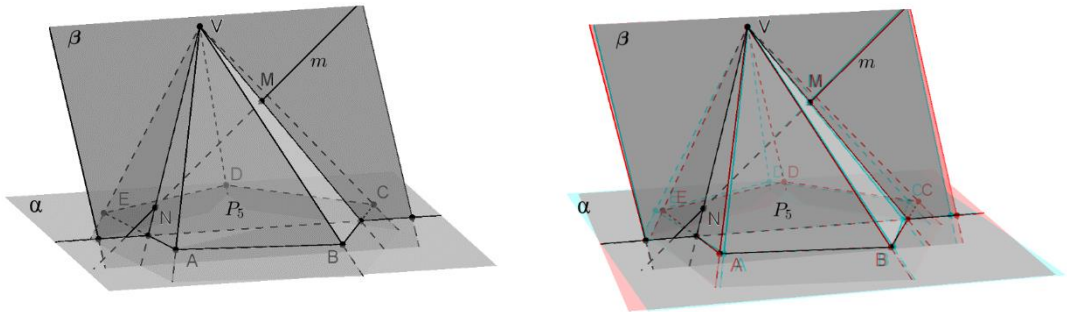
Obr. 19d: $\bar{I} \cap m = \{M\}$

e) vrcholová rovina β a ihlanová plocha majú spoločnú stenu plochy, vtedy priamka m obsahuje úsečku v stene ihlanovej plochy \bar{I} . (Obr. 19e úsečka \overleftrightarrow{MN})



Obr. 19e: $\bar{I} \cap m = \overleftrightarrow{MN}$

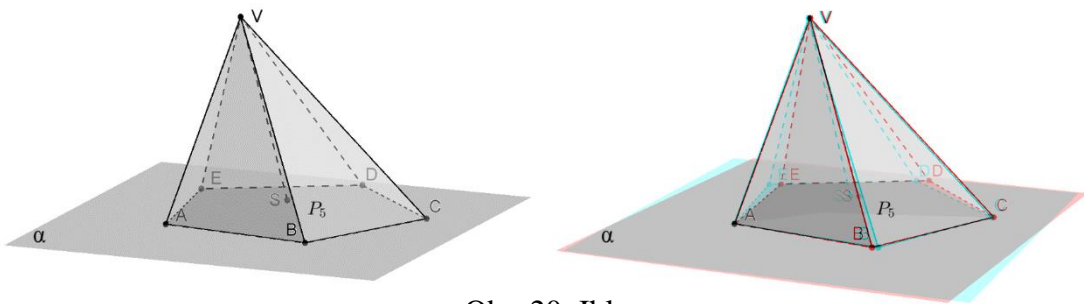
- f) vrcholová rovina β a ihlanová plocha majú spoločné dve rôzne tvoriace priamky, vtedy priamka m pretína plochu \bar{I} v dvoch rôznych bodoch. (Obr. 19f body M, N)



Obr. 19f: $\bar{I} \cap m = \{M, N\}$

Definícia 2.3.2:

Ihlan je prienik jednoduchého ihlanového priestoru $\bar{I}(P_n \subset \alpha, V)$ a polpriestoru αV .



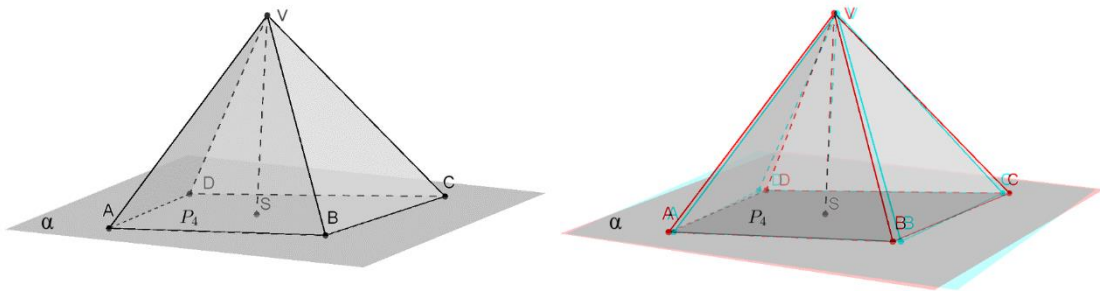
Obr. 20: Ihlan

Súvisiace pojmy:

Podstava ihlana – mnohoúhelník $I \cap \alpha$; **vrcholy ihlana** – vrcholy podstáv a vrchol V ; **bočné hrany** – časti hrán príslušnej ihlanovej plochy patriace ihlanu; **podstavné hrany** – hrany podstavy; **bočné steny** – časti stien príslušnej ihlanovej plochy patriace ihlanu (trojuholníky); **steny ihlana** – podstava a bočné steny; **výška ihlana** – vzdialenosť vrchola V od roviny podstavy.

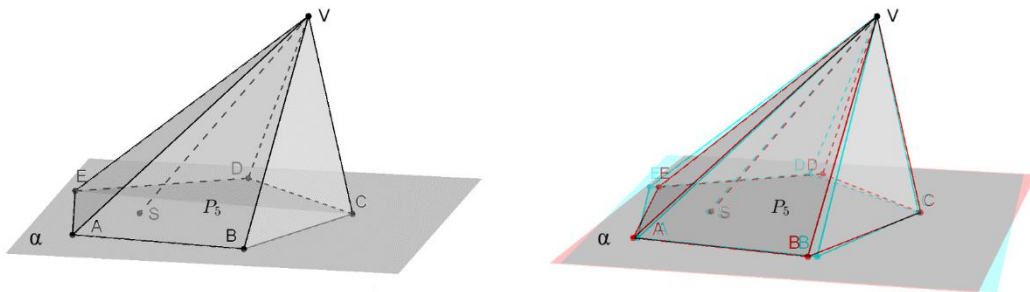
V pedagogickej praxi sa stretávame s telesami, ktoré sú ihlanmi (obr 21a – 21e):

a) **kolmý ihlan** – spojnica stredu podstavy S a vrchola V je kolmá na rovinu podstavy



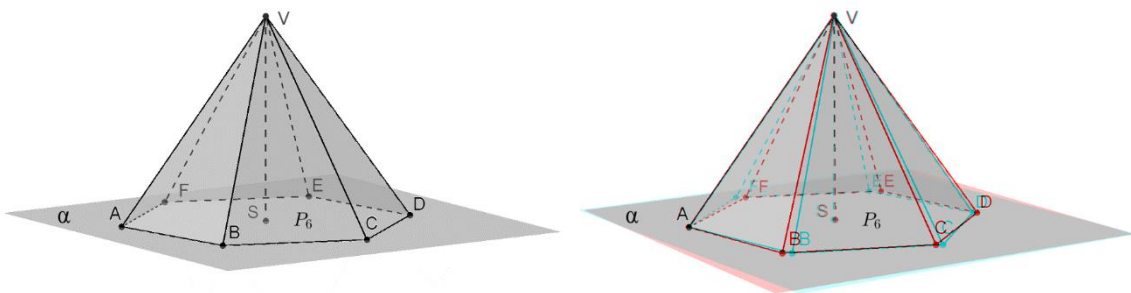
Obr. 21a: Kolmý ihlan

b) **šikmý ihlan** – ihlan, ktorý nie je kolmý



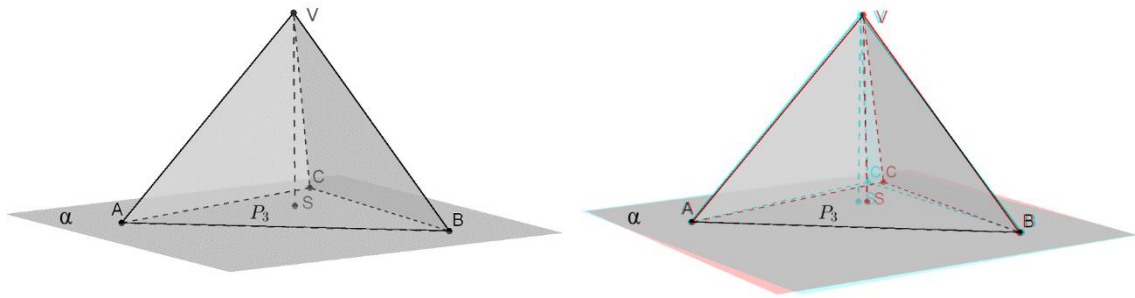
Obr. 21b: Šikmý ihlan

c) **pravidelný ihlan** – kolmý ihlan, určujúci mnohouholník P_n je pravidelný mnohouholník



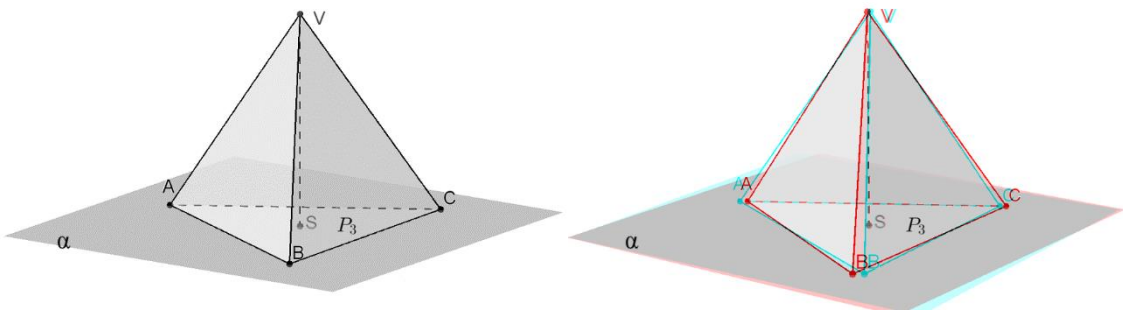
Obr. 21c: Pravidelný 6-boký ihlan

d) **štvorsten** – všetky steny sú trojuholníky



Obr. 21d: Štvorsten

e) **pravidelný štvorsten** – všetky steny sú rovnostranné trojuholníky



Obr. 21e: Pravidelný štvorsten

2.4 Kružnicová kuželová plocha, kruhový kuželový priestor, kužel.

Definícia 2.4.1:

Nech je daná kružnica k v rovine α a bod V , ktorý neleží v tejto rovine.

Úplná kružnicová kuželová plocha je množina bodov všetkých priamok, ktoré prechádzajú bodom V a pretínajú kružnicu k .

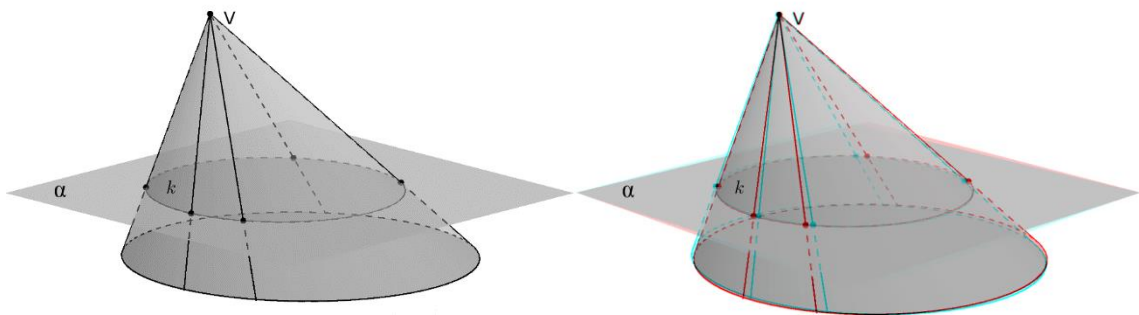
Úplný kruhový kuželový priestor je množina bodov všetkých priamok, ktoré prechádzajú bodom V a pretínajú kružnicu k a jej vnútro.

Jednoduchá kružnicová kuželová plocha je množina bodov všetkých polpriamok so začiatkom v bode V , ktoré pretínajú kružnicu k .

Jednoduchý kruhový kuželový priestor je množina bodov všetkých polpriamok so začiatkom v bode V , ktoré pretínajú kružnicu k a jej vnútro.

Označenie: kružnicová kuželová plocha $\bar{K}(k \subset \alpha, V)$, obr. 22: $\bar{K}(k \subset \alpha, V)$

kruhový kuželový priestor $K(k \subset \alpha, V)$



Obr. 22: $\bar{K}(k \subset \alpha, V)$

Súvisiace pojmy:

Určujúca kružnica plochy – kružnica k v rovine α ; **vrchol** – bod V ; **vrcholová priamka** – priamka prechádzajúca bodom V ; **vrcholová rovina** – rovina prechádzajúca bodom V ; **tvoriace priamky plochy** – vrcholové priamky patriace ploche; **dotyková rovina plochy** – vrcholová rovina, ktorá má s plochou spoločnú práve jednu tvoriacu priamku plochy.

Poznámka:

V ďalšom texte budeme vykresľovať iba jednoduchú kružnicovú kuželovú plochu a hovoriť len o kuželovej ploche resp. kuželovom priestore.

Súvisiace pojmy:

Vnútorne body kužeľovej plochy – body priestoru patriace vnútornej oblasti vytvorenej kužeľovou plochou; **vnútro kužeľovej plochy** – množina všetkých vnútorných bodov kužeľovej plochy; **vonkajšie body kužeľovej plochy** – body priestoru patriace vonkajšej oblasti určenej kužeľovou plochou.

Veta 2.4.1:

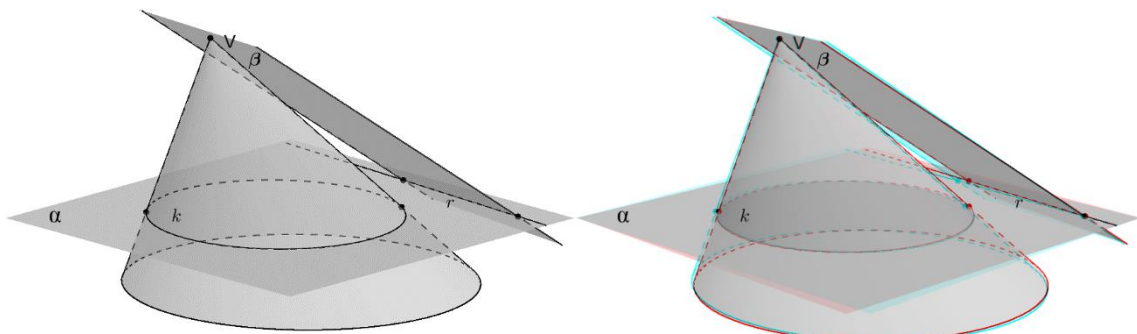
Vrcholová rovina β a kužeľová plocha $\bar{K}(k \subset \alpha, V)$ majú nasledovné polohy:

- spoločný iba vrchol plochy (obr. 23a);
- spoločnú práve jednu tvoriacu priamku plochy (obr. 23b) alebo
- dve rôzne tvoriace priamky (obr. 23c).

Dôkaz:

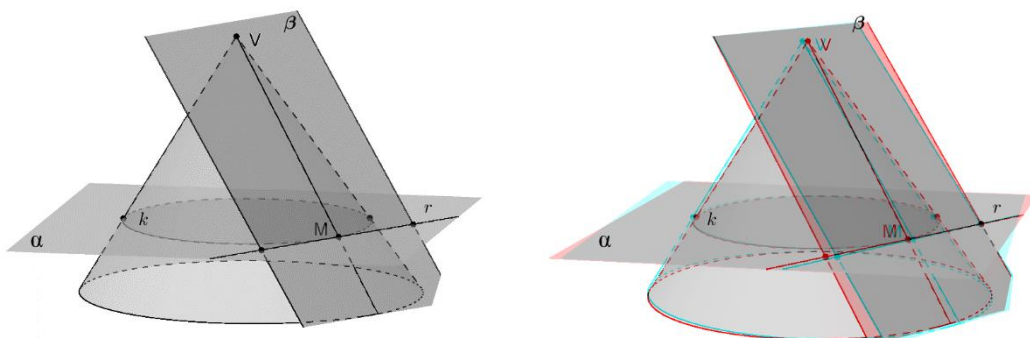
Vzájomnú polohu kužeľovej plochy $\bar{K}(k \subset \alpha, V)$ a vrcholovej roviny β môžeme určiť na základe polohy priesečnice rovín $\beta \cap \alpha = r$ a určujúcej kružnice k . V prípade, že:

- priesečnica rovín $\beta \cap \alpha = r$ a určujúca kružnica k nemajú žiadny spoločný bod, potom vrcholová rovina β a kužeľová plocha majú spoločný iba vrchol plochy. (Obr. 23a)



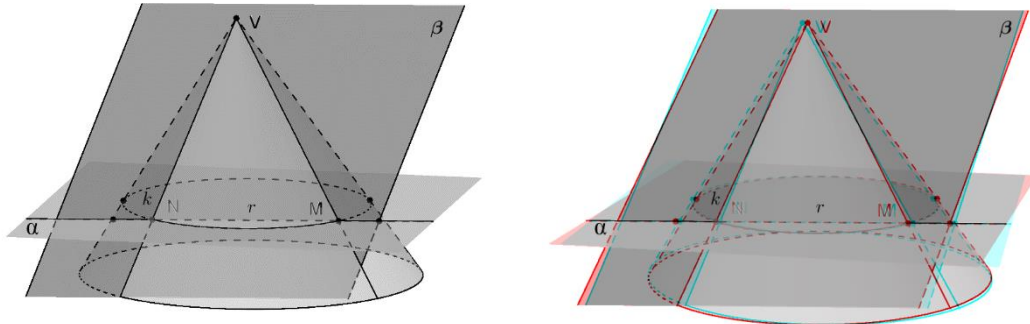
Obr. 23a: $r \cap k = \emptyset$

- priesečnica rovín $\beta \cap \alpha = r$ a určujúca kružnica k majú spoločný práve jeden bod, potom aj vrcholová rovina β a kužeľová plocha \bar{K} majú spoločnú práve jednu tvoriacu priamku plochy. (Obr. 23b bod M)



Obr. 23b: $r \cap k = \{M\}$

- c) priesečnica rovín $\beta \cap \alpha = r$ a určujúca kružnica k majú spoločné dva rôzne body. Vtedy vrcholová rovina β a kužeľová plocha \bar{K} majú spoločné dve tvoriace priamky plochy. (Obr. 23c body M, N)



Obr. 23c: $r \cap k = \{M, N\}$

V prípade b) je rovina β dotykovou rovinou kužeľovej plochy $\bar{K}(k \subset \alpha, V)$.

