Elipsa

Soňa Kudličková, Alžbeta Mackovová

1. Motivácia k štúdiu

1.1. Elipsa okolo nás

Elipsu a najmä tzv. eliptický tvar môžeme vidieť v reálnom živote okolo nás. Najviac sa s elipsou a eliptickým tvarom stretávame v architektúre a záhradnej architektúre. Stavebnou architektúrou upúta budova Komerčnej banky na ostrove Maurícius, ktorá stojí na štyroch pilieroch (Obr. 1). Zaujímavá je aj elipsa na budove Planetária Tycho Brahe v dánskom meste Copenhagen. Vznikla ako rovinný rez valcovej plochy rovinou, ktorá nie je kolmá ani rovnobežná s osou valcovej plochy (Obr. 2). Pri potulkách po talianskom meste Padova, na najväčšom námestí Talianska a na jednom z najväčších námestí v Európe tiež môžete uvidieť kanál v tvare elipsy. Okolo kanála je rozostavených 84 sôch významných Padovčanov (Obr. 3). Historický objekt Kolosea v hlavnom meste Talianska je predmetom mnohých diskusií o svojom tvare. Väčšinou je pôdorys považovaný za eliptický, ale krivka arény a zachovalej fasády meraná s vysokou mierou presnosti ukazuje, že nejde o jednoznačný eliptický tvar, ale skôr vajcovitý (Obr. 4).

Na Slovensku môžeme uvidieť elipsu v Bratislave, kde ju reprezentuje rezidenčný projekt s nákupnou promenádou Tri Veže (Obr. 5) a elipsa je použitá v architektúre záhrady Prezidentského paláca (Obr. 6). V iných slovenských mestách sa stretneme s elipsou v Žiline v pôdoryse nákupného centra Mirage Shopping Centre (Obr. 7).

Okrem architektúry bola elipsa použitá v návrhu loga automobiliek Hyundai (Obr. 8) alebo Toyota (Obr. 9) a tiež v logu komiksovej postavy Batmana (Obr. 10). Po eliptickej dráhe obiehajú planéty Slnečnej sústavy okolo Slnka, pričom slnko sa nachádza v jednom z ich spoločných ohnísk (Obr. 11).