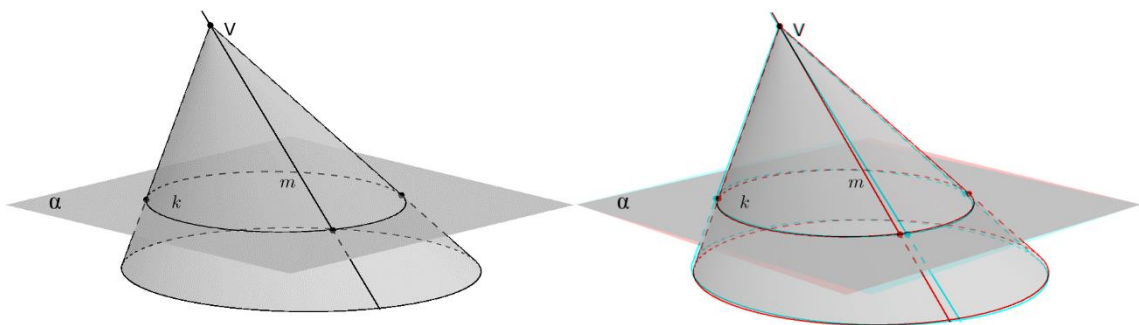
Veta 2.4.2:

Priamka m a kužeľová plocha $\bar{K}(k \subset \alpha, V)$ majú nasledovné polohy:

1. Ak priamka m je vrcholová priamka, tak je buď:
 - a) tvoriaca priamka plochy (obr. 24a) alebo
 - b) má s plochou spoločný iba vrchol plochy (obr. 24b).
2. Ak priamka m nie je vrcholová priamka tak:
 - c) nemá s plochou žiaden spoločný bod (obr. 24c),
 - d) obsahuje bod tvoriacej priamky plochy (obr. 24d) alebo
 - e) pretína plochu v dvoch rôznych bodoch (obr. 24e).

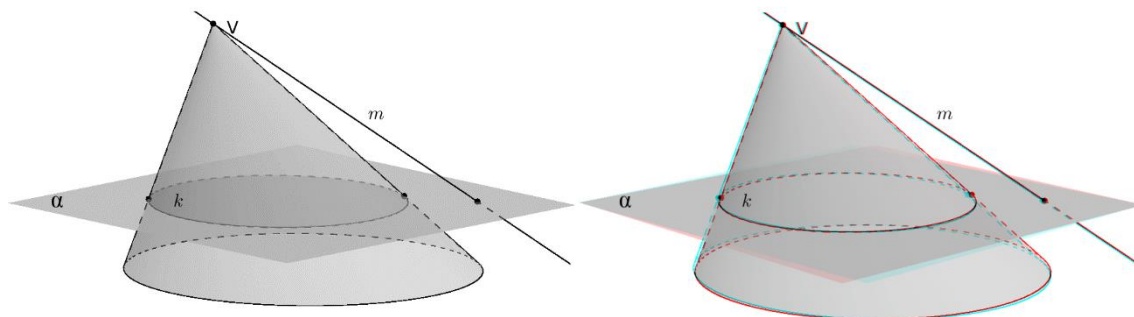
Dôkaz:

1. Priamka m je vrcholová:
 - a) teda priamka m patrí kužeľovej ploche, je jej tvoriacou priamkou. (Obr. 24a)



Obr. 24a: $\bar{K} \cap m = \{m\}$

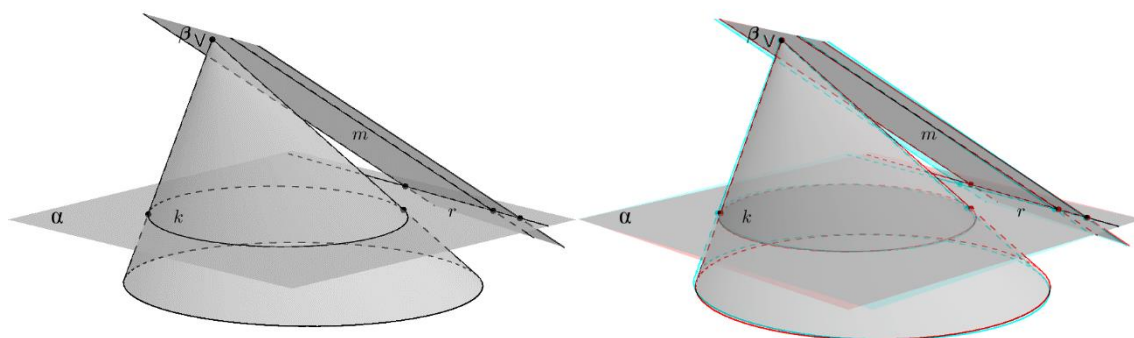
- b) a prechádza vonkajším bodom kužeľovej plochy. Vtedy má priamka m s plochou \bar{K} spoločný iba vrchol plochy. (Obr. 24b)



Obr. 24b: $\bar{K} \cap m = \emptyset$

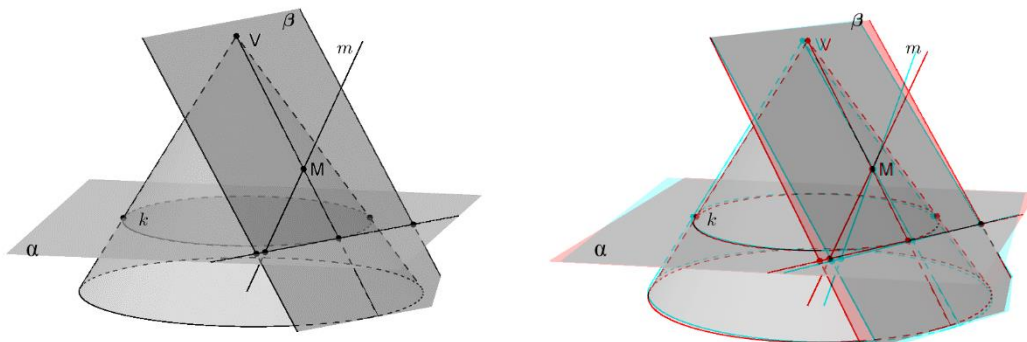
2. Určíme vrcholovú rovinu β incidentnú s priamkou m . Priamka m nie je vrcholová. Polohu priamky a kužeľovej plochy \bar{K} určíme na základe vzájomnej polohy vrcholovej roviny β a kužeľovej plochy (veta 4.1). Vieme, že môžu nastať prípady:

c) vrcholová rovina β a kužeľová plocha majú spoločný iba vrchol plochy, potom priamka m nemá s kužeľovou plochou \bar{K} žiaden spoločný bod. (Obr. 24c)



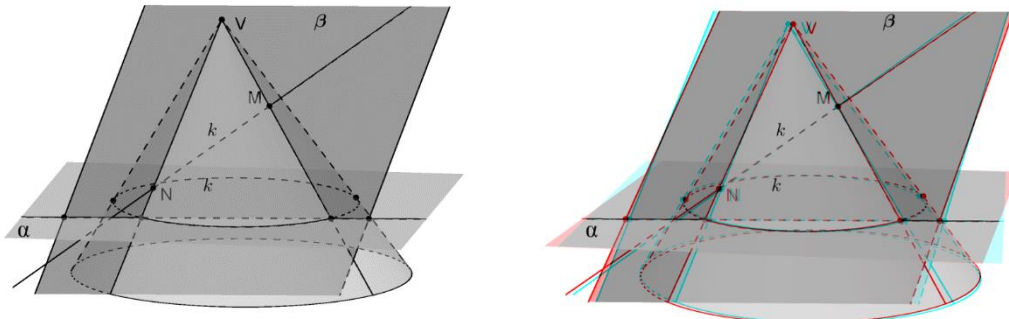
Obr. 24c: $\bar{K} \cap m = \emptyset$

d) vrcholová rovina β a kužeľová plocha majú spoločnú práve jednu tvoriacu priamku plochy, vtedy priamka m obsahuje bod tvoriacej priamky kužeľovej plochy \bar{K} . (Obr. 24d bod M)



Obr. 24d: $\bar{K} \cap m = \{M\}$

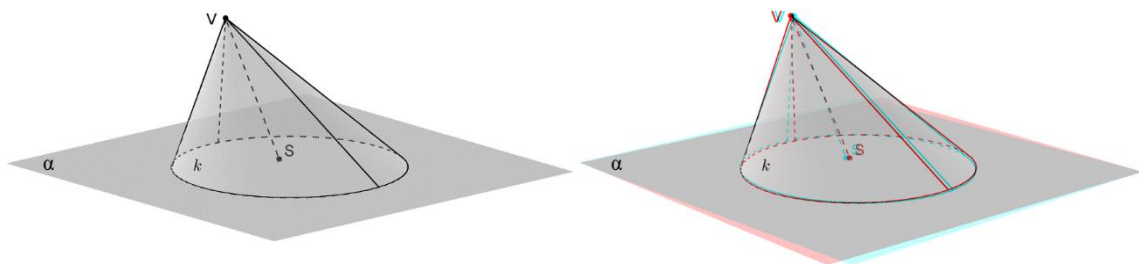
- e) vrcholová rovina β a kužeľová plocha majú spoločné dve rôzne tvoriace priamky, vtedy priamka m pretína plochu \bar{K} v dvoch rôznych bodoch. (Obr. 24e body M, N)



Obr. 24e: $\bar{K} \cap m = \{M, N\}$

Definícia 2.4.2:

Kužeľ je prienik kužeľového priestoru $\bar{K}(k \subset \alpha, V)$ a polpriestoru αV .



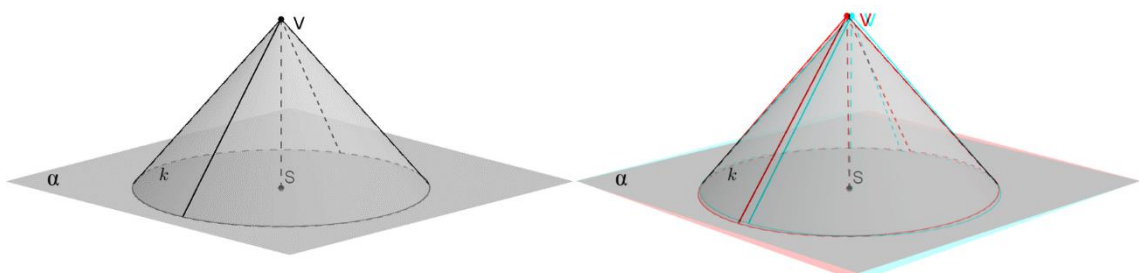
Obr. 25: Kužeľ

Súvisiace pojmy:

Podstava kužeľa – kruh $K \cap \alpha$; **hrana kužeľa** – hranica podstavy kužeľa; **strana kužeľa** – úsečka VM , M – bod hrany kužeľa; **stred podstavy** – stred kruhu; **výška kužeľa** – vzdialenosť vrcholu V od roviny podstavy.

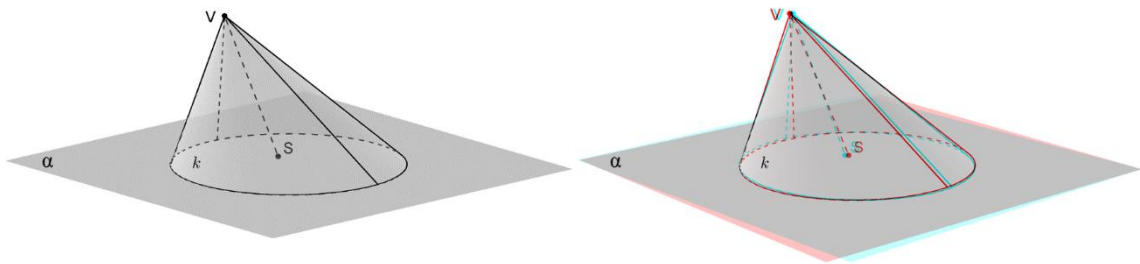
V pedagogickej praxi sa stretávame s telesami – kužeľmi (obr: 26a – 26c):

- a) **kolmý (rotačný) kužeľ** – spojnica stredu podstavy a vrcholu V je kolmá na rovinu podstavy



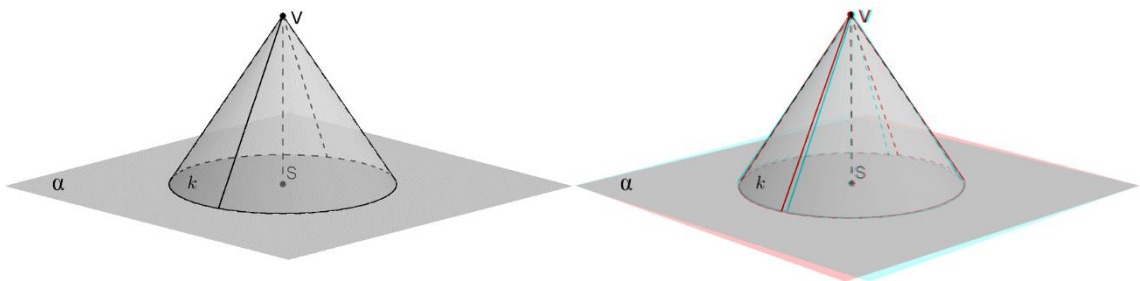
Obr. 26a: Kolmý kužeľ

b) **šikmý kužel** – kužel, ktorý nie je kolmý



Obr. 26b: Šikmý kužel

c) **rovnostranný kužel** – dĺžka strany kolmého kužela je zhodná s priemerom podstavy



Obr. 26c: Rovnostranný kužel

2.5 Guľová plocha, guľa.

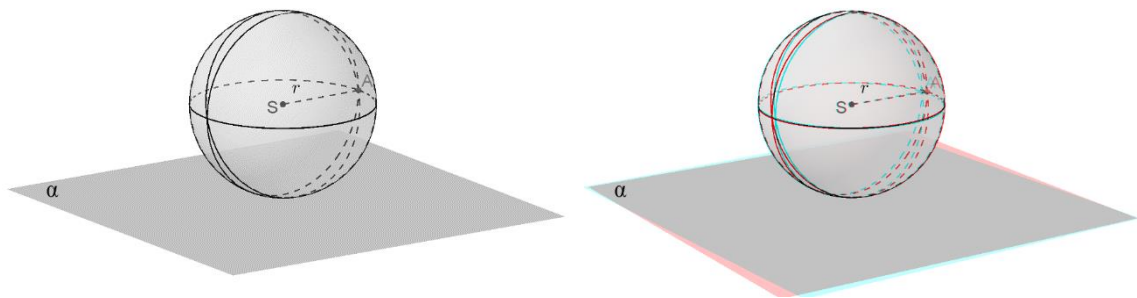
Definícia 2.5.1:

Nech S je bod priestoru a r je kladné číslo.

Guľová plocha je množina bodov priestoru, ktorých vzdialenosť v od bodu S sa rovná danému číslu r .

Guľa je množina bodov priestoru, ktorých vzdialenosť v od bodu S spĺňa nerovnosť $0 \leq v \leq r$.

Označenie: guľa $G(S, r)$, obr. 27: $G(S, r)$



Obr. 27: $G(S, r)$

Súvisiace pojmy:

Stred – bod S ; **polomer** – číslo r , dĺžka úsečky SA , A je bod guľovej plochy; **priemer** – číslo $d = 2r$; **priemerová priamka/rovina** – priamka/rovina prechádzajúca stredom guľovej plochy; **hlavná kružnica** – kružnica ležiaca v priemerovej rovine; **vedľajšie kružnice** – ostatné kružnice na guľovej ploche; **dotyková rovina plochy** – rovina, ktorá má s guľovou plochou spoločný práve jeden bod; **dotykový bod** – spoločný bod guľovej plochy a dotykovej roviny.

Guľa je konvexný geometrický útvar a príslušná guľová plocha rozdeľuje priestor na oblasť konvexnú a nekonvexnú.

Súvisiace pojmy:

Vnútorne body M guľovej plochy – body pre ktoré platí $|MS| < r$, patriace konvexnej oblasti vytvorenej guľovou plochou; **vnútro guľovej plochy** – množina všetkých vnútorných bodov guľovej plochy; **vonkajšie body guľovej plochy** – body, pre ktoré platí $|MS| > r$, patriace priestoru nekonvexnej oblasti určenej guľovou plochou.

Veta 2.5.1:

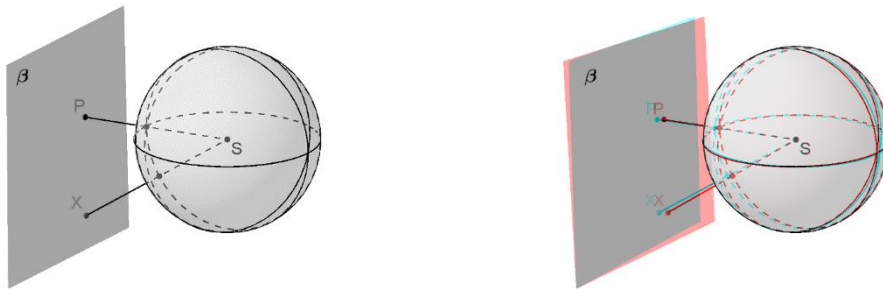
Rovina β a guľová plocha $\bar{G}(S, r)$ majú jednu z nasledovných polôh:

- žiaden spoločný bod (obr. 28a),
- spoločný jeden bod plochy (obr. 28b) alebo
- spoločnú kružnicu plochy (obr. 28c).

Dôkaz:

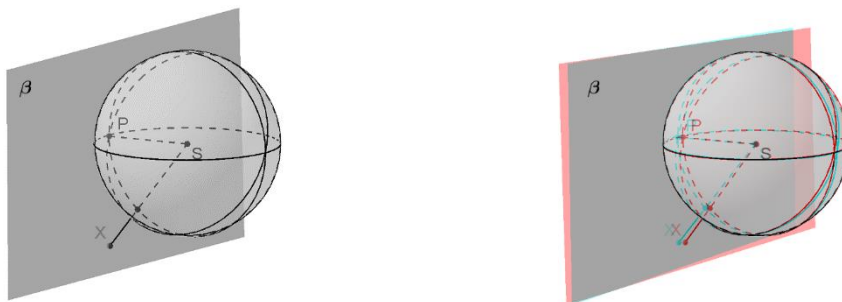
Vzájomnú polohu guľovej plochy $\bar{G}(S, r)$ a roviny β môžeme určiť na základe vzdialenosti stredu guľovej plochy a roviny β , zostrojíme pätu P kolmice zo stredu S na rovinu β , $|S\beta| = |SP|$. Nastane jeden z prípadov:

- vzdialenosť stredu guľovej plochy a roviny β je väčšia než dĺžka polomeru, $|S\beta| = |SP| > r$. Pre všetky ostatné body $X \neq P$ roviny β platí: $|SX| > |SP| > r$. Teda rovina β a guľová plocha nemajú žiaden spoločný bod. (Obr. 28a)



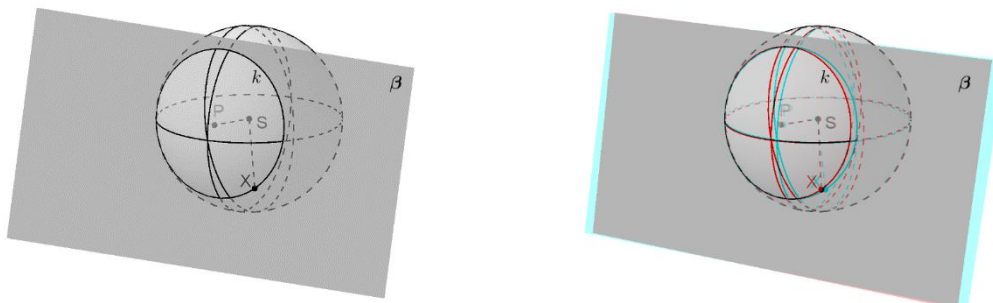
Obr. 28a: $\beta \cap \bar{G} = \emptyset$

- vzdialenosť stredu guľovej plochy a roviny β sa rovná dĺžke polomeru, $|S\beta| = |SP| = r$. Pre všetky ostatné body $X \neq P$ roviny β platí: $|SX| > |SP| = r$. Teda rovina β a guľová plocha majú spoločný jeden bod plochy. (Obr. 28b bod P).



Obr. 28b: $\beta \cap \bar{G} = \{P\}$

- c) vzdialenosť stredu guľovej plochy a roviny β je menšia než polomer, $|S\beta| = |SP| < r$. Platí: $SP < r$. Body $X \neq P$, pre ktoré platí vzťah $|SX| = r$ tvoria kružnicu, teda rovina β a guľová plocha majú spoločnú kružnicu. (Obr. 28c kružnica k)



Obr. 28c: $\beta \cap \bar{G} = k$

V prípade b) rovina β je dotykovou rovinou guľovej plochy v bode P .

Veta 2.5.2:

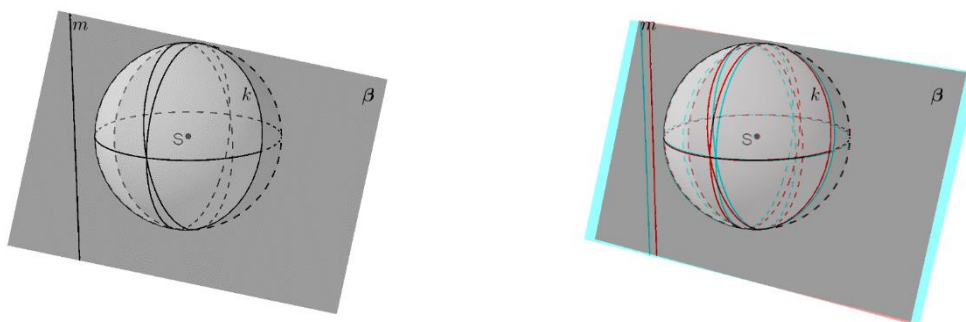
Priamka m a guľová plocha $\bar{G}(S, r)$ majú nasledovné polohy:

- žiadene spoločný bod (obr. 29a),
- spoločný práve jeden bod (obr. 29b) alebo
- spoločné dva rôzne body (obr. 29c).

Dôkaz

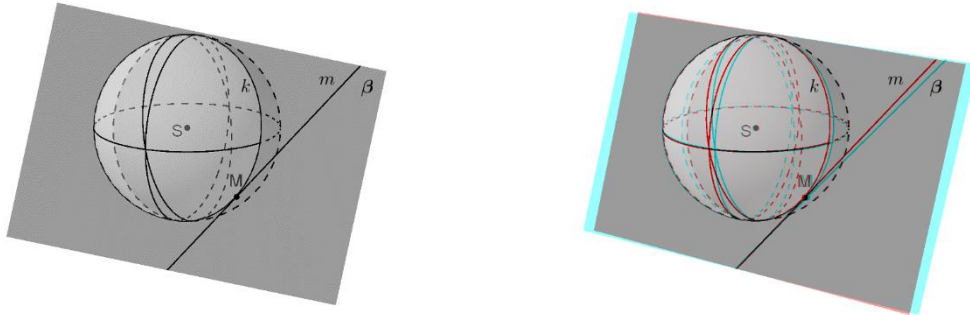
Zostrojíme priemerovú rovinu β incidentnú s priamkou m . Polohu priamky a guľovej plochy \bar{G} určíme na základe vzájomnej polohy priamky m a kružnice k , $\beta \cap \bar{G} = k$. Môžu nastať nasledovné prípady:

- Priamka m a kružnica k nemajú žiadene spoločný bod, potom priamka m nemá s guľovou plochou žiadene spoločný bod. (Obr. 29a)



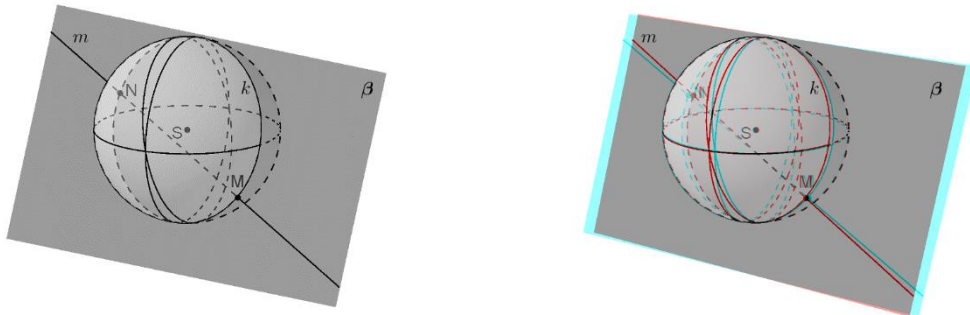
Obr. 29a: $\bar{G} \cap m = \emptyset$

- b) Priamka m a kružnica k majú spoločný práve jeden bod, potom aj priamka m a guľová plocha majú spoločný práve jeden bod. (Obr. 29b bod M)



Obr. 29b: $\overline{G} \cap m = \{M\}$

- c) Priamka m a kružnica k majú spoločné dva rôzne body, potom aj priamka m a guľová plocha majú spoločné dva rôzne body. (Obr. 29c body M, N)



Obr. 29c: $\overline{G} \cap m = \{M, N\}$

3. Algoritmy konštrukcie styčných a dotykových rovín

V druhej kapitole sme sa zaoberali základnými geometrickými telesami a ich polohami vzhľadom na priamku a rovinu. V tejto kapitole zostavíme algoritmy na konštrukciu styčných/dotykových rovín, ktoré incidujú daným bodom alebo sú rovnobežné s danou priamkou k telesám uvedeným v druhej kapitole.

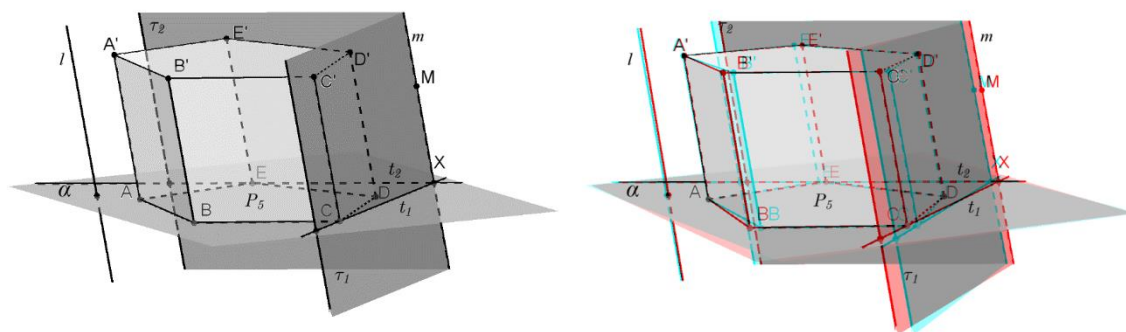
3.1 Algoritmus konštrukcie styčných rovín hranola

1. Styčné roviny incidujúce daným bodom

Nech $H(P_n \subset \alpha, l)$ je hranol a bod M je ľubovoľne zvolený bod. Zostrojte styčnú rovinu hranola, ktorá inciduje bodom M . (Obr. 30a)

Rozbor:

Predpokladajme, že styčná rovina τ_i s požadovanými vlastnosťami existuje (Obr. 30a). Vieme, že styčná rovina je osnovová, teda obsahuje osnovovú priamku m , ktorá prechádza bodom M . Priesečnica rovín $\tau_i \cap \alpha$ je styčnou priamkou t_i určujúceho mnohoholníka P_n a prechádza bodom X , ktorý je priesečníkom osnovovej priamky m s rovinou α .



Obr. 30a: Styčné roviny hranola bodom

Algoritmus konštrukcie:

Prvým krokom konštrukcie je zostrojenie priamky m , ktorá je osnovovou priamkou telesa a prechádza bodom M . Prienik priamky m a roviny α určujúceho mnohoholníka je bod X . Z bodu X zostrojíme styčnú priamku t_i určujúceho mnohoholníka P_n . Styčná rovina τ_i je určená styčnou priamkou t_i a osnovovou priamkou m , ktorá prechádza bodom M .

Zápis algoritmu:

1. $m: m \parallel l, M \in m$
2. $X = m \cap \alpha$
3. t_i – styčná priamka mnohoholníka P_n prechádzajúca bodom X
4. $\tau_i = \overleftrightarrow{t_i m}$

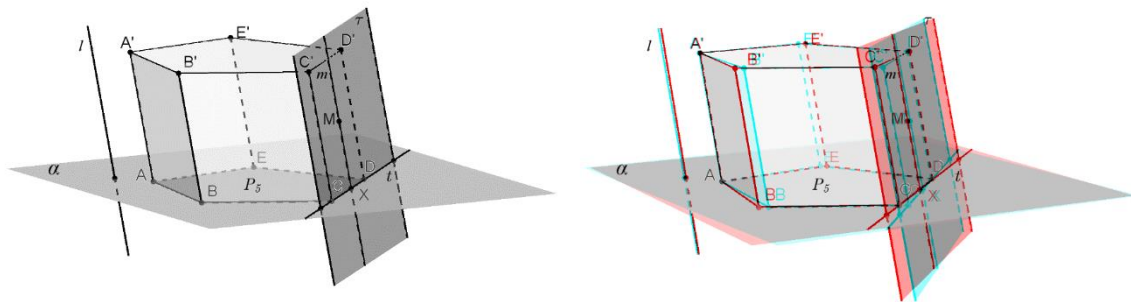
Dôkaz:

Rovina $\tau_i = \overleftrightarrow{t_i m}$ prechádza bodom M (je bodom M určená) a má s hranolom H spoločnú styčnú priamku t_i , teda spĺňa požiadavky úlohy.

Diskusia:

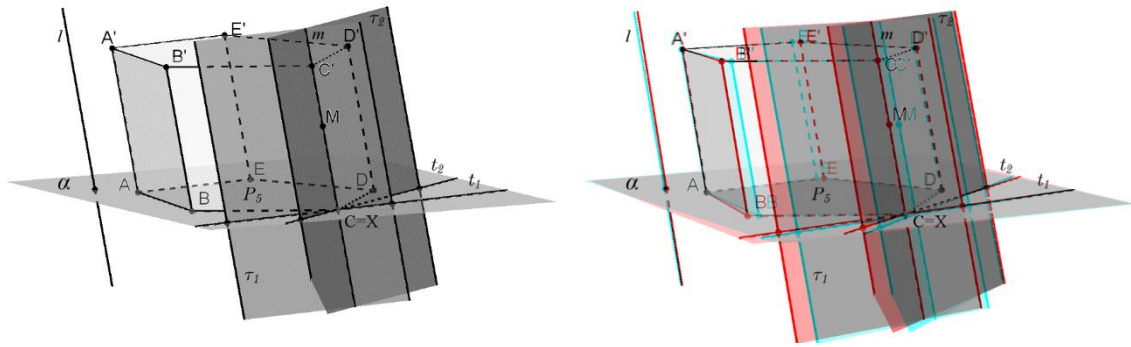
V diskusii budeme uvažovať hranolovú plochu, ktorá patrí danému hranolu $H(P_n \subset \alpha, l)$. Styčná rovina τ_i existuje práve vtedy, keď existuje styčná priamka t_i určujúceho mnohoholníka P_n prechádzajúca bodom X . Pri riešení úlohy môžu nastať tieto polohy bodu X a určujúceho mnohoholníka P_n :

- a) bod X je vonkajším bodom mnohoholníka P_n - bod M je vonkajším bodom hranola (hranolovej plochy), úloha má práve dve riešenia (Obr. 30a);
- b) bod X je bodom strany mnohoholníka P_n , ale nie je jeho vrcholom (Obr. 30b) – vtedy bod M je bodom steny hranola (hranolovej plochy), úloha má práve jedno riešenie, rovina τ_i obsahuje stenu hranola;



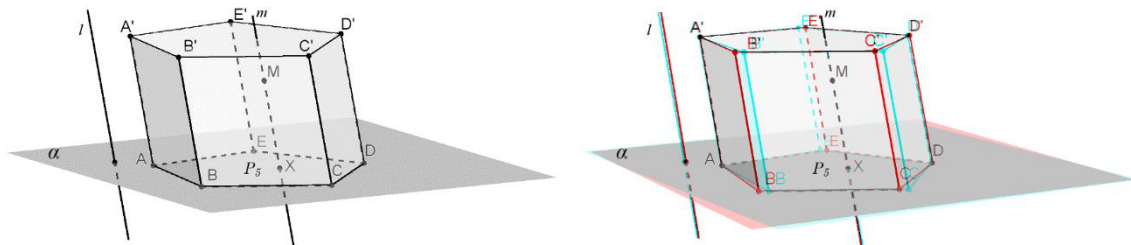
Obr. 30b: Styčná rovina obsahujúca stenu hranola

- c) bod X je vrcholom mnohoholníka P_n - bod M leží na hrane hranola (hranolovej plochy), úloha má nekonečne mnoho riešení (Obr. 30c), všetky styčné roviny spĺňajúce dané požiadavky obsahujú tú istú hranu;



Obr. 30c: Styčná rovina obsahujúca hranu hranola

- d) bod X je vnútorným bodom mnohouholníka P_n - bod M je vnútorným bodom hranola (hranolovej plochy), úloha nemá riešenie. (Obr. 30d)



Obr. 30d: Styčná rovina hranola daným bodom neexistuje

Záver:

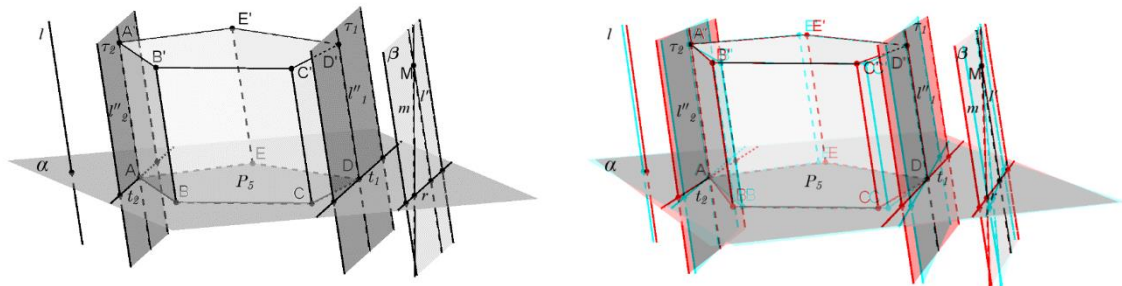
Vonkajším bodom hranola, ktorý nepatrí vnútornej oblasti príslušnej hranolovej plochy, existujú dve styčné roviny prechádzajúce daným bodom.

2. Styčné roviny rovnobežné s danou priamkou

Nech $H(P_n \subset \alpha, l)$ je hranol a priamka m je ľubovoľne zvolená priamka. Zostrojte styčnú rovину hranola, ktorá je rovnobežná s priamkou m . (Obr. 31a)

Rozbor:

Ak existuje styčná rovina τ_i (obr. 31a), ktorá spĺňa požadované vlastnosti, tak je osnovová a je rovnobežná s priamkou m . Roviny, ktoré sú rovnobežné s danými priamkami m, l , tvoria osnovu rovín. Ich priesečnice s rovinou α určujúceho mnohouholníka P_n patria do osnovy priamok roviny α . Styčná priamka určujúceho mnohouholníka P_n patriaca do tejto osnovy priamok roviny α , určuje styčnú rovину τ_i , ktorá patrí do osnovy rovín rovnobežných s priamkami m, l .



Obr. 31a: Styčné roviny hranola rovnobežné s priamkou m

Algoritmus konštrukcie:

Zostrojíme osnovovú priamku l' , ktorá je rovnobežná s priamkou m . Priamky l', m vytvoria rovinu β . Priesečnicou roviny α určujúceho mnohouholníka P_n a roviny β je priamka r . Zostrojíme styčnú priamku t_i určujúceho mnohouholníka P_n , ktorá je rovnobežná s priamkou r . Styčná rovina τ_i je určená styčnou priamkou t_i a tvoriacou priamkou l'' .

Zápis algoritmu:

1. $l': l' \parallel m, l' \cap m = M$
2. $\beta = \overleftrightarrow{l'm}$
3. $\beta \cap \alpha = r$
4. t_i – styčná priamka mnohouholníka P_n , $t_i \parallel r$
5. $\tau_i = \overleftrightarrow{t_i l''}, l'' \parallel l$

Dôkaz:

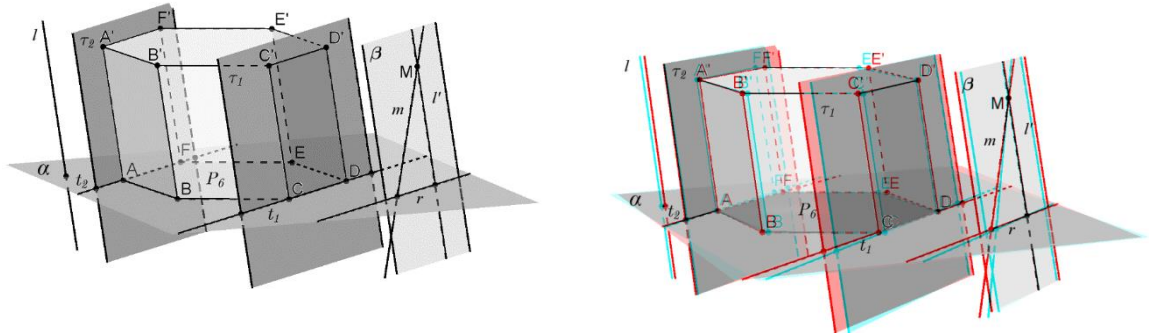
Každá rovina $\tau_i = \overleftrightarrow{t_i l''}$ je rovnobežná s rovinou β , ($t_i \parallel r$) a má s hranolom H spoločnú práve jednu priamku ($l'' \parallel l$). Rovina $\tau_i = \overleftrightarrow{t_i l''}$ je rovnobežná s priamkou m ($m \subset \beta$) a je styčnou rovinou hranola, teda spĺňa požiadavky úlohy.