Obr. 1.: Komerčná banka, Maurícius

Obr. 2.: Tycho Brahe planetárium, Copenhagen

Obr. 3.: Prato della Valle, Padova

Obr. 4.: Koloseum, Rím

Obr. 5.: Tri Veže, Bratislava

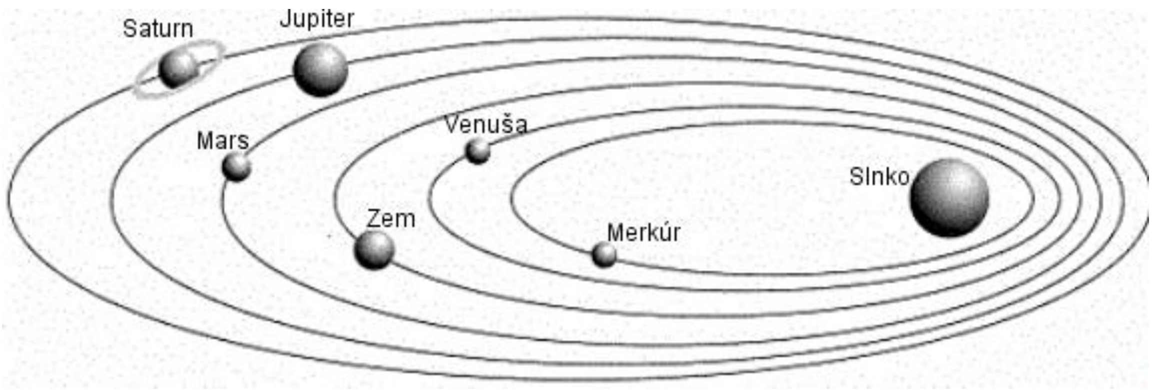
Obr. 6.: Prezidentský palác, Bratislava

Obr. 7.: Mirage Shopping Centre, Žilina

Obr. 8.: Logo automobilky Hyundai

Obr. 9.: Logo automobilky Toyota

Obr. 10.: Logo komiksovej postavy Batmana



Obr. 11.: Slnečná sústava

1.2. GeoGebra

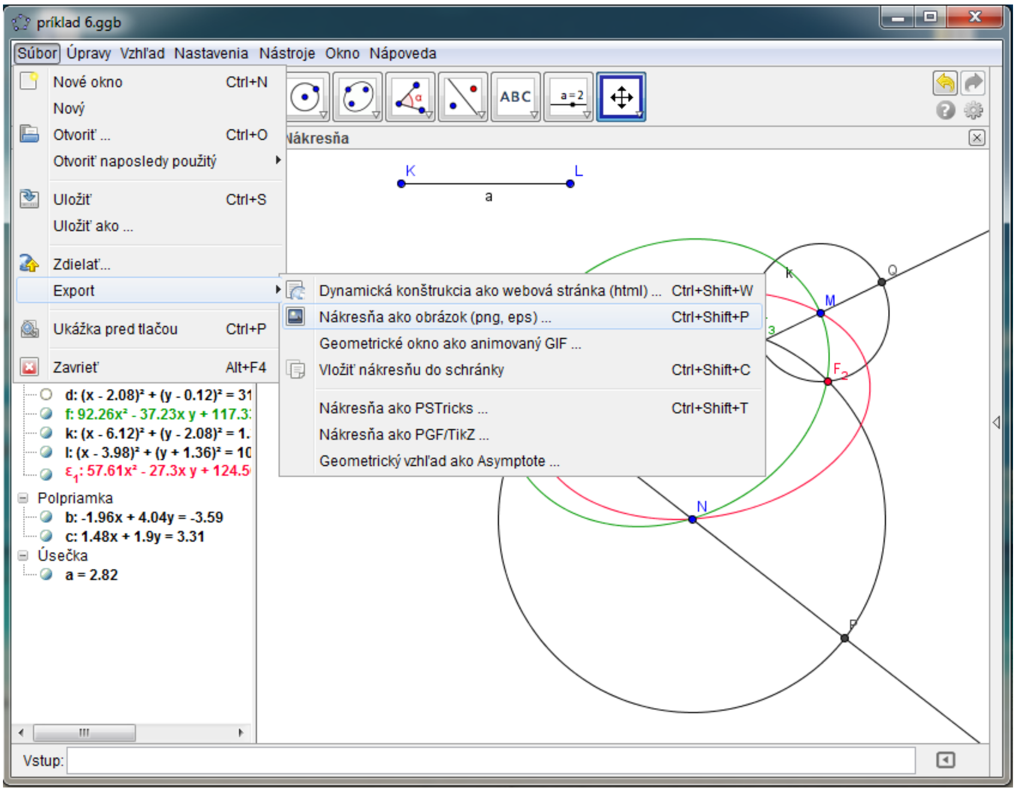
GeoGebra je interaktívny, dynamický, voľne dostupný matematický softvér pre všetky úrovne vzdelávania a pre všetky vekové kategórie. Je použiteľná vo vyučovaní a učení geometrie, algebry, matematickej analýzy, aritmetiky, štatistiky, tabuliek a grafov. Je dostupná vo viac ako 65 jazykoch a vyznačuje sa jednoduchým intuitívnym ovládaním s mnohými užitočnými funkciami. Jej tvorcom je Marcus Hohenwarten (*rak.*), ktorý ju vytvoril pre svoju diplomovú prácu v roku 2001 a dodnes sa vyvíja pod jeho vedením. Od vtedy softvér prešiel mnohými vylepšeniami a rozšírením funkcií.

Všetky obrázky, ktoré sú súčasťou tejto práce, sú vytvorené v GeoGebre. GeoGebra umožňuje konštrukciu uložiť ako obrázok vo formáte png.. Veľkosť karty upravíme tak, ako potrebujeme, v hlavnom menu v časti *Súbor* zvolíme *Export* a *Nákresňa ako obrázok (png, eps)...* (Obr. 12). Nad možnosťou *Nákresňa ako obrázok (png,eps)...* je možnosť *Dynamická konštrukcia ako webová stránka (html)* (Obr. 12), pomocou ktorej vieme vytvoriť www stránku s interaktívnym appletom.