Diskusia:

Keďže existujú práve dve styčné priamky určujúceho mnohouholníka P_n rovnobežné s priamkou roviny α , úloha má práve dve riešenia. Riešením úlohy sú roviny, ktoré môžu obsahovať:

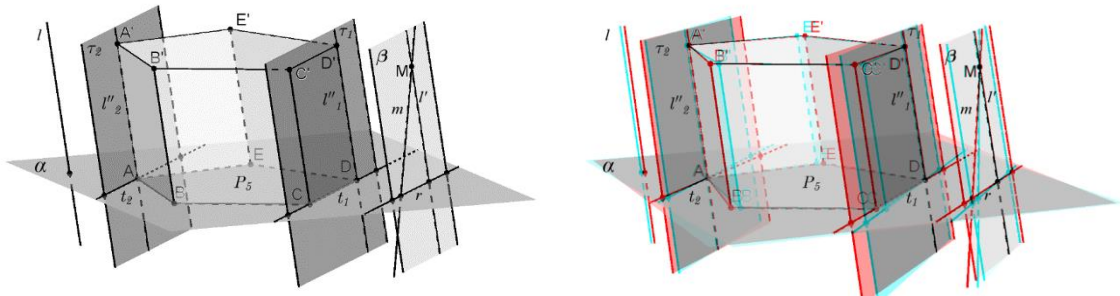
- a) dve nesusedné hrany hranola (Obr. 31a);

b) dve nesusedné steny hranola (Obr. 31b);



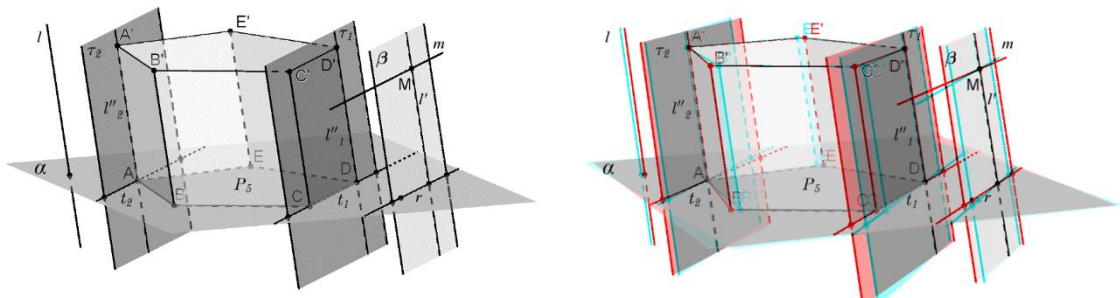
Obr. 31b: Styčné roviny hranola obsahujúce steny hranola

c) jednu stenu a jednu hranu hranola (Obr. 31c);



Obr. 31c: Styčné roviny hranola obsahujúce stenu a hranu hranola

d) v prípade, keď je priamka m rovnobežná s rovinou α , potom styčné priamky určujúceho mnohoholníka sú rovnobežné s priamkou m (Obr. 31d).



Obr. 31d: Styčné roviny hranola rovnobežné s priamkou m , $m \cap \alpha = \emptyset$

Záver:

Existujú práve dve styčné roviny hranola rovnobežné s danou priamkou.

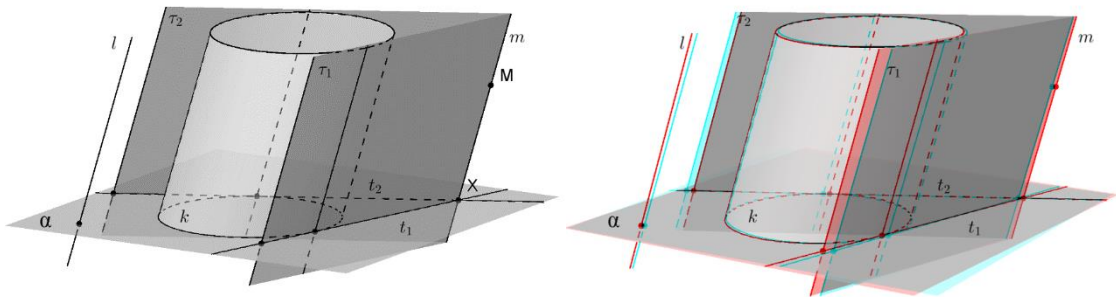
3.2 Algoritmus konštrukcie dotykových rovín valca

1. Dotykové roviny incidujúce daným bodom

Nech $V(k \subset \alpha, l)$ je valec a bod M je ľubovoľne zvolený bod. Zostrojte dotykovú rovinu valca, ktorá inciduje bodom M . (Obr. 32a)

Rozbor:

Nech existuje dotyková rovina τ_i (obr. 32a), ktorá spĺňa požadované vlastnosti, potom v tejto rovine leží osnovová priamka m daného valca, ktorá prechádza bodom M . Priesečnica rovín $\tau_i \cap \alpha$ je dotyčnicou t_i určujúcej kružnice k z bodu X , ktorý je priesečníkom priamky m a roviny α .



Obr. 32a: Dotykové roviny valca bodom

Algoritmus konštrukcie:

Najskôr zostrojíme priamku m , ktorá je osnovovou priamkou telesa a prechádza bodom M . Prienik priamky m a roviny α určujúcej kružnice je bod X . Z bodu X zostrojíme dotyčnicu t_i určujúcej kružnice k . Dotyková rovina τ_i je určená dotyčnicou t_i a osnovovou priamkou m , ktorá prechádza bodom M .

Algoritmus konštrukcie:

1. $m: m \parallel l, M \in m$
2. $X = m \cap \alpha$
3. t_i – dotyčnica kružnice k prechádzajúca bodom X
4. $\tau_i = \overleftrightarrow{t_i m}$

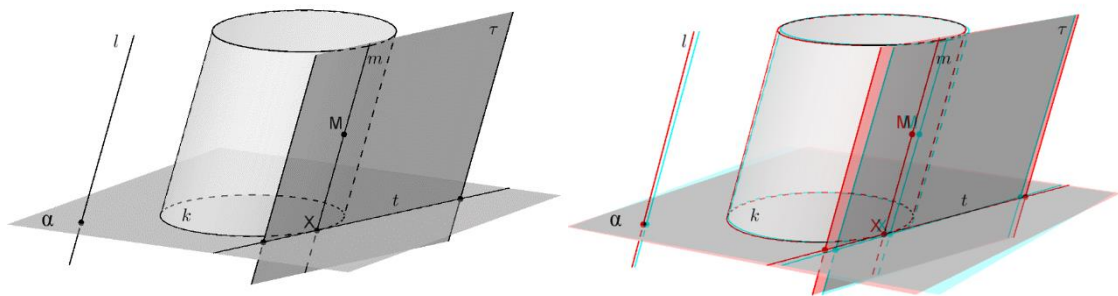
Dôkaz:

Rovina $\tau_i = \overleftrightarrow{t_i m}$ prechádza bodom M (je bodom M určená) a má s valcom V spoločnú práve jednu priamku (dotyčnicu t_i), teda spĺňa požiadavky úlohy.

Diskusia:

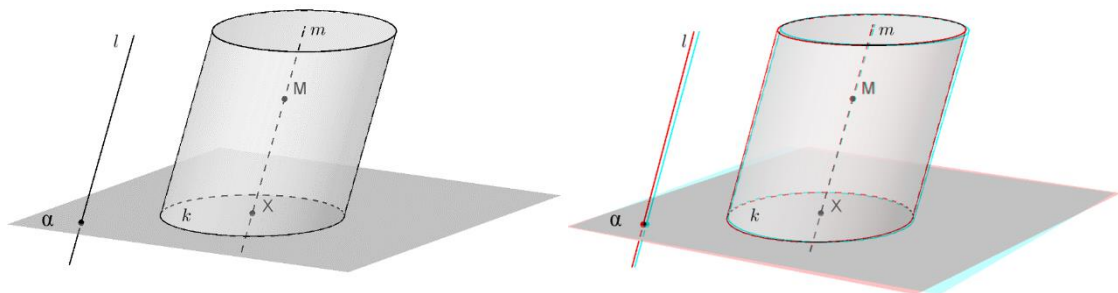
V diskusii budeme uvažovať valcovú plochu, ktorá patrí danému valcu $V(k \subset \alpha, l)$. Dotyková rovina τ_i existuje práve vtedy, keď existuje dotyčnica t_i určujúcej kružnice k prechádzajúca bodom X . Pri riešení úlohy môžu nastať tieto polohy bodu X a určujúcej kružnice k :

- bod X je vonkajším bodom kružnice k - bod M je vonkajším bodom valca (valcovej plochy), úloha má práve dve riešenia (obr. 32a);
- bod X je bodom kružnice k - bod M je bodom valca (valcovej plochy), úloha má práve jedno riešenie, rovina τ_i obsahuje priamku m (obr. 32b);



Obr. 32b: Dotyková rovina obsahujúca tvoriacu priamku valca

- bod X je vnútorným bodom kružnice k - bod M je vnútorným bodom valca (valcovej plochy), úloha nemá riešenie (obr. 32c).



Obr. 32c: Dotyková rovina valca daným bodom neexistuje

Záver:

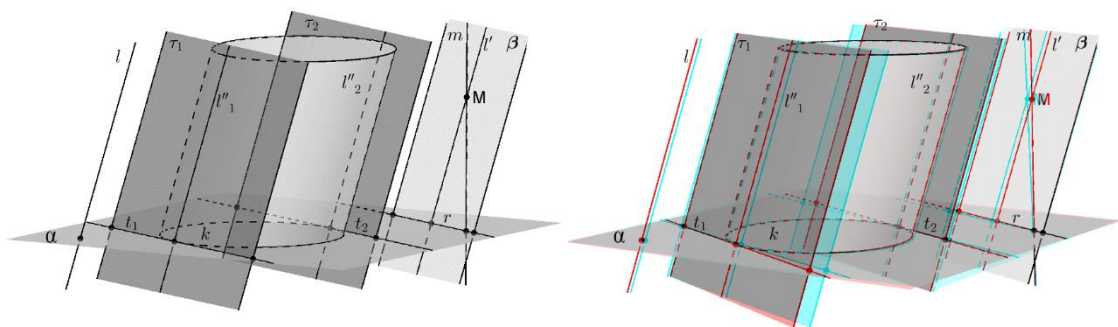
Vonkajším bodom valca, ktorý nepatrí vnútornej oblasti príslušnej valcovej plochy, existujú dve dotykové roviny valca prechádzajúce daným bodom.

2. Dotykové roviny rovnobežné s danou priamkou

Nech $V(k \subset \alpha, l)$ je valec a priamka m je ľubovoľne zvolená priamka. Zostrojte dotykovú rovinu valca, ktorá je rovnobežná s priamkou m . (Obr. 33)

Rozbor:

Nech existuje dotyková rovina τ_i (obr. 33), ktorá je osnovová a rovnobežná s priamkou m . Roviny, ktoré sú rovnobežné s danými priamkami m, l , tvoria osnovu rovín. Ich priesečnice s rovinou α určujúcej kružnice k patria do osnovy priamok roviny α . Dotyčnica určujúcej kružnice k patriaca do tejto osnovy priamok roviny α , určuje dotykovú rovinu τ_i , ktorá patrí do osnovy rovín rovnobežných s priamkami m, l .



Obr. 33: Dotykové roviny valca rovnobežné s priamkou

Algoritmus konštrukcie:

Zostrojíme osnovovú priamku l' , ktorá je rovnobežná s priamkou m . Priamky l', m vytvoria rovinu β . Priesečnicou roviny α určujúcej kružnice k a roviny β je priamka r . Zostrojíme dotyčnicu t_i určujúcej kružnice k , ktorá je rovnobežná s priamkou r . Dotyková rovina τ_i je určená dotyčnicou t_i a tvoriacou priamkou l'' .

Zápis algoritmu:

1. $l': l' \parallel m, l' \cap l = M$
2. $\beta = \overleftrightarrow{l'm}$
3. $\beta \cap \alpha = r$
4. t_i – dotyčnica kružnice k , $t_i \parallel r$
5. $\tau_i = \overleftrightarrow{t_i l''}, l'' \parallel l$

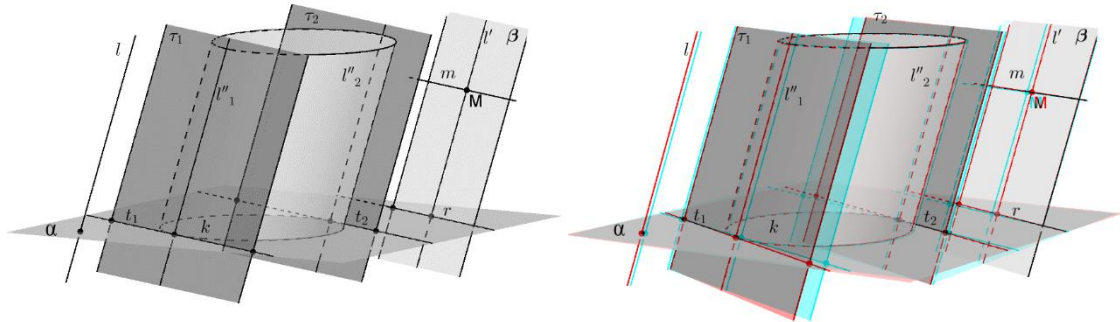
Dôkaz:

Rovina $\tau_i = \overleftrightarrow{t_i l''}$ je rovnobežná s rovinou β , ($t_i \parallel r$) a má s valcom V spoločnú práve jednu priamku ($l'' \parallel l$). Rovina $\tau_i = \overleftrightarrow{t_i l''}$ je rovnobežná s priamkou m ($m \subset \beta$) a je dotykovou rovinou valca, teda spĺňa požiadavky úlohy.

Diskusia:

Keďže existujú práve dve dotykové priamky určujúcej kružnice k rovnobežné s priamkou roviny α , úloha má práve dve riešenia (obr. 33).

V prípade, keď je priamka m rovnobežná s rovinou α (obr. 34), dotyčnice určujúcej kružnice sú rovnobežné s priamkou m .



Obr. 34: Dotykové roviny valca rovnobežné s priamkou m , $m \cap \alpha = \emptyset$

Záver:

Existujú práve dve dotykové roviny valca rovnobežné s danou priamkou.

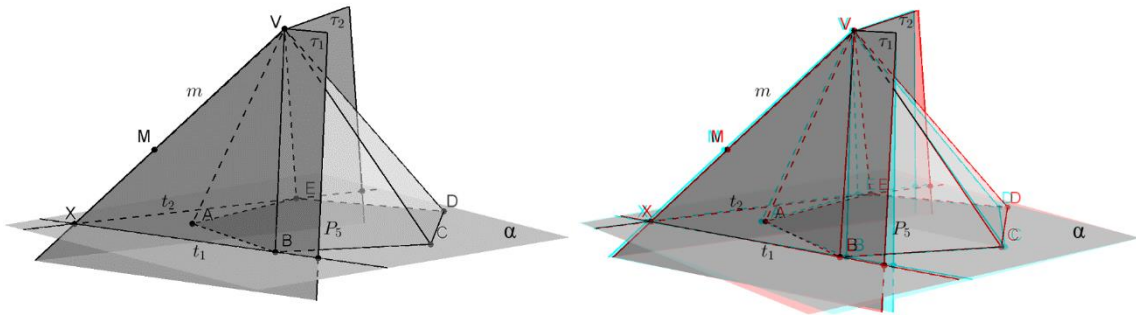
3.3 Algoritmus konštrukcie styčných rovín ihlana

1. Styčné roviny incidujúce daným bodom

Nech $I(P_n \subset \alpha, V)$ je ihlan a bod M je ľubovoľne zvolený bod. Zostrojte styčnú rovinu ihlana, ktorá inciduje bodom M . (Obr. 35a)

Rozbor:

Predpokladajme, že styčná rovina τ_i s požadovanými vlastnosťami existuje (obr. 35a). Vieme, že styčná rovina je vrcholová, teda obsahuje vrcholovú priamku m , ktorá prechádza bodom M . Priesečnica rovín $\tau_i \cap \alpha$ je styčnou priamkou t_i určujúceho mnohouholníka P_n a prechádza bodom X , ktorý je priesečníkom vrcholovej priamky m a roviny α .



Obr. 35a: Styčné roviny ihlana bodom

Algoritmus konštrukcie:

Prvým krokom konštrukcie je zostrojenie priamky m , ktorá je vrcholovou priamkou telesa a prechádza bodom M , tj. $m = \overleftrightarrow{VM}$. Prienik priamky m a roviny α určujúceho mnohouholníka je bod X . Z bodu X zostrojíme styčnú priamku t_i určujúceho mnohouholníka P_n . Styčná rovina τ_i je určená styčnou priamkou t_i a vrcholovou priamkou m , ktorá prechádza bodom M .

Zápis algoritmu:

1. $m: \overleftrightarrow{VM}$
2. $X = m \cap \alpha$
3. t_i – styčná priamka mnohouholníka P_n prechádzajúca bodom X
4. $\tau_i = \overleftrightarrow{t_i m}$

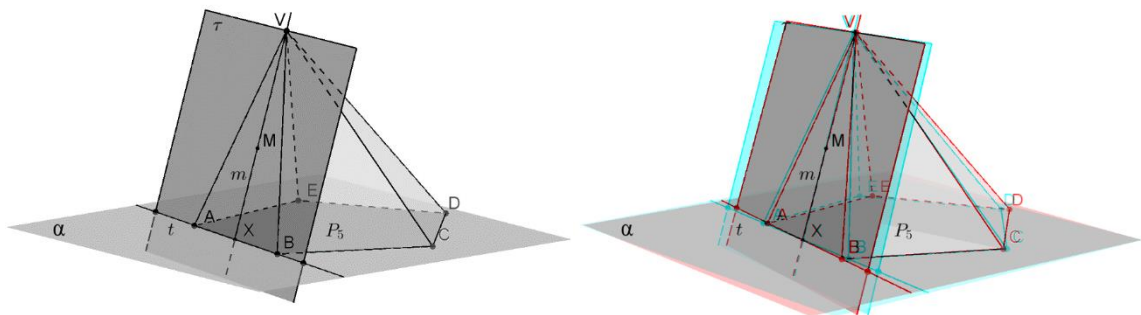
Dôkaz:

Rovina $\tau_i = \overleftrightarrow{t_i m}$ prechádza bodom M (je bodom M určená) a má s ihlanom I spoločnú práve jednu styčnú priamku, teda spĺňa požiadavky úlohy.