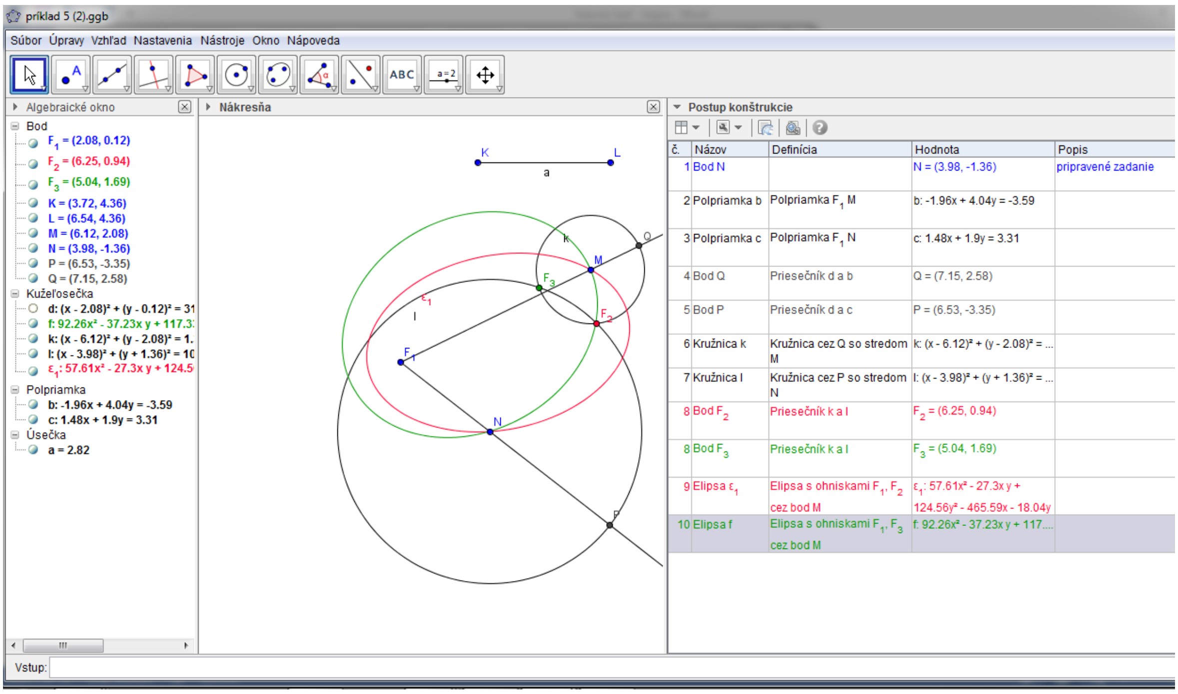
Okno s postupom konštrukcie sa zobrazí po zvolení možnosti *Postup konštrukcie* v časti *Vzhľad* (Obr. 13) v hlavnom menu, kde môžeme sledovať jednotlivé kroky konštrukcie. Na obr. 13 je ukážka riešenia príkladu 5 zo zbierky riešených príkladov aj s postupom konštrukcie.

Obrázky z práce sú k dispozícií v súboroch, ktoré sú súčasťou práce. Modrými bodmi sa dá pohybovať a celá konštrukcia závisí od ich novej polohy.

V učebnom texte a v zbierke riešených príkladov používame elipsy ε (F_1, F_2, M), ε' (F_1, F_2', M'), ak ich v konštrukcii vystupuje viac. Pre jednoduchosť čítania a zápisu sme zvolili spôsob označovania ε' (s čiarkou), čo však GeoGebra neumožňuje. Preto v animáciách a riešených príkladoch, ktoré sú pre túto prácu k dispozícii je použité označovanie: ε_1 (F_1, F_2, M_1), ε_2 (F_3, F_4, M_2). Konštrukcie sú farebné, tak ako obrázky v tejto práci, takže preoznačenie by pre čitateľa nemalo byť problém.



Obr. 12.: Export obrázku v GeoGebre



Obr. 13.: Postup konštrukcie a riešenie príkladu 5 v GeoGebre

1.3. Použitá symbolika

$A, B, C, \ldots$ – body

$a, b, c, \ldots$ – priamky, kružnice, konštanty

j – čitateľom zvolená jednotka

$|AB|$ - dĺžka úsečky AB

$|Ab|$ - vzdialenosť bodu A od priamky a

$k(A, b)$ – kružnica k so stredom v bode A a polomerom b

(ABC) - deliaci pomer bodov A, B, C

$A \in a$ – bod A patrí priamke a

$A \notin a$ – bod A nepatrí priamke a

AB – priamka, resp. úsečka, resp. polpriamka určená bodmi A, B

$a \cap b = \{A\}$ – spoločný bod priamky a a priamky b je bod A

$a \cap b = \emptyset$ – priamka a a priamka b nemajú spoločný bod

$a > b$ – a je väčšie ako b (dĺžka a je väčšia ako dĺžka b)

$a < b$ – a je menšie ako b (dĺžka a je menšia ako dĺžka b)

$a = b$ – a sa rovná b (zhodné úsečky)

$a \neq b$ – a sa nerovná b (nezhodné úsečky)

$2a = 2*a$

ε – elipsa

$\varepsilon\ (F_1, F_2, M)$ – elipsa určená ohniskami F_1, F_2 a jedným jej bodom M

bod A leží medzi priamkami a, b – bod A leží v prieniku opačných polrovín určených priamkami a, b

bod C leží medzi bodmi A, B – bod C leží na úsečke s krajnými bodmi A, B

(Zbierka riešených úloh, príklad 1) – príklad 1 vyriešný v GeoGebre spolu s postupom konštrukcii sa nachádza v priečinku *Zbierka riešených úloh* pod názvom *príklad 1*

Všetky označenia bodov, priamok, konštánt, kružníc a pod. sú v texte uvedené kurzívou. V obrázkoch, ktoré sú navrhnuté v GeoGebre, je použité kolmé písmo. Niektoré dôkazy, úlohy alebo príklady sú riešené len pre jedno ohnisko, analogicky by sa postupovalo, ak by konštrukcia začínala v druhom ohnisku. Podľa toho, ako je náročný text, uvádzame iné možnosti v poznámke za dôkazom alebo v dôkaze cez lomku: $l_1(F_1, a)/l_2(F_2, a)$ – buď kružnicu $l_1(F_1, a)$ alebo kružnicu $l_2(F_2, a)$. V konštrukcii je použitý geometrický útvar uvedený na prvom mieste.

2. Teoretické východiská ku konštrukcii elipsy

Definícia 2.1:

Elipsa ε je množina všetkých bodov M roviny, ktoré majú od dvoch daných pevných bodov F_1, F_2 tejto roviny konštantný súčet vzdialeností väčší než je vzdialenosť daných bodov: $|F_1F_2| < |F_1M| + |F_2M|$ (1)

Súvisiace pojmy: (Obr. 14)

ohniská – dané body F_1, F_2 (latinsky *focus* – ohnisko)

sprievodiče bodu M – úsečky F_1M, F_2M a ich dĺžka

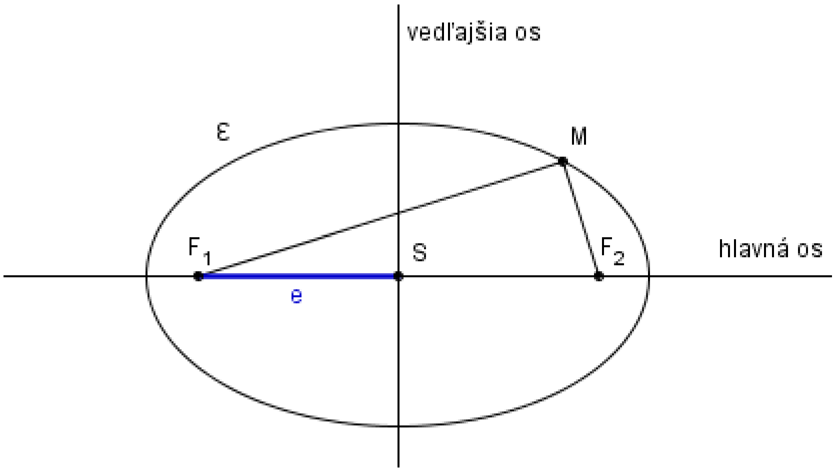
súčet dĺžok sprievodičov – súčet dĺžok úsečiek $|F_1M| + |F_2M| = 2a$, konštantný súčet vzdialeností

stred elipsy S – stred úsečky F_1F_2

lineárna excentricita – dĺžka úsečiek $|F_1S| = |F_2S| = e$

hlavná os elipsy – priamka F_1F_2

vedľajšia os elipsy – priamka kolmá na hlavnú os a prechádzajúca stredom S



Obr. 14.: Elipsa

Poznámka: Pri riešení konštrukčných úloh sa zameriame na zostavenie algoritmu konštrukcie. Teda zapíšeme vstupné údaje, kroky algoritmu a výstup.

Úloha 1: Bodová konštrukcia elipsy

Zostrojte body elipsy ε, ak sú dané ohniská F_1, F_2 a súčet dĺžok sprievodičov $|F_1M| + |F_2M| = |PQ| = 2a$. Riešte pre $|F_1F_2| = 4j$, $|PQ| = 5j$. (Obr. 15)

Riešenie: (animácie, bodová konštrukcia elipsy)

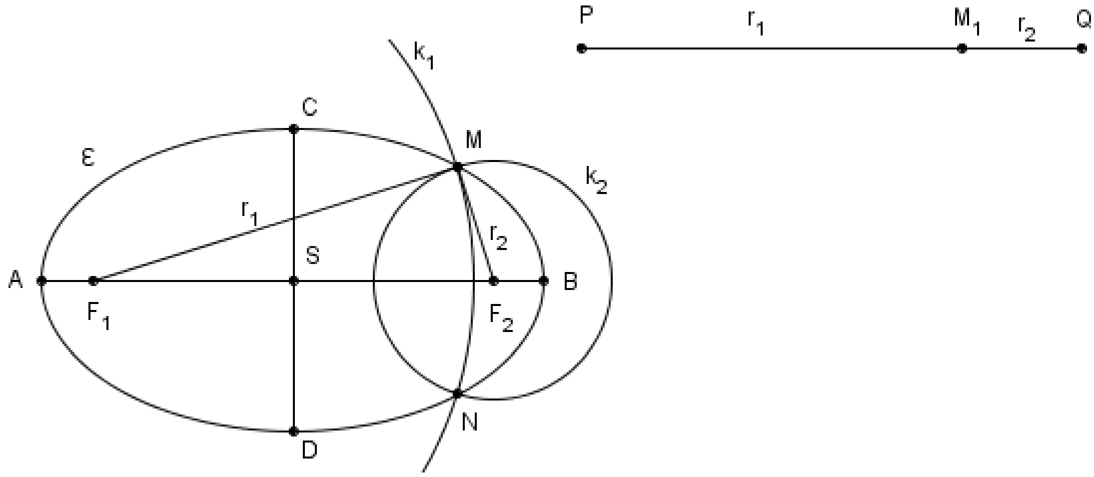
E1: Algoritmus konštrukcie bodov elipsy $\varepsilon\,(F_1, F_2, 2a)$:

Vstup: $|F_1F_2| = 4j$, $|F_1M| + |F_2M| = 5j$ spĺňajú podmienku (1) a teda elipsa existuje.

Kroky algoritmu:

1. Zvoľme ľubovoľný vnútorný bod M_1 úsečky PQ a označme $|PM_1| = r_1$, $|M_1Q| = r_2$. Teda $|PQ| = |PM_1| + |M_1Q| = r_1 + r_2 = 2a$.
2. Zostrojme kružnice $k_1(F_1, r_1)$, $k_2(F_2, r_2)$.
3. Určme priesečníky kružníc $k_1 \cap k_2 = \{M, N\}$.
4. Body M, N sú body elipsy ε, pretože vyhovujú podmienke: $|F_1M| + |F_2M| = |F_1N| + |F_2N| = r_1 + r_2 = 2a$.
5. Ďalšie body elipsy zostrojíme opakovaním krokov 1, 2, 3, 4.

Výstup: body elipsy ε



Obr. 15.: Bodová konštrukcia elipsy

Poznámka: Ak máme zostrojené body elipsy, môžeme na získanie ďalších jej bodov využiť stredovú súmernosť podľa stredu elipsy S alebo osové súmernosti podľa hlavnej a vedľajšej osi elipsy.

Súvisiace pojmy: (Obr. 16.b)

hlavné vrcholy A, B – priesečníky kružnice $v(S, \frac{|PQ|}{2} = a)$ s hlavnou osou

vedľajšie vrcholy C, D – priesečníky kružnice $l_1(F_1, a)$, resp. $l_2(F_2, a)$ s vedľajšou osou

hlavná polos – úsečka s dĺžkou $a = |SA| = |SB|$

vedľajšia polos – úsečka s dĺžkou $b = |SC| = |SD|$

hlavná os – priamka F_1F_2, ale aj úsečka AB

dĺžka hlavnej osi – dĺžka úsečky $|AB| = 2a$

vedľajšia os – priamka CD, ale aj úsečka CD

dĺžka vedľajšej osi – dĺžka úsečky $|CD| = 2b$

charakteristický trojuholník elipsy – trojuholník F_1SC, v ktorom platí $a^2 = e^2 + b^2$

Tiež možno vysloviť tvrdenie vyplývajúce z definície 1.

Veta 2.1:

Dĺžka hlavnej osi sa rovná dĺžke súčtu sprievodičov bodov elipsy ε:

$|AB| = |F_1M| + |F_2M| = 2a$.

Dôkaz: Vieme, že platí $|SF_1| = |SF_2|$ a $|SA| = |SB|$. (Obr. 16.b) Z toho vyplýva, že aj $|F_1A| = |F_2B|$ a $|F_2A| = |F_1B|$. Keďže body A, B sú bodmi elipsy, potom platí $|F_1A| + |F_2A| = 2a = |F_1B| + |F_2B|$ a teda aj rovnosť $|AB| = |F_1A| + |F_1B| = |F_2B| + |F_2A| = 2a$.

Úloha 2: Dané sú ohniská F_1, F_2 a bod M elipsy ε ($M \notin F_1F_2$). Zostrojte hlavné a vedľajšie vrcholy elipsy ε.

Riešenie: (Úlohy, Úloha 2)