Diskusia:

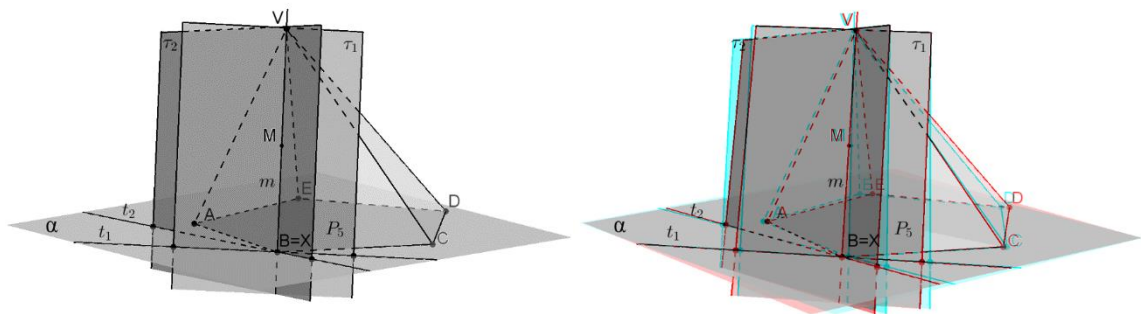
V diskusii budeme uvažovať úplnú ihlanovú plochu, ktorá patrí danému ihlanu. Styčná rovina τ_i existuje práve vtedy, keď existuje styčná priamka t_i určujúceho mnohoholníka P_n prechádzajúca bodom X . Pri riešení úlohy môžu nastať tieto polohy bodu X a určujúceho mnohoholníka P_n :

- bod X je vonkajším bodom mnohoholníka P_n - bod M je vonkajším bodom ihlana (ihlanovej plochy), úloha má práve dve riešenia (obr. 35a);
- bod X je bodom strany mnohoholníka P_n , ale nie je jeho vrcholom – vtedy bod M je bodom steny ihlana (ihlanovej plochy), úloha má práve jedno riešenie, rovina τ_i obsahuje stenu ihlana (obr. 35b);



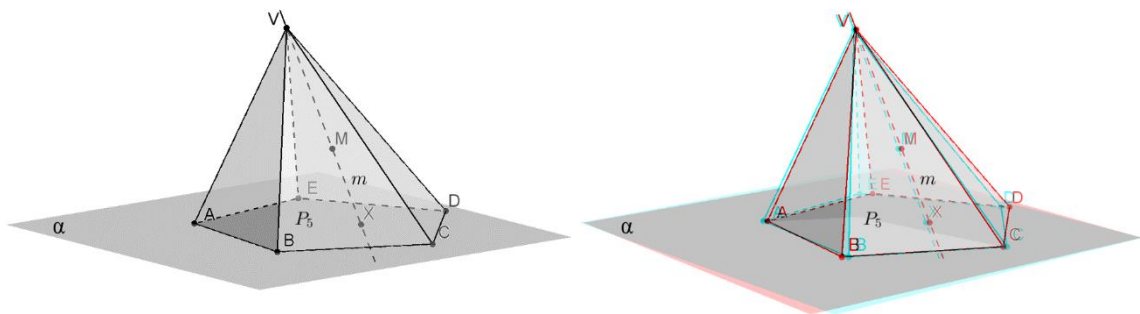
Obr. 35b: Styčná rovina prechádzajúca daným bodom a obsahujúca stenu ihlana

- bod X je vrcholom mnohoholníka P_n - bod M leží na hrane ihlana (ihlanovej plochy), úloha má nekonečne mnoho riešení, všetky styčné roviny spĺňajúce dané požiadavky obsahujú tú istú hranu ihlana (obr. 35c);



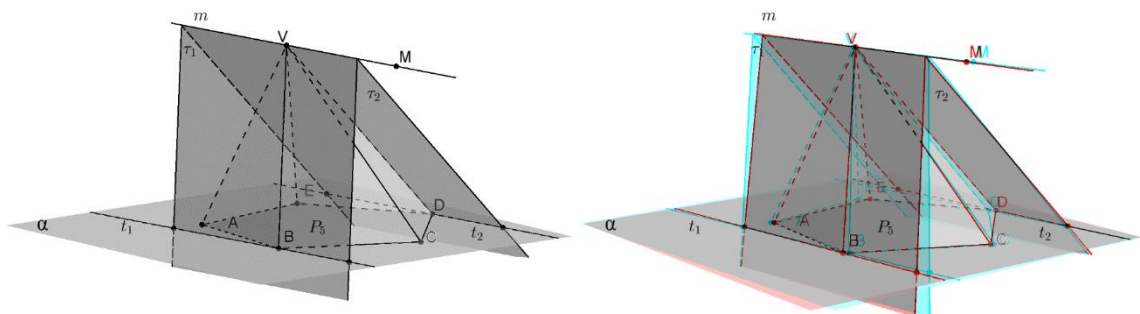
Obr. 35c: Styčné roviny prechádzajúce daným bodom a obsahujúce hranu ihlana

- d) bod X je vnútorným bodom mnohouholníka P_n - bod M je vnútorným bodom ihlana (ihlanovej plochy), úloha nemá riešenie (Obr. 35d).



Obr. 35d: Styčná rovina ihlana daným bodom neexistuje

- e) v prípade, keď bod X je nevlastným bodom priamky m a roviny α , priamka m je rovnobežná s rovinou α , bod M je vonkajším bodom ihlana (ihlanovej plochy), úloha má dve riešenia. (Obr. 35e).



Obr. 35e: Styčné roviny ihlana daným bodom

Záver:

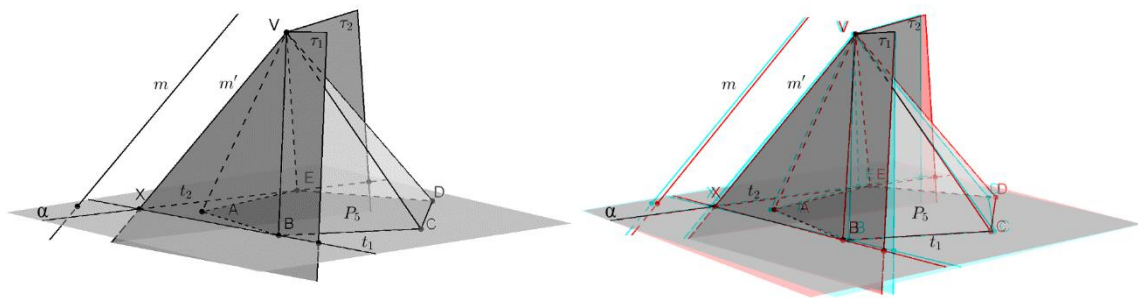
Vonkajším bodom ihlana, ktorý nepatrí vnútornej oblasti príslušnej ihlanovej plochy, existujú dve styčné roviny prechádzajúce daným bodom.

2. Styčné roviny rovnobežné s danou priamkou

Nech $I(P_n \subset \alpha, V)$ je ihlan a priamka m je ľubovoľne zvolená priamka. Zostrojte styčnú rovinu ihlana, ktorá je rovnobežná s priamkou m . (Obr. 36a)

Rozbor:

Ak existuje styčná rovina τ_i (obr. 36a), ktorá spĺňa požadované vlastnosti, tak je vrcholová, teda v nej leží vrcholová priamka m' , ktorá je rovnobežná s priamkou m . Priesečnica roviny $\tau_i \cap \alpha$ je styčnou priamkou t_i určujúceho mnohouholníka P_n a prechádza bodom X , ktorý je priesečníkom priamky m' a roviny α .



Obr. 36a: Styčné roviny ihlana rovnobežné s priamkou

Algoritmus konštrukcie:

Zostrojíme vrcholovú priamku m' , ktorá je rovnobežná s priamkou m . Prienik priamky m' a roviny α určujúceho mnohouholníka je bod X . Z bodu X zostrojíme styčnú priamku t_i určujúceho mnohouholníka P_n . Styčná rovina τ_i je určená styčnou priamkou t_i a vrcholovou priamkou m' .

Zápis algoritmu:

1. $m': m \parallel m', V \in m'$
2. $m' \cap \alpha = X$
3. t_i – styčná priamka mnohouholníka P_n z bodu X
4. $\tau_i = \overleftrightarrow{t_i m'}$

Dôkaz:

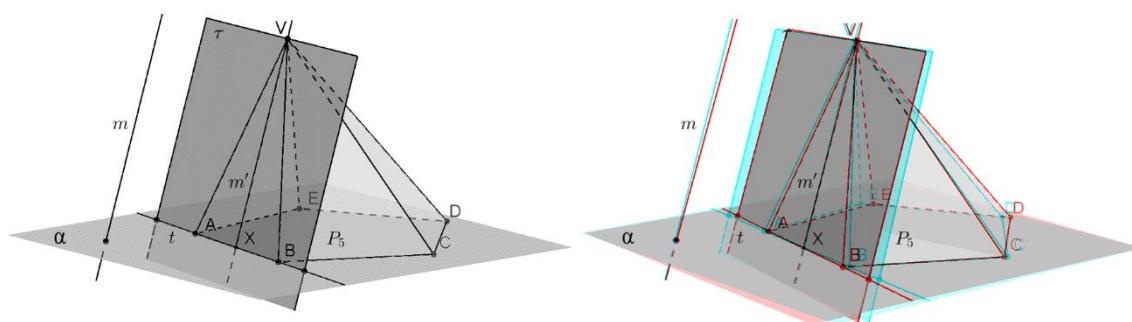
Rovina $\tau_i = \overleftrightarrow{t_i m'}$ je vrcholovou rovinou ihlana I a má s ním spoločnú práve jednu styčnú priamku. Rovina $\tau_i = \overleftrightarrow{t_i m'}$ je rovnobežná s priamkou m ($m \parallel m'$) a je styčnou rovinou ihlana, teda spĺňa požiadavky úlohy.

Diskusia:

V diskusii budeme uvažovať úplnú ihlanovú plochu, ktorá patrí danému ihlanu.

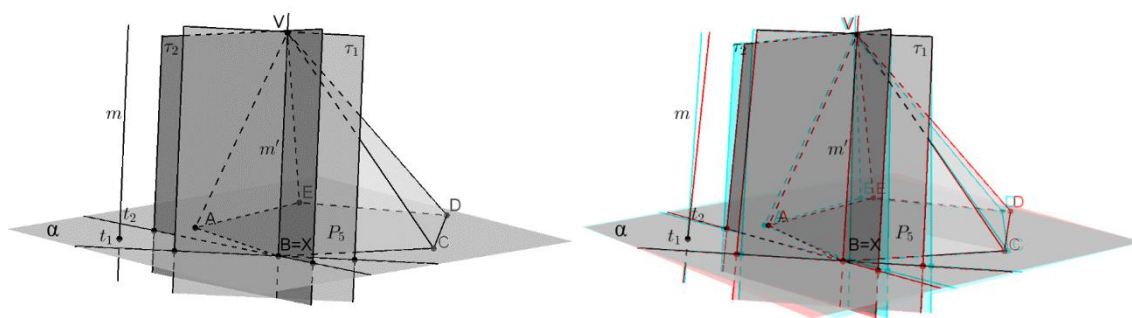
Styčná rovina τ_i existuje práve vtedy, keď existuje styčná priamka t_i určujúceho mnohouholníka P_n prechádzajúca bodom X . Pri riešení úlohy môžu nastať tieto polohy bodu X a určujúceho mnohouholníka P_n :

- bod X je vonkajším bodom mnohouholníka P_n - priamka m' obsahuje len vonkajšie body ihlana, úloha má práve dve riešenia (obr. 36a);
- bod X je bodom mnohouholníka P_n , ale nie je jeho vrcholom – priamka m' je tvoriacou priamkou ihlana (ihlanovej plochy), úloha má práve jedno riešenie, rovina τ_i obsahuje stenu ihlana (obr. 36b);



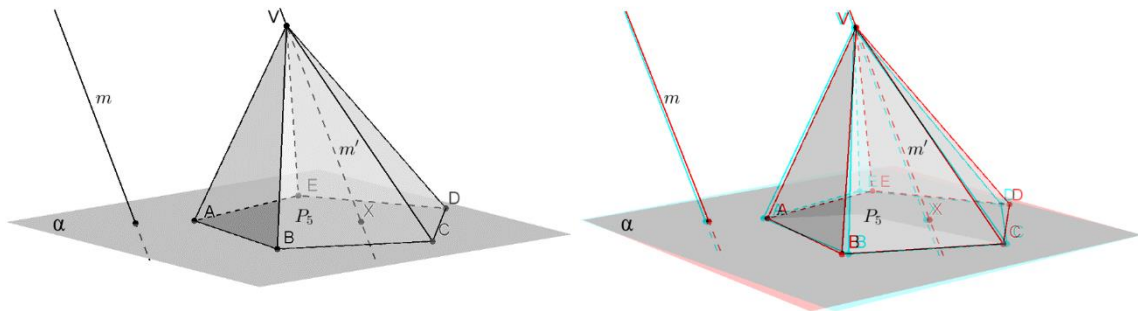
Obr. 36b: Styčná rovina rovnobežná s danou priamkou obsahujúca stenu ihlana

- bod X je vrcholom mnohouholníka P_n - priamka m' je hranou ihlana (ihlanovej plochy), úloha má nekonečne mnoho riešení, všetky styčné roviny spĺňajúce dané požiadavky obsahujú priamku m' (obr. 36c);



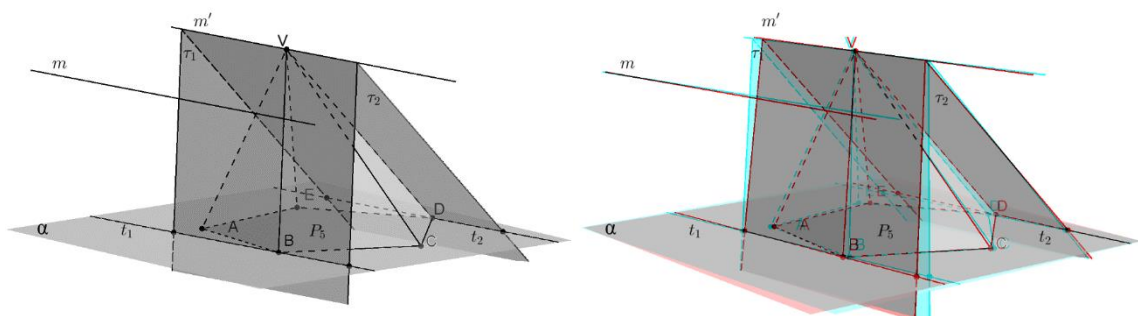
Obr. 36c: Styčné roviny rovnobežné s danou priamkou obsahujúce hranu ihlana

- bod X je vnútorným bodom mnohouholníka P_n - na priamke m' ležia vnútorné aj vonkajšie body ihlana, úloha nemá riešenie (obr. 36d);



Obr. 36d: Styčná rovina ihlana rovnobežná s danou priamkou neexistuje

e) v prípade, keď je priamka m' rovnobežná s rovinou α , styčné priamky určujúceho mnohoholníka sú rovnobežné s priamkou m' (obr. 36e).



Obr. 36e: Styčné roviny ihlana rovnobežné s priamkou m , $m \cap \alpha = \emptyset$

Záver:

Ak vrcholová priamka $m' \parallel m$ obsahuje len vonkajšie body ihlana, okrem bodu V , tak existujú dve styčné roviny rovnobežné s danou priamkou.

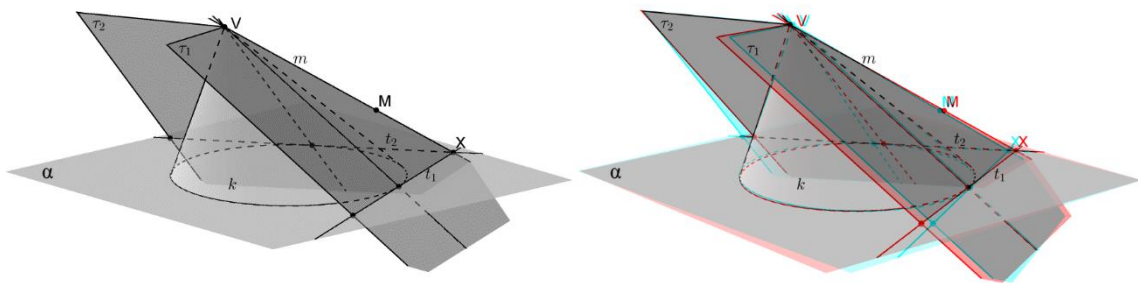
3.4 Algoritmus konštrukcie dotykových rovín kužeľa

1. Dotykové roviny incidujúce daným bodom

Nech $K(k \subset \alpha, V)$ je kužeľ a bod M je ľubovoľne zvolený bod. Zostrojte dotykovú rovinu kužeľa, ktorá inciduje bodom M . (Obr. 37a)

Rozbor:

Nech existuje dotyková rovina τ_i (obr. 37a), ktorá spĺňa požadované vlastnosti, potom v tejto rovine leží vrcholová priamka m daného kužeľa, ktorá prechádza bodom M . Priesečnica rovín $\tau_i \cap \alpha$ je dotyčnicou t_i určujúcej kružnice k a prechádza bodom X , ktorý je priesečníkom priamky m a roviny α .



Obr. 37a: Dotykové roviny kužeľa bodom

Algoritmus konštrukcie:

Najskôr zostrojíme priamku m , ktorá je vrcholovou priamkou telesa a prechádza bodom M . Prienik priamky m a roviny α určujúcej kružnice je bod X . Z bodu X zostrojíme dotyčnicu t_i určujúcej kružnice k . Dotyková rovina τ_i je určená dotyčnicou t_i a priamkou m , ktorá prechádza bodom M .

Zápis algoritmu:

1. $m: \overleftrightarrow{VM}$
2. $X = m \cap \alpha$
3. t_i – dotyčnica kružnice k prechádzajúca bodom X
4. $\tau_i = \overleftrightarrow{t_i m}$

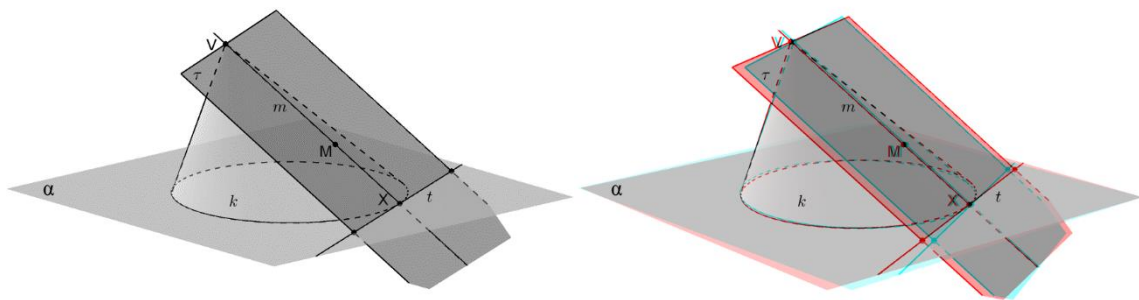
Dôkaz:

Rovina $\tau_i = \overleftrightarrow{t_i m}$ prechádza bodom M (je bodom M určená) a má s kužeľom K spoločnú práve jednu priamku (dotyčnicu t_i), je dotykovou rovinou kužeľa, teda spĺňa požiadavky úlohy.