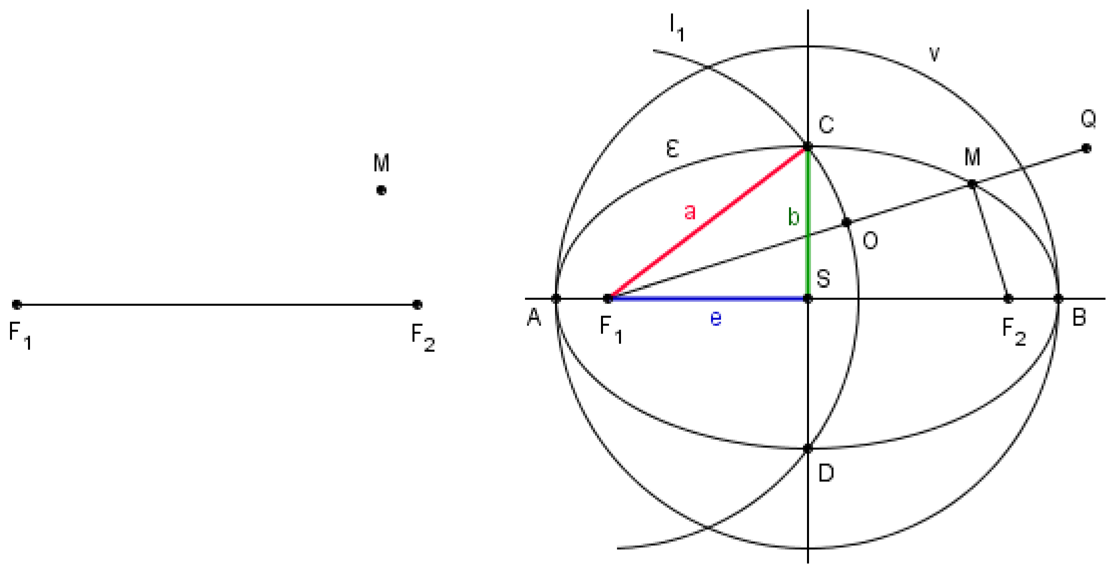
<u>Vstup:</u> ohniská F_1, F_2, bod $M \in \varepsilon$ (Obr. 16.a)

<u>Postup konštrukcie:</u> (Obr. 16.b)

1. Na polpriamke F_1M zostrojíme bod Q tak, že $|QM| = |F_2M|$. Pre dĺžku úsečky F_1Q platí: $|F_1Q| = |F_1M| + |MQ| = |F_1M| + |F_2M| = 2a$.
2. Zostrojíme kružnicu $v(S, a)$.
3. Priesečníky kružnice v s hlavnou osou sú hlavné vrcholy A, B elipsy ε.
4. Zostrojíme kružnicu $l_1(F_1, a)/l_2(F_2, a)$.
5. Priesečníky kružnice l_1 s vedľajšou osou sú vedľajšie vrcholy C, D elipsy ε.

<u>Výstup:</u> hlavné a vedľajšie vrcholy elipsy ε

a) b)



Obr. 16.: Konštrukcia hlavných a vedľajších vrcholov elipsy

Pri vykresľovaní elipsy pomocou rysovacích potrieb je výhodné v okolí hlavných a vedľajších vrcholov nahradiť elipsu segmentmi kružníc. Tieto kružnice nazývame oskulačné kružnice.

Veta 2.2:

Ak je elipsa určená dĺžkou hlavnej polosi a a dĺžkou vedľajšej polosi b, tak polomer oskulačnej kružnice v hlavnom vrchole je $\rho_A = \frac{b^2}{a}$ a vo vedľajšom vrchole $\rho_C = \frac{a^2}{b}$.

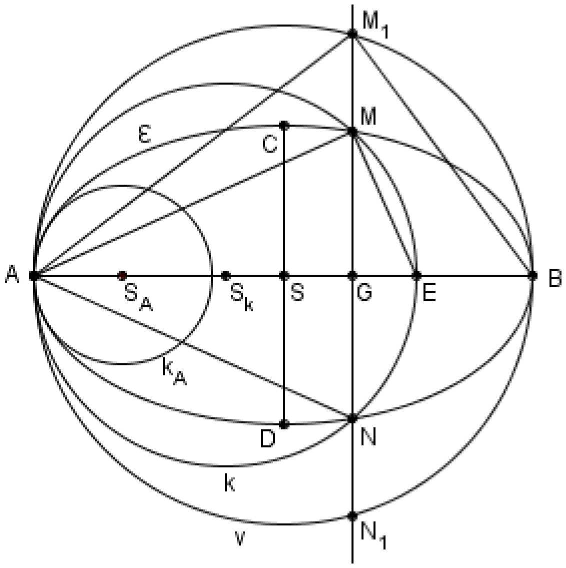
Dôkaz:

Najprv ukážeme, že pre polomer ρ_A oskulačnej kružnice v hlavnom vrchole platí: $\rho_A = \frac{b^2}{a}$.