Diskusia:

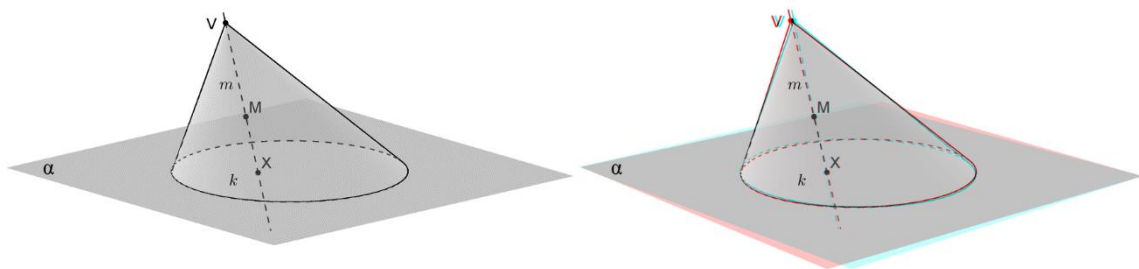
V diskusii budeme uvažovať úplnú kužeľovú plochu, ktorá patrí danému kužeľu. Dotyková rovina τ_i existuje práve vtedy, keď existuje dotyčnica t_i určujúcej kružnice k prechádzajúca bodom X . Pri riešení úlohy môžu nastať tieto polohy bodu X a určujúcej kružnice k :

- bod X je vonkajším bodom kružnice k – vtedy aj bod M je vonkajším bodom kužeľa (kužeľovej plochy), úloha má práve dve riešenia (obr. 37a);
- bod X je bodom kružnice k – vtedy bod M je bodom kužeľovej plochy, úloha má práve jedno riešenie, rovina τ_i obsahuje priamku m (obr. 37b);



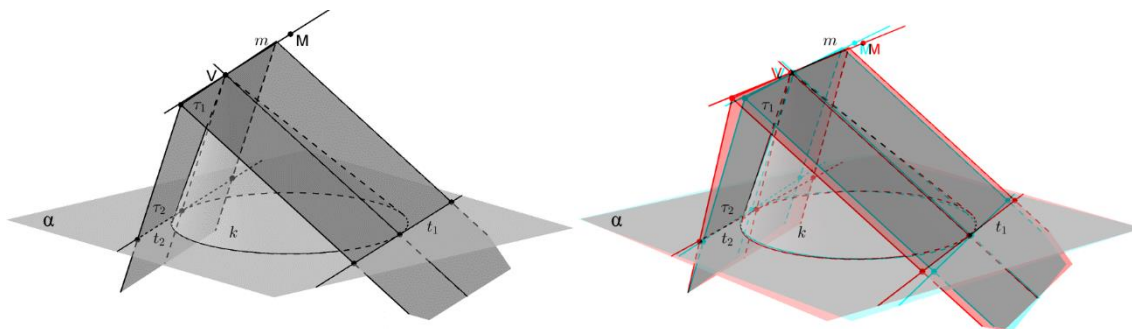
Obr. 37b: Dotyková rovina prechádzajúca daným bodom a obsahujúca tvoriacu priamku kužeľa

- bod X je vnútorným bodom kružnice k - bod M je vnútorným bodom kužeľa (kužeľovej plochy), úloha nemá riešenie (obr. 37c).



Obr. 37c: Dotyková rovina kužeľa prechádzajúca daným bodom

- v prípade, keď bod X je nevlastným bodom priamky m a roviny α , priamka m je rovnobežná s rovinou α , bod M je vonkajším bodom kužeľa (kužeľovej plochy), úloha má dve riešenia. (Obr. 37d).



Obr. 37d: Dotykové roviny kužeľa prechádzajúce daným bodom

Záver:

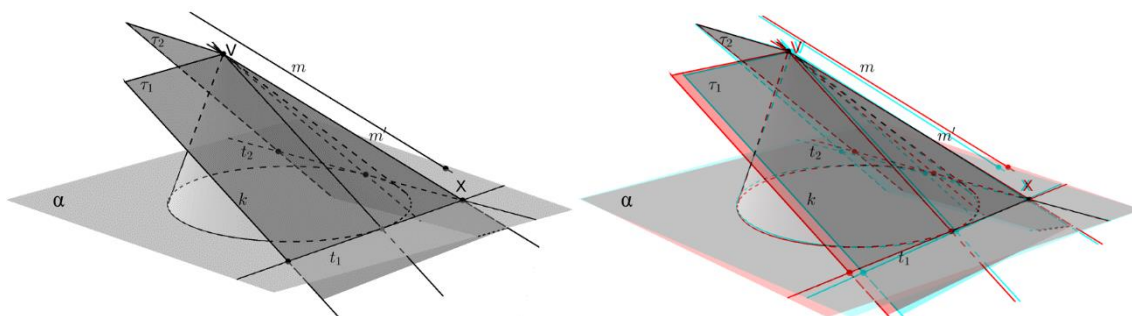
Vonkajším bodom kužeľa, ktorý nepatrí vnútornej oblasti príslušnej kužeľovej plochy, existujú dve dotykové roviny kužeľa prechádzajúce daným bodom.

2. Dotykové roviny rovnobežné s danou priamkou

Nech $K(k \subset \alpha, V)$ je kužeľ a priamka m je ľubovoľne zvolená priamka. Zostrojte dotykovú rovinu kužeľa, ktorá je rovnobežná s priamkou m . (Obr. 38a)

Rozbor:

Nech existuje dotyková rovina τ_i (obr. 38a), ktorá spĺňa požadované vlastnosti, potom je vrcholovou rovinou daného kužeľa a leží v nej vrcholová priamka m' , ktorá je rovnobežná s priamkou m . Priesečnica rovín $\tau_i \cap \alpha$ je dotyčnicou t_i určujúcej kružnice k a prechádza bodom X , ktorý je priesečníkom priamky m' a roviny α .



Obr. 38a: Dotykové roviny kužeľa rovnobežné s priamkou

Algoritmus konštrukcie:

Zostrojíme vrcholovú priamku m' , ktorá je rovnobežná s priamkou m . Priesečník priamky m' a roviny α určujúcej kružnice je bod X . Z bodu X zostrojíme dotyčnicu t_i určujúcej kružnice k . Dotyková rovina τ_i je určená dotyčnicou t_i a vrcholovou priamkou m' .

Zápis algoritmu:

1. $m': m \parallel m', V \in m'$
2. $m' \cap \alpha = X$
3. t_i – dotyčnica kružnice k bodom X
4. $\tau_i = \overleftrightarrow{t_i m'}$

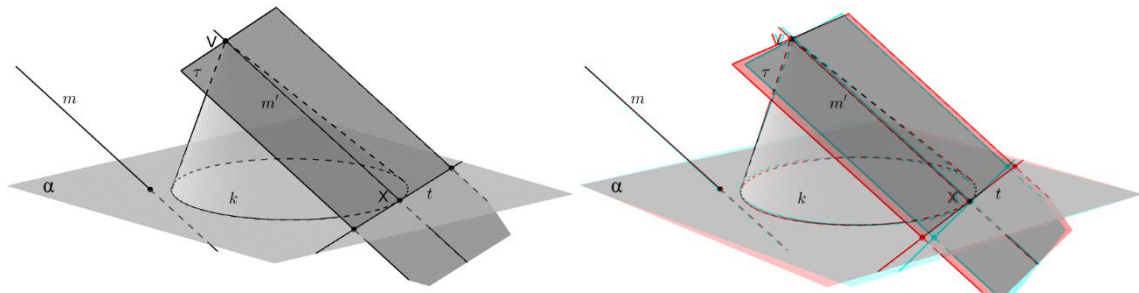
Dôkaz:

Rovina $\tau_i = \overleftrightarrow{t_i m'}$ je vrcholovou rovinou kužeľa K a má s ním spoločnú práve jednu priamku (dotyčnicu). Rovina $\tau_i = \overleftrightarrow{t_i m'}$ je rovnobežná s priamkou m ($m \parallel m'$) a je dotykovou rovinou kužeľa, teda spĺňa požiadavky úlohy.

Diskusia:

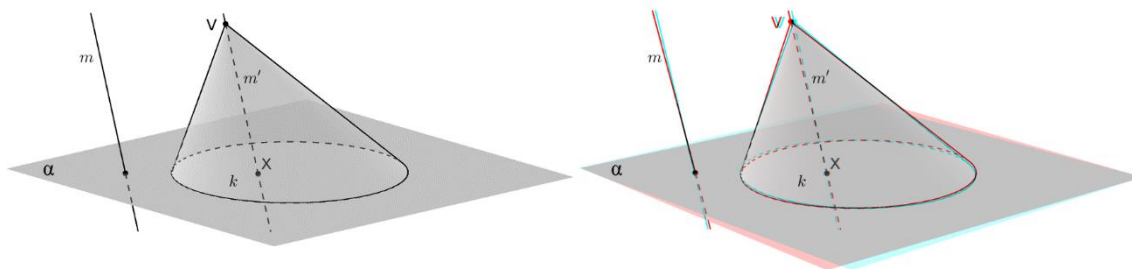
V diskusii budeme uvažovať úplnú kužeľovú plochu, ktorá patrí danému kužeľu. Dotyková rovina τ_i existuje práve vtedy, keď existuje dotyková priamka t_i určujúcej kružnice k prechádzajúca bodom X . Pri riešení úlohy môžu nastať tieto polohy bodu X a určujúcej kružnice k :

- a) bod X je vonkajším bodom kružnice k - priamka m' obsahuje len vonkajšie body kužeľa (kužeľovej plochy), úloha má práve dve riešenia (obr. 38a);
- b) bod X je bodom kružnice k – priamka m' je tvoriacou priamkou kužeľa (kužeľovej plochy), úloha má práve jedno riešenie, rovina τ_i obsahuje priamku m' (obr. 38b);



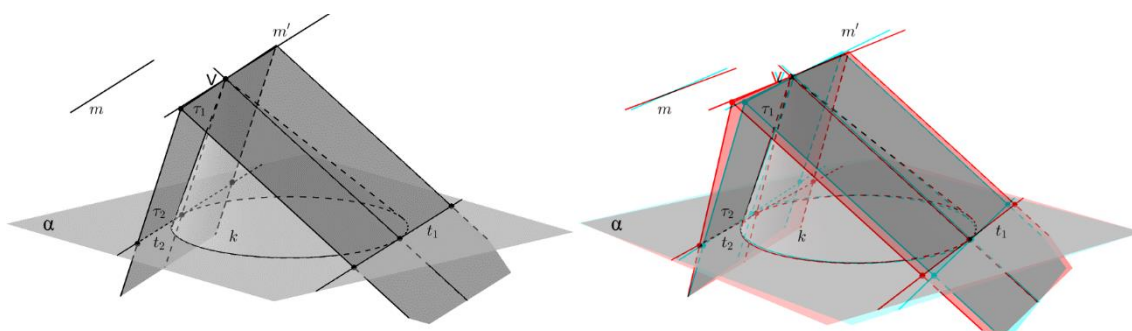
Obr. 38b: Dotyková rovina rovnobežná s danou priamkou obsahujúca tvoriacu priamku kužeľa

- c) bod X je vnútorným bodom kružnice k – na priamke m' ležia vnútorné aj vonkajšie body kužeľa, úloha nemá riešenie (obr. 38c);



Obr. 38c: Dotyková rovina kužeľa rovnobežná s danou priamkou neexistuje

- d) v prípade, keď je priamka m' rovnobežná s rovinou α , dotykové priamky určujúcej kružnice sú rovnobežné s priamkou m' (obr. 38d).



Obr. 38d: Dotykové roviny kužeľa rovnobežné s priamkou m , $m \cap \alpha = \emptyset$

Záver:

Ak vrcholová priamka $m' \parallel m$ obsahuje len vonkajšie body kužeľa, okrem bodu V , tak existujú dve dotykové roviny rovnobežné s danou priamkou.

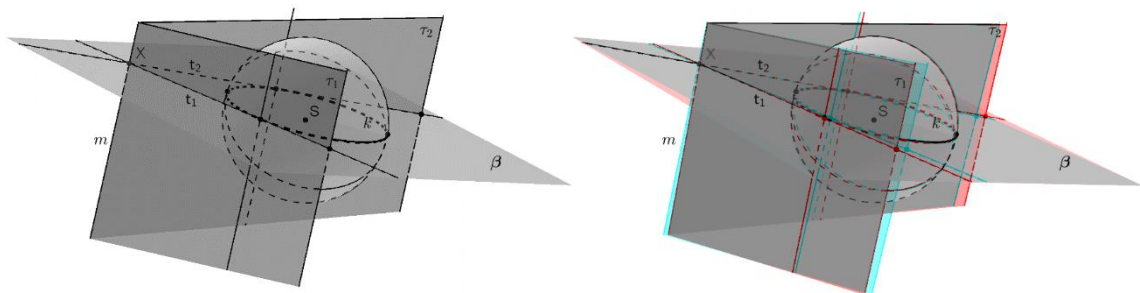
3.5 Algoritmus konštrukcie dotykových rovín guľovej plochy

Dotykové roviny incidentné danou priamkou

Nech $\bar{G}(S,r)$ je guľová plocha a priamka m je ľubovoľne zvolená priamka. Zostrojte dotykovú rovinu ku guľovej ploche, ktorá je incidentná s priamkou m . (Obr. 39a)

Rozbor:

Nech existuje dotyková rovina τ_i (obr 39a), ktorá spĺňa požadované vlastnosti, potom v tejto rovine leží tvoriaca priamka m'_i valcovej plochy. Ak zostrojíme ku guľovej ploche $\bar{G}(S,r)$ dotyčnice rovnobežné s danou priamkou m , ktorých je nekonečne veľa, vytvoria rotačnú valcovú plochu \bar{V} . Valcová plocha a guľová plocha majú spoločnú jednu kružnicu k , ktorá je hlavnou kružnicou a leží v priemerovej rovine β . Rovina β a tvoriace priamky valcovej plochy sú navzájom kolmé, teda aj priamka m je kolmá na rovinu β . Z tvoriacich priamok valcovej plochy vyberieme tie, ktoré s priamkou m určia dotykové roviny guľovej plochy. Dotyková rovina τ_i musí obsahovať dotyčnicu ku kružnici k , prechádzajúcu bodom X , ktorý je priesečníkom priamky m a roviny β .



Obr. 39a: Dotykové roviny guľovej plochy prechádzajúce danou priamkou

Algoritmus konštrukcie:

Najskôr zostrojíme priemerovú rovinu β guľovej plochy $\bar{G}(S,r)$, ktorá je kolmá na priamku m . Priesečnicou roviny β a guľovej plochy $\bar{G}(S,r)$ je hlavná kružnica k a priesečníkom priamky m a roviny β je bod X . Z bodu X zostrojíme dotyčnicu t_i ku kružnici k . Dotyková rovina je určená dotyčnicou t_i a priamkou m .

Zápis algoritmu:

1. $\beta: S \in \beta, \beta \perp m$
2. $X = m \cap \beta, k = \bar{G} \cap \beta$
3. t_i – dotyčnice ku kružnici k bodom X, T_i – dotykové body
4. $\tau_i = \overleftrightarrow{T_i m}$

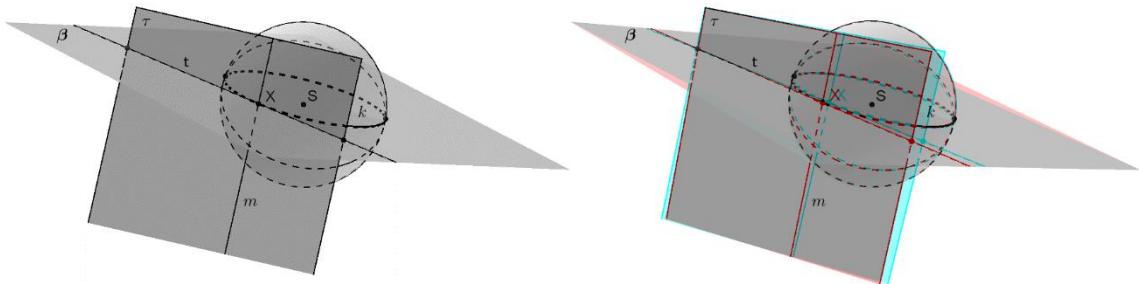
Dôkaz:

Rovina $\tau_i = \overleftrightarrow{T_i m}$ inciduje priamkou m (je priamkou m určená) a má s guľovou plochou \bar{G} spoločný práve jeden dotykový bod T_i . Rovina $\tau_i = \overleftrightarrow{T_i m}$ prechádza priamkou m a je dotykovou rovinou guľovej plochy, teda spĺňa požiadavky úlohy.

Diskusia:

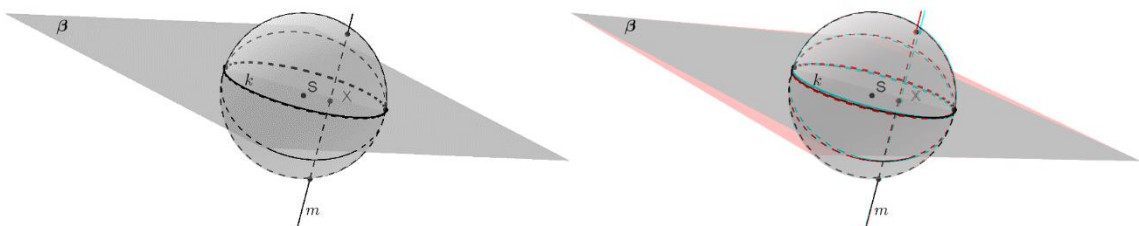
Priamku m možno zvoliť ľubovoľne. Dotyková rovina τ_i existuje práve vtedy, keď existuje dotyková priamka t_i hlavnej kružnice k prechádzajúca bodom X . Pri riešení úlohy môžu nastať tieto polohy bodu X a kružnice k :

- a) bod X je vonkajším bodom kružnice k – vtedy existujú práve dve dotyčnice t_i bodom X ku guľovej ploche $\bar{G}(S, r)$, úloha má dve riešenia (obr. 39a);
- b) bod X patrí kružnici k – vtedy existuje jediná dotyčnica t_i bodom X ku guľovej ploche $\bar{G}(S, r)$ a zároveň aj priamka m je dotyčnicou guľovej plochy, úloha má práve jedno riešenie (obr. 39b);



Obr. 39b: Dotyková rovina guľovej plochy incidujúca s danou priamkou

- c) bod X je vnútorným bodom kružnice k – vtedy neexistuje dotyčnica t_i bodom X ku guľovej ploche $\bar{G}(S, r)$, úloha nemá riešenie (obr. 39c).



Obr. 39c: Dotyková rovina guľovej plochy incidujúca s danou priamkou neexistuje

Záver:

Ak priamka nemá s guľovou plochou žiaden spoločný bod, tak existujú dve dotykové roviny guľovej plochy incidujúce s danou priamkou.

4. Aplikácia algoritmov na konštrukciu styčných a dotykových rovín

V prvých dvoch kapitolách sme sa zaoberali základnými vlastnosťami telies, ich dotykovými a styčnými rovinami a ich rôznymi polohami vzhľadom na dané teleso.

Algoritmy konštrukcie styčných a dotykových rovín opísané v stereometrii sa vhodnou úpravou aplikujú vo všetkých zobrazovacích metódach:

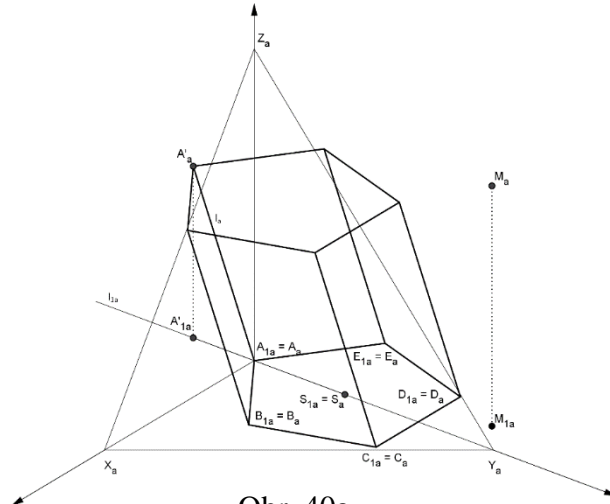
1. kótované zobrazenie
2. Mongeovo zobrazenie
3. šikmé zobrazenie
4. pravouhlá a šikmá axonometria
5. stredové premietanie
6. lineárna perspektíva

V tejto kapitole je zvolená zobrazovacia metóda pravouhlá axonometria, určená axonometrickým trojuholníkom ΔXYZ , na reprezentovanie algoritmov konštrukcie styčných a dotykových rovín. Uvedené sú riešené úlohy pre všetky skôr opísané algoritmy. Zadania úloh sú zvolené tak, aby riešenia mali dobrú vizualizáciu.

Úloha 1.:

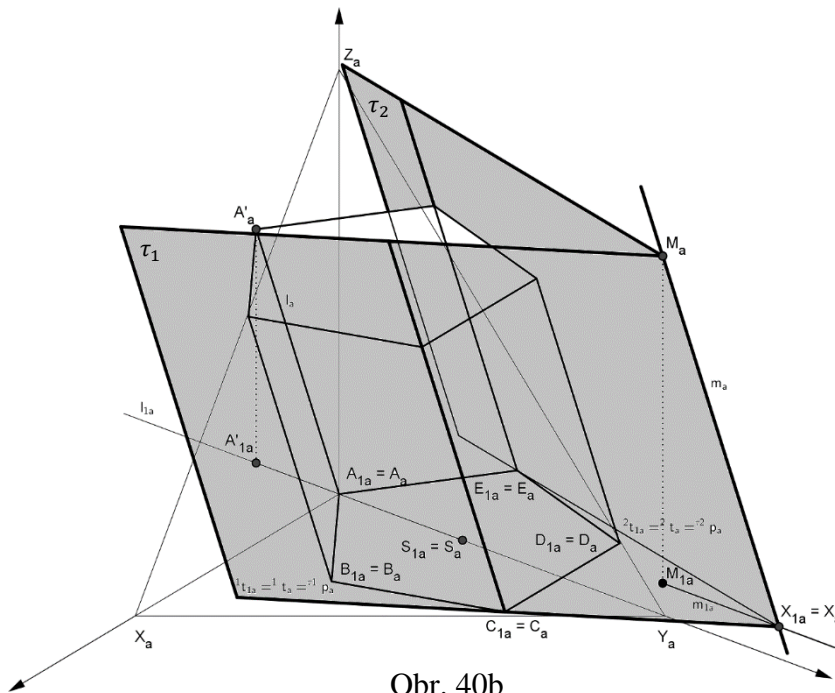
Zostrojte styčné roviny k 5-bokému hranolu $H_5(P_5 \subset \pi, l = \overleftrightarrow{AA'})$, ktoré prechádzajú bodom M . Úlohu riešte v pravouhlej axonometrii $\Delta XYZ(10j, 12j, 11j)$. Podstava hranola je pravidelný päťuholník $ABCDE$. Stred podstavy je bod $S(0, 3j, 0)$, vrchol podstavy bod $A(0, 0, 0)$, bod tvoriacej priamky $l = \overleftrightarrow{AA'}$, $A'(0, -2j, 5j)$ a bod $M(-1j, 7j, 7j)$.

Zadanie:



Obr. 40a

Riešenie:



Obr. 40b

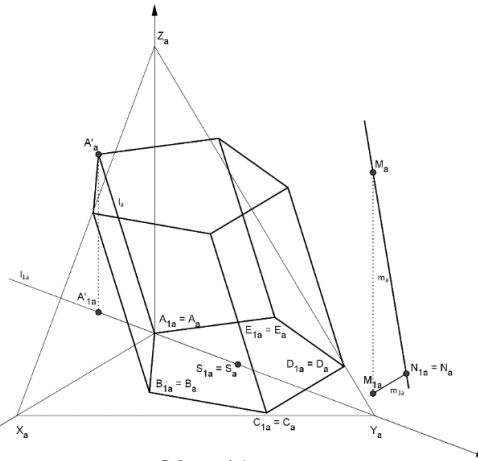
Zápis algoritmu v PA:

1. $m: m_a \parallel l_a, m_{1a} \parallel l_{1a}, M_a \in m_a, M_{1a} \in m_{1a}$
2. $X: X_a = X_{1a} = m_a \cap m_{1a}$
3. $\overleftrightarrow{X_{1a}C_{1a}} = {}^1t_a = {}^1t_{1a} = \tau^1 p_a, \overleftrightarrow{X_{1a}E_{1a}} = {}^2t_a = {}^2t_{1a} = \tau^2 p_a$
4. $\tau_1 = m_a \cdot {}^1t_a, \tau_2 = m_a \cdot {}^2t_a$

Úloha 2.:

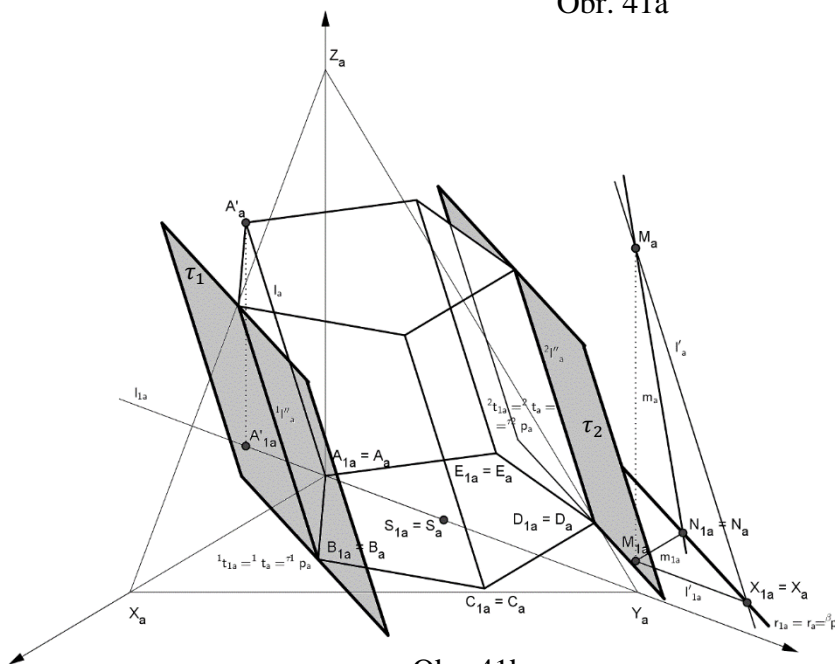
Zostrojte styčné roviny k 5-bokému hranolu $H_5(P_5 \subset \pi, l = \overleftrightarrow{AA'})$, ktoré sú rovnobežné s danou priamkou $m = \overleftrightarrow{MN}$. Úlohu riešte v pravouhlej axonometrii $\Delta XYZ(10j, 12j, 11j)$. Podstava hranola je pravidelný päťuholník $ABCDE$. Stred podstavy je bod $S(0, 3j, 0)$, vrchol podstavy bod $A(0, 0, 0)$ a bod tvoriacej priamky $l = \overleftrightarrow{AA'}$, $A'(0, -2j, 5j)$. Priamka $m = \overleftrightarrow{MN}$, pričom $M(-1j, 7j, 7j)$ a $N(-2.5j, 7j, 0)$.

Zadanie:



Obr. 41a

Riešenie:



Obr. 41b

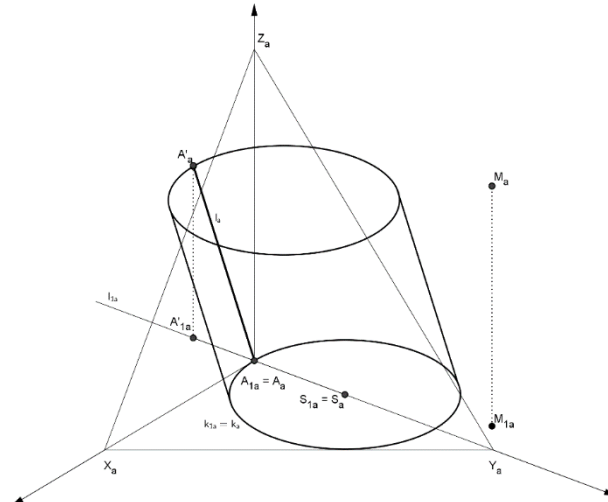
Zápis algoritmu v PA:

1. $l': l'_a \parallel l_a, l'_{1a} \parallel l_{1a}, M_a \in l'_a, M_{1a} \in l'_{1a}$
2. $\beta: l'_a m_a$
3. $\beta \cap \pi = \beta p_a = r_a = r_{1a}$
4. ${}^1 t_a \parallel r_a, {}^1 t_a = {}^1 t_{1a} = {}^{\tau 1} p_a, B_{1a} = B_a \in {}^1 t_a$
 ${}^2 t_a \parallel r_a, {}^2 t_a = {}^2 t_{1a} = {}^{\tau 2} p_a, D_{1a} = D_a \in {}^2 t_a$
5. $\tau_1 = \overleftrightarrow{{}^1 l''_a {}^1 t_a}, \tau_2 = \overleftrightarrow{{}^2 l''_a {}^2 t_a}$

Úloha 3.:

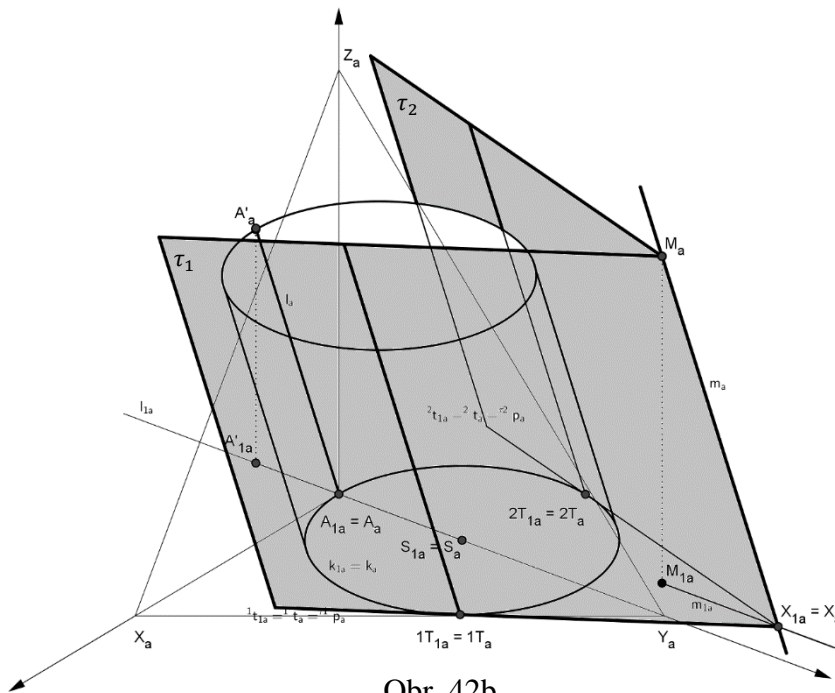
Zostrojte dotykové roviny k valcu $V(k \subset \pi, l = \overleftrightarrow{AA'})$, ktoré prechádzajú bodom M . Úlohu riešte v pravouhlej axonometrii $\Delta XYZ(10j, 12j, 11j)$. Podstava valca je kružnica k so stredom podstavy $S(0, 3j, 0)$, bodom určujúcej kružnice $A(0, 0, 0)$, bodom tvoriacej priamky $l = \overleftrightarrow{AA'}$, $A'(0, -2j, 5j)$ a bod M je $(-1j, 7j, 7j)$.

Zadanie:



Riešenie:

Obr. 42a



Obr. 42b

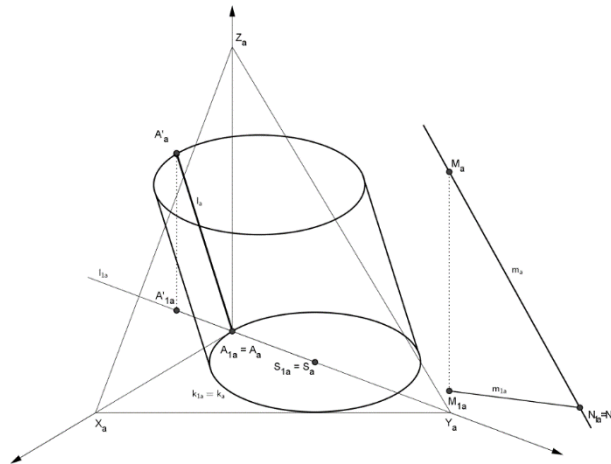
Zápis algoritmu v PA:

1. $m: m_a \parallel l_a, m_{1a} \parallel l_{1a}, M_a \in m_a, M_{1a} \in m_{1a}$
2. $X: X_a = X_{1a} = m_a \cap m_{1a}$
3. $\overleftrightarrow{X_{1a}1T_{1a}} = {}^1t_a = {}^1t_{1a} = \tau^1 p_a,$
 $\overleftrightarrow{X_{1a}2T_{1a}} = {}^2t_a = {}^2t_{1a} = \tau^2 p_a$
4. $\tau_1 = m_a \overleftrightarrow{{}^1t_a}, \tau_2 = m_a \overleftrightarrow{{}^2t_a}$

Úloha 4.:

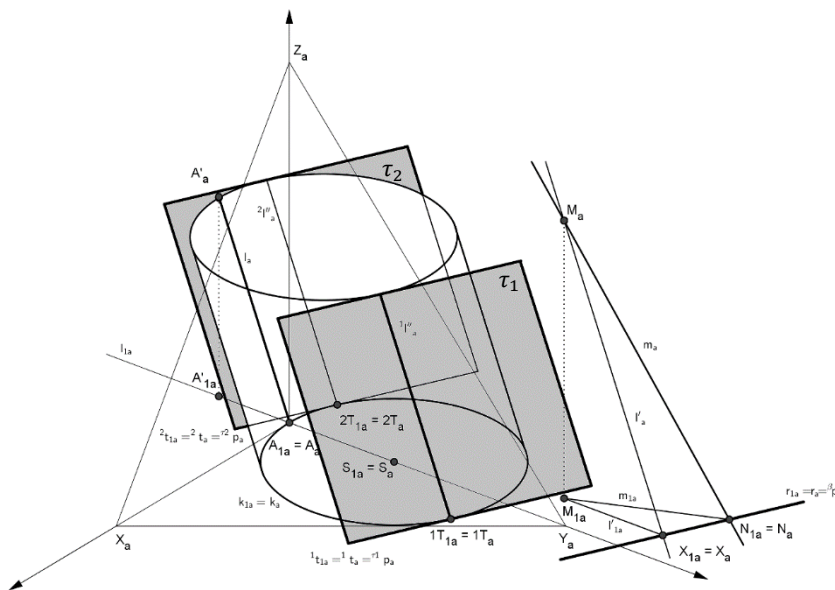
Zostrojte dotykové roviny k valcu $V(k \subset \pi, l = \overleftrightarrow{AA'})$ rovnobežné s danou priamkou $m = \overleftrightarrow{MN}$. Úlohu riešte v pravouhlej axonometrii $\Delta XYZ(10j, 12j, 11j)$. Podstava valca je kružnica k , ktorej stred podstavy je bod $S(0, 3j, 0)$, bod určujúcej kružnice bod $A(0, 0, 0)$, bod tvoriacej priamky $l = \overleftrightarrow{AA'}$, $A'(0, -2j, 5j)$. Priamka $m = \overleftrightarrow{MN}$, pričom $M(-1j, 7j, 7j)$ a $N(-2.5j, 10.5j, 0)$.

Zadanie:



Obr. 43a

Riešenie:



Obr. 43b

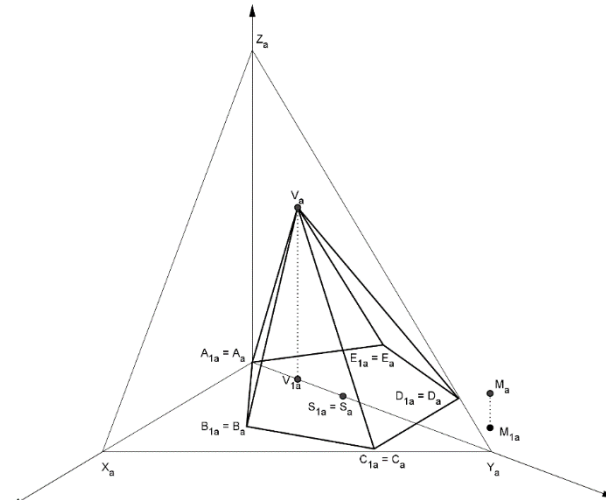
Zápis algoritmu v PA:

1. $l': l'_a \parallel l_a, l'_{1a} \parallel l_{1a}, M_a \in l'_a, M_{1a} \in l'_{1a}$
2. $\beta: l'_a m_a$
3. $\beta \cap \pi = \beta p_a = r_a = r_{1a}$
4. ${}^1 t_a \parallel r_a, {}^1 t_a = {}^1 t_{1a} = {}^{\tau_1} p_a, {}^1 T_{1a} = {}^1 T_a \in {}^1 t_a$
 ${}^2 t_a \parallel r_a, {}^2 t_a = {}^2 t_{1a} = {}^{\tau_2} p_a, {}^2 T_{1a} = {}^2 T_a \in {}^2 t_a$
5. $\tau_1 = \overleftrightarrow{{}^1 l''_a {}^1 t_a}, \tau_2 = \overleftrightarrow{{}^2 l''_a {}^2 t_a}$

Úloha 5.:

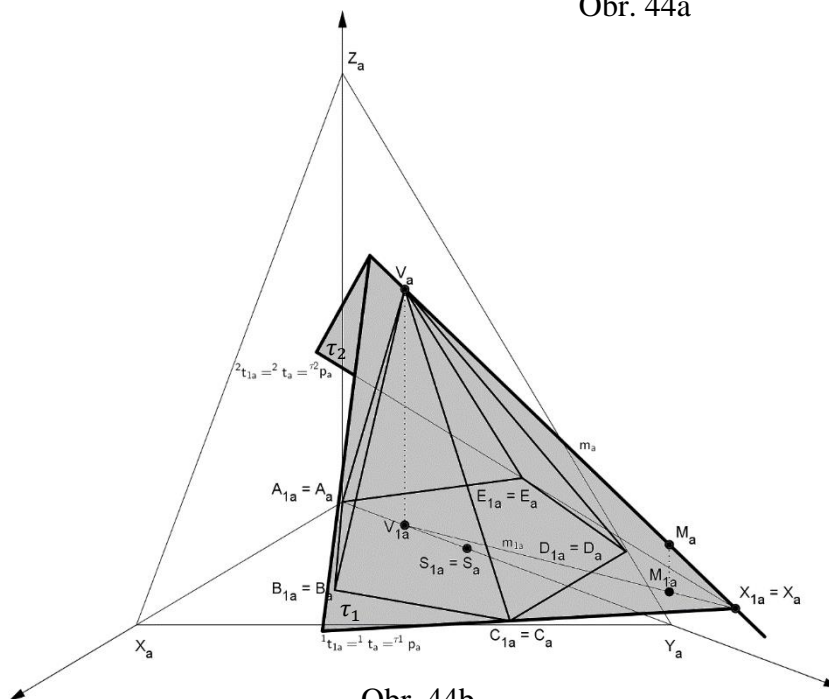
Zostrojte styčné roviny k 5-bokému ihlanu $I_5(P_5 \subset \pi, V)$, ktoré prechádzajú bodom M . Úlohu riešte v pravouhlej axonometrii $\Delta XYZ(10j, 12j, 11j)$. Podstava ihlana je pravidelný päťuholník $ABCDE$, ktorého stred podstavy je bod $S(0, 3j, 0)$, vrchol podstavy bod $A(0, 0, 0)$, vrchol ihlana je bod $V(0, 1.5j, 5j)$ a daný bod $M(-1j, 7j, 1j)$.