Nech je elipsa ε určená hlavnou osou $|AB| = 2a$ a vedľajšou osou $|CD| = 2b$ a poznáme jeden jej bod M ($M \notin AB$, $M \notin CD$). (Obr. 17)

- Zostrojíme kružnicu $v(S, a)$.
- Zostrojíme bod elipsy N tak, že $MN \perp AB$.
- Zostrojíme kružnicu k opísanú trojuholníku AMN, ktorej stredom je bod S_k.
- Označíme body: $k \cap AB = \{E\}$, $MN \cap v = \{M_1, N_1\}$, $MN \cap AB = \{G\}$.
- Z pravouhlých trojuholníkov AM_1B, AME a Euklidovej vete o výške dostávame $|GM_1|^2 = |AG|.|BG|$, $|GM|^2 = |AG|.|EG|$ a určíme ich podiel: $\frac{|GM_1|^2}{|GM|^2} = \frac{|AG|.|BG|}{|AG|.|EG|} = \frac{|BG|}{|EG|}$. Pre body G, M, M_1 platí deliaci pomer $(GMM_1) = \frac{|GM_1|}{|GM|} = \frac{a}{b}$ (odôvodnenie: [5, str. 11]). Teraz môžeme zapísať $\frac{|GM_1|^2}{|GM|^2} = \frac{|BG|}{|EG|} = \frac{a^2}{b^2}$. (2)
- Postupným posúvaním stredu S_k kružnice k k vrcholu A dochádza k zmenšovaniu polomeru kružnice k, pričom bod A je stále spoločným bodom kružnice k a elipsy. Ak body M, N, G splynú s bodom A, tak dostaneme kružnicu k_A so stredom S_A a polomerom ρ_A. Takže ak $M = N = G = A$, tak $|BG| = |BA| = 2a$ a $|EG| = |EA| = 2\rho_A$ a teda môžeme vyjadriť ich podiel: $\frac{|BG|}{|EG|} = \frac{a}{\rho_A}$ (3)
- Zo vzťahov (2), (3) dostávame $\frac{a}{\rho_A} = \frac{a^2}{b^2}$. Takže $\rho_A = \frac{b^2}{a}$.

Poznámka: Polomer oskulačnej kružnice v hlavnom vrchole B je zhodný s polomerom ρ_A, t.j. $\rho_A = \rho_B$. Vyplýva to zo súmernosti elipsy podľa stredu S.



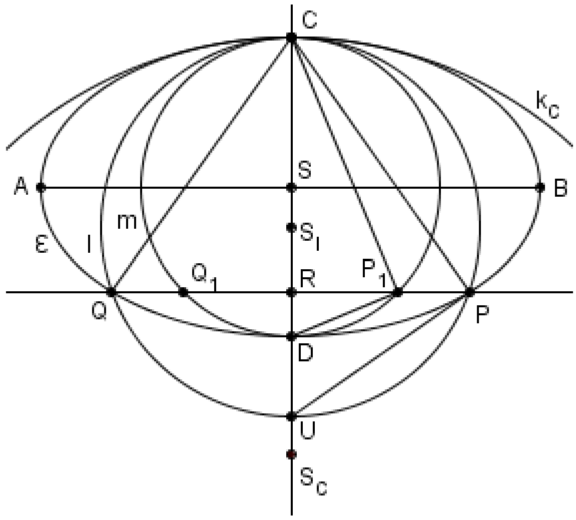
Obr. 17: Polomery oskulačných kružníc v hlavných vrcholoch elipsy

Teraz ukážeme, že pre polomer ρ_C oskulačnej kružnice vo vedľajšom vrchole platí: $\rho_C = \frac{a^2}{b}$.

Nech je elipsa ε určená hlavnou osou $|AB| = 2a$ a vedľajšou osou $|CD| = 2b$ a poznáme jeden jej bod P ($P \notin AB$, $P \notin CD$). (Obr. 18)

- Zostrojíme kružnicu $m(S, b)$.
- Zostrojíme bod elipsy Q tak, že $PQ \perp CD$.
- Zostrojíme kružnicu l opísanú trojuholníku CPQ, ktorej stredom je bod S_l.
- Označíme body: $l \cap CD = \{U\}$, $PQ \cap m = \{P_1, Q_1\}$, $PQ \cap CD = \{R\}$.
- Z pravouhlých trojuholníkov CP_1D, CPU a Euklidovej vete o výške dostávame vzťahy $|RP_1|^2 = |CR|.|DR|$, $|RP|^2 = |CR|.|UR|$ a určíme ich podiel: $\frac{|RP_1|^2}{|RP|^2} = \frac{|CR|.|DR|}{|CR|.|UR|} = \frac{|DR|}{|UR|}$. Pre body R, P, P_1 platí deliaci pomer $(RPP_1) = \frac{|RP_1|}{|RP|} = \frac{b}{a}$. Teraz môžeme zapísať $\frac{|RP|^2}{|RP|^2} = \frac{|BR|}{|UR|} = \frac{b^2}{a^2}$. (4)
- Postupným posúvaním stredu S_l kružnice l od vrcholu C dochádza k zväčšovaniu polomeru kružnice l, pričom bod C je stále spoločným bodom kružnice l a elipsy. Ak body P, Q, R splynú s bodom C, tak dostaneme kružnicu k_c so stredom S_C a polomerom ρ_C. Takže ak $P = Q = R = C$, tak $|DR| = |DC| = 2b$ a $|UR| = |UC| = 2\rho_C$ a teda môžeme vyjadriť ich podiel: $\frac{|DR|}{|UR|} = \frac{b}{\rho_C}$. (5)
- Zo vzťahov (4), (5) dostávame $\frac{b}{\rho_C} = \frac{b^2}{a^2}$. Takže $\rho_C = \frac{a^2}{b}$.