Zadanie:



Riešenie:

Obr. 44a



Obr. 44b

Zápis algoritmu v PA:

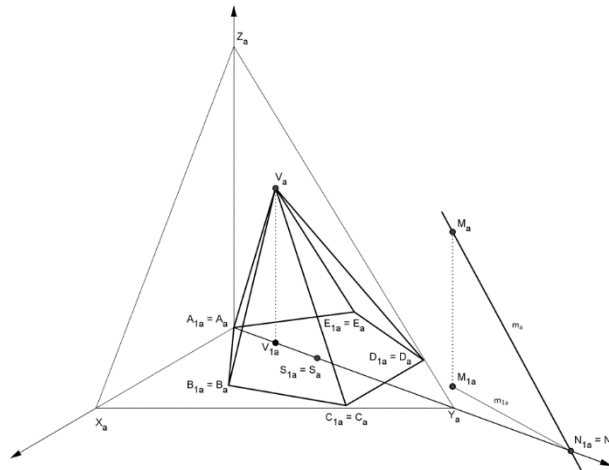
1. $m: \overrightarrow{M_a V_a} = m_a, \overrightarrow{M_{1a} V_{1a}} = m_{1a}$
2. $X: X_a = X_{1a} = m_a \cap m_{1a}$
3. $\overrightarrow{X_{1a} C_{1a}} = {}^1 t_a = {}^1 t_{1a} = \tau^1 p_a,$
 $\overrightarrow{X_{1a} E_{1a}} = {}^2 t_a = {}^2 t_{1a} = \tau^2 p_a$
4. $\tau_1 = \overleftarrow{m_a {}^1 t_a}, \tau_2 = \overleftarrow{m_a {}^2 t_a}$

Úloha 6.:

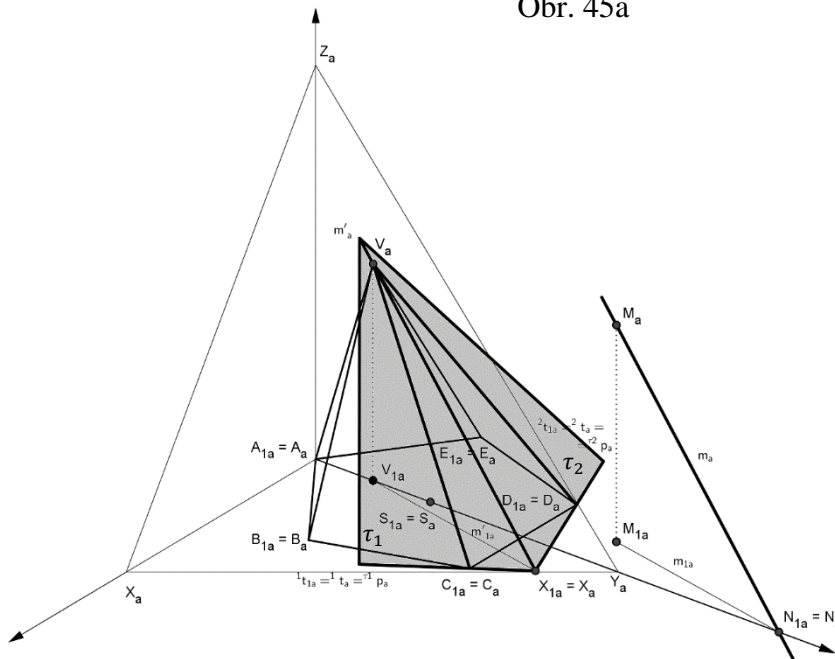
Zostrojte styčné roviny k 5-bokému ihlanu $I_5(P_5 \subset \pi, V)$, ktoré sú rovnobežné s danou priamkou $m = \overline{MN}$. Úlohu riešte v pravouhlej axonometrii $\Delta XYZ(10j, 12j, 11j)$. Podstava ihlana je pravidelný päťuholník $ABCDE$. Stred podstavy je bod $S(0, 3j, 0)$, vrchol podstavy bod $A(0, 0, 0)$, vrchol ihlana je bod $V(0, 1.5j, 5j)$. Priamka $m = \overline{MN}$, pričom $M(-1j, 7j, 5j)$ a $N(0, 10.5j, 0)$.

Zadanie:

Riešenie:



Obr. 45a



Obr. 45b

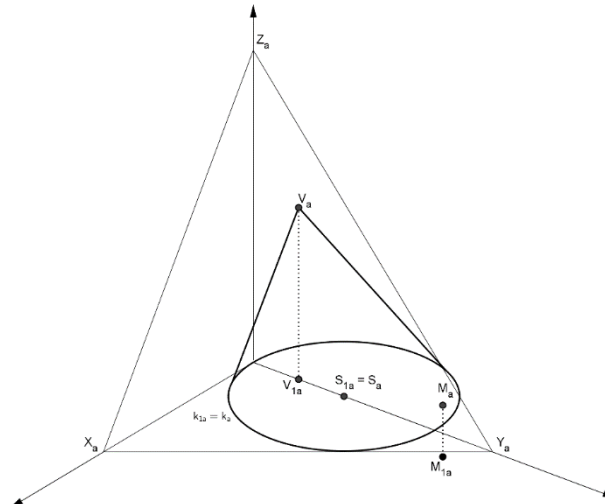
Zápis algoritmu v PA:

1. $m': m'_a \parallel m_a, m'_{1a} \parallel m_{1a}, V_a \in m'_a, V_{1a} \in m'_{1a}$
2. $X: X_a = X_{1a} = m'_a \cap m'_{1a}$
3. $\overrightarrow{X_{1a}C_{1a}} = {}^1t_a = {}^1t_{1a} = \tau^1 p_a,$
 $\overrightarrow{X_{1a}D_{1a}} = {}^2t_a = {}^2t_{1a} = \tau^2 p_a$
4. $\tau_1 = \overleftarrow{m'_a} {}^1t_a, \tau_2 = \overleftarrow{m'_a} {}^2t_a$

Úloha 7.:

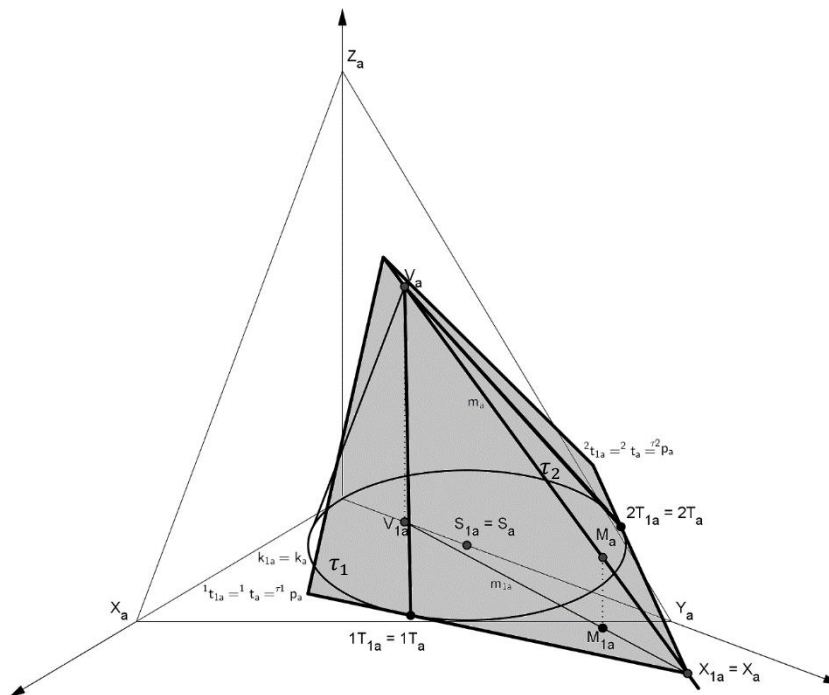
Zostrojte dotykové roviny ku kužeľu $K(k \subset \pi, V)$, ktoré prechádzajú bodom M . Úlohu riešte v pravouhlej axonometrii $\Delta XYZ(10j, 12j, 11j)$. Podstava kužeľa je kružnica k so stredom podstavy $S(0, 3j, 0)$, bodom určujúcej kružnice je bod $A(0, 0, 0)$, bod tvoriacej priamky $l = \overleftrightarrow{AA'}$, $A'(0, -2j, 5j)$ a daný bod $M(1j, 7j, 1.5j)$.

Zadanie:



Obr. 46a

Riešenie:



Obr. 46b

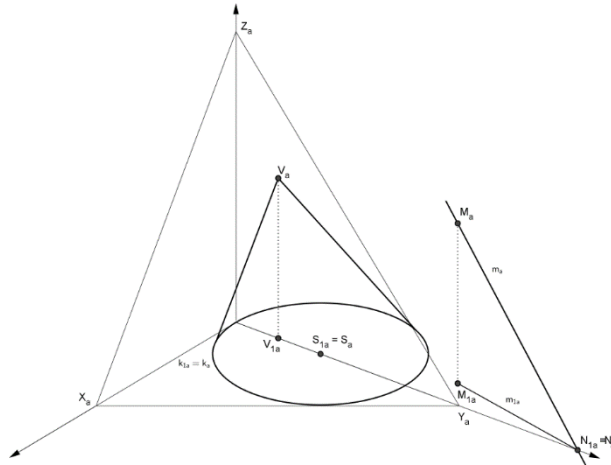
Zápis algoritmu v PA:

1. $m: \overleftrightarrow{M_a V_a} = m_a, \overleftrightarrow{M_{1a} V_{1a}} = m_{1a}$
2. $X: X_a = X_{1a} = m_a \cap m_{1a}$
3. $\overleftrightarrow{X_{1a} 1T_{1a}} = {}^1 t_a = {}^1 t_{1a} = \tau^1 p_a$
 $\overleftrightarrow{X_{1a} 2T_{1a}} = {}^2 t_a = {}^2 t_{1a} = \tau^2 p_a$
4. $\tau_1 = \overleftrightarrow{m_a {}^1 t_a}, \tau_2 = \overleftrightarrow{m_a {}^2 t_a}$

Úloha 8.:

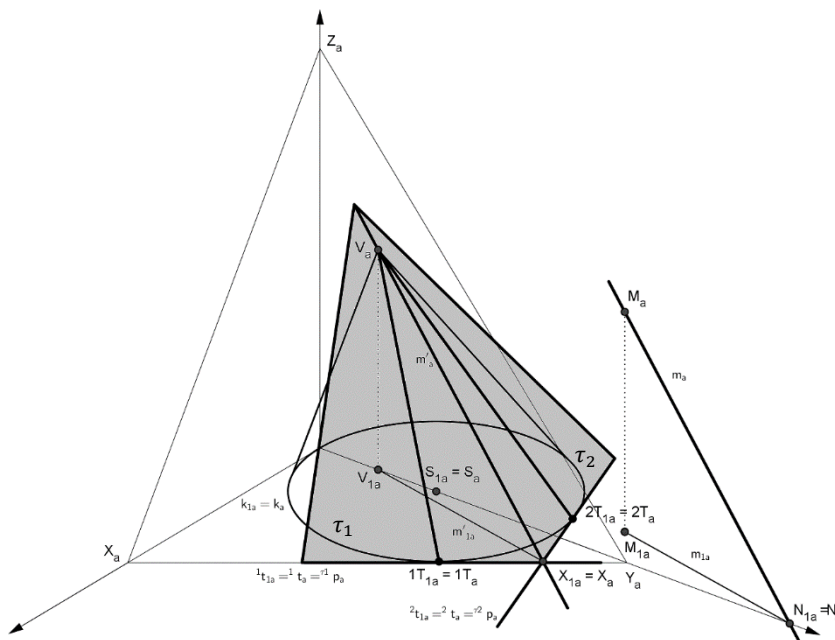
Zostrojte dotykové roviny ku kužeľu $K(k \subset \pi, V)$ rovnobežné s danou priamkou $m = \overline{MN}$. Úlohu riešte v pravouhlej axonometrii $\Delta XYZ(10j, 12j, 11j)$. Podstava kužeľa je kružnica k , ktorej stred podstavy je bod $S(0, 3j, 0)$, bod určujúcej kružnice je $A(0, 0, 0)$, bod tvoriacej priamky $l = \overline{AA'}$, $A'(0, -2j, 5j)$. Priamka $m = \overline{MN}$, kde $M(-1j, 7j, 5j)$ a $N(0, 10.5j, 0)$.

Zadanie:



Obr. 47a

Riešenie:



Obr. 47b

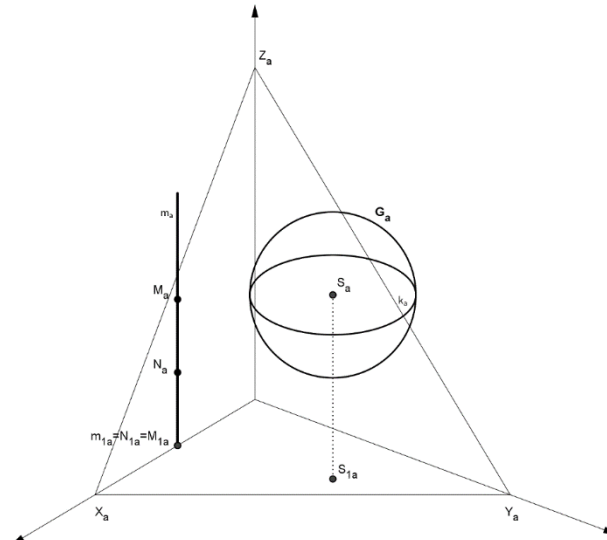
Zápis algoritmu v PA:

1. $m': m'_a \parallel m_a, m'_{1a} \parallel m_{1a}, V_a \in m'_a, V_{1a} \in m'_{1a}$
2. $X: X_a = X_{1a} = m'_a \cap m'_{1a}$
3. $\overline{X_{1a}1T_{1a}} = {}^1t_a = {}^1t_{1a} = \tau^1 p_a,$
 $\overline{X_{1a}2T_{1a}} = {}^2t_a = {}^2t_{1a} = \tau^2 p_a$
4. $\tau_1 = \overleftrightarrow{m'_a {}^1t_a}, \tau_2 = \overleftrightarrow{m'_a {}^2t_a}$

Úloha 9.:

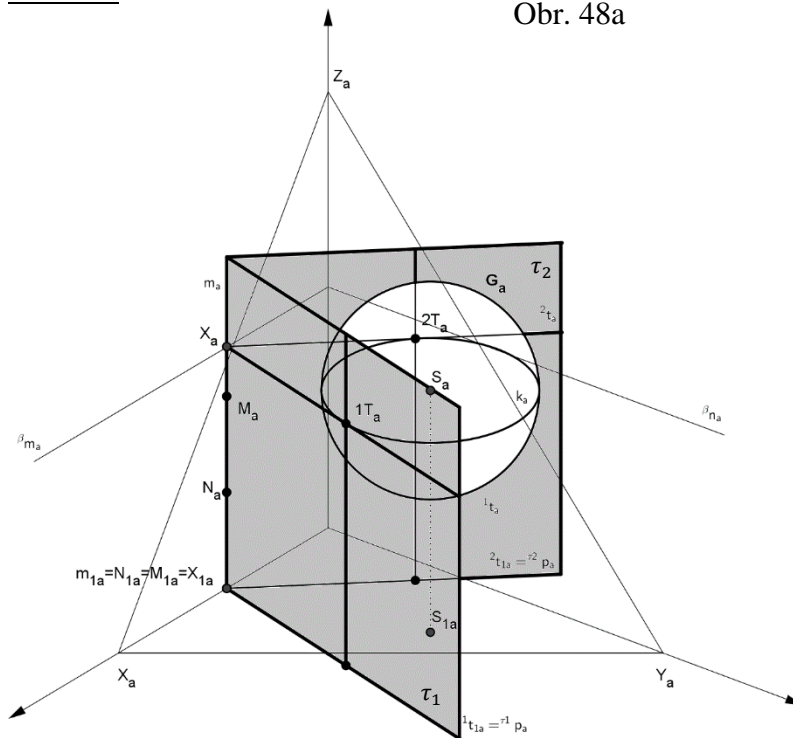
Zostrojte dotykové roviny ku guľovej ploche $G(S, r)$, prechádzajúce priamkou $m = \overleftrightarrow{MN}$. Úlohu riešte v pravouhlej axonometrii $\Delta XYZ(10j, 12j, 11j)$. Guľová plocha je daná stredom $S(2j, 4j, 5j)$ a polomerom $r = 2j$. Priamka $m = \overleftrightarrow{MN}$, kde $M(3j, 0, 4j)$ a $N(3j, 0, 2j)$.

Zadanie:



Obr. 48a

Riešenie:



Obr. 48b

Zápis algoritmu v PA:

1. $\beta: S_a \in \beta, \beta \perp m_a, m_a \parallel z_a \Rightarrow \beta m_a \parallel x_a, \beta n_a \parallel y_a, |\beta m_a x_a| = |\beta n_a y_a| = |S_a S_{1a}|$
2. $X: X_a = m_a \cap \beta m_a, k: k_a = G \cap \beta,$
3. $\overleftrightarrow{X_a 1T_a} = \overleftrightarrow{1t_a}, \overleftrightarrow{X_a 2T_a} = \overleftrightarrow{2t_a}$
4. $\tau_1 = m_a \overleftrightarrow{1t_a}, \tau_2 = m_a \overleftrightarrow{2t_a}$

Záver

Máte problém s priestorovou predstavivosťou? Vidíte priemety telies len ako súbor čiar? Tak pre Vás bol spracovaný učebný text o geometrických telesách a konštrukcii ich styčných resp. dotykových rovín. Mali ste možnosť porovnať klasický priemet telesa a jeho anaglyfickú verziu. Snahou bolo vybrať "vhodné" polohy telesa a ďalších vstupných prvkov a tým vytvoriť priestorovú vizualizáciu situácie.

Literatúra

- [1] URBAN, A. Deskriptivní geometrie I. Praha : Alfa, 1982. 415 s.
- [2] MEDEK, V., ZÁMOŽÍK, J. Konštruktívna geometria pre technikov. Praha : Alfa, 1982. 541 s.
- [3] DUBEC, A., FILIP, J., HORÁK, S., VESELÝ, F., VYČÍCHLO, F. Deskriptívna geometria pre II. triedu gymnázií. Bratislava : Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1952. 152 s. ISBN 301-16-521.
- [4] SKLENÁRIKOVÁ, Z., ČIŽMÁR, J. Elementárna geometria Euklidovskej roviny. Bratislava : Vydavateľstvo UK, 2005. 2017 s. ISBN 80-223-2020-X
- [5] KLENKOVÁ, P. Stereometria – Elementárna geometria trojrozmerného euklidovského priestoru. [online]. Bratislava [cit. 2016-05-05]. Dostupné na internete: <http://www.sccg.sk/~batorova/ZM1/stereometria.pdf>
- [6] KMEŤOVÁ, M., VITÉZOVÁ, Z. Anaglyfy a ich využitie vo vyučovaní geometrie In G – slovenský časopis pre geometriu a grafiku. Bratislava : Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku. ISSN 1336-524X, 2015, roč. 12, č. 23, s.31-36.