Poznámka: Polomer oskulačnej kružnice vo vedľajšom vrchole *D* je zhodný s polomerom ρ_C, t.j. $\rho_C = \rho_D$. Vyplýva to zo súmernosti elipsy podľa stredu *S*.



Obr. 18.: Polomery oskulačných kružníc vo vedľajších vrcholoch elipsy

Úloha 3: Zostrojte oskulačné kružnice vo vrcholoch elipsy, ak sú dané jej hlavné a vedľajšie vrcholy.

Riešenie: (Úlohy, Úloha 3)

<u>E2: Algoritmus konštrukcie stredov oskulačných kružníc:</u>

<u>Vstup:</u> hlavné vrcholy *A*, *B* a vedľajšie vrcholy *C*, *D* (Obr. 19.a)

<u>Kroky algoritmu:</u> (Obr. 19.b)

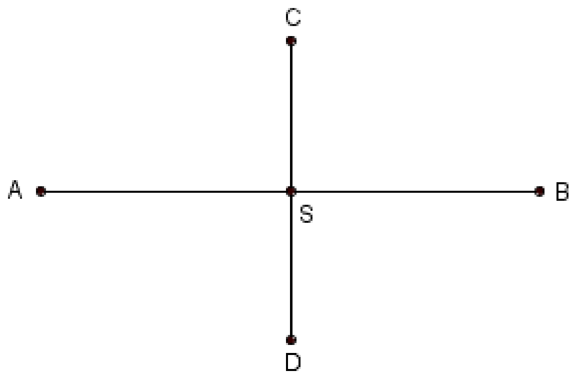
1. Doplníme trojuholník *ASC* na obdĺžnik *ASCE*.
2. Zostrojíme priamku *m* kolmú na priamku *AC* a prechádzajúcu bodom *E*.
3. Určíme body $m \cap AB = \{S_A\}$ a $m \cap CD = \{S_C\}$.
4. Bod S_A je stred oskulačnej kružnice k_A v hlavnom vrchole *A* s polomerom $\rho_A = \frac{b^2}{a}$.

   analogicky pre hlavný vrchol *B*: stred S_B, kružnica k_B, polomer $\rho_B = \rho_A$.
5. Bod S_C je stred oskulačnej kružnice vo vedľajšom vrchole *C* s polomerom $\rho_C = \frac{a^2}{b}$.

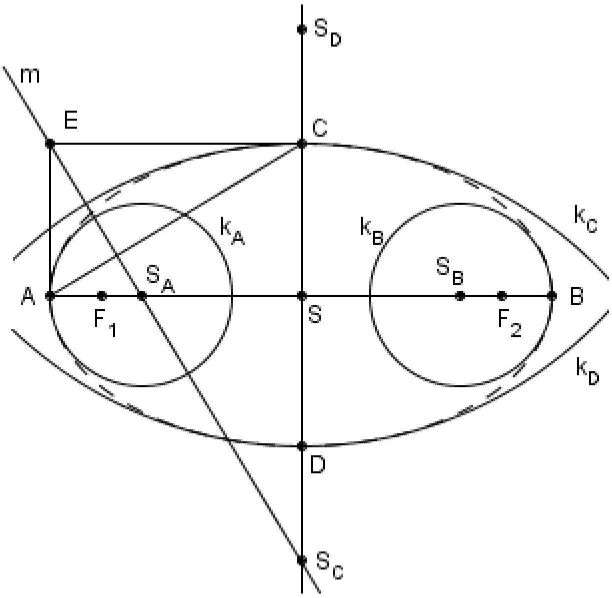
   analogicky pre vedľajší vrchol *D*: stred S_D, kružnica k_D, polomer $\rho_D = \rho_C$.

<u>Výstup:</u> stredy oskulačných kružníc vo vrcholoch elipsy

a)



b)



Obr. 19.: Oskulačné kružnice

Odôvodnenie konštrukcie:

Najprv ukážeme, že platí: $\rho_A = |AS_A| = \frac{b^2}{a}$.

- Pravouhlé trojuholníky AS_AE, SCA sú podobné a platí: $\frac{|AS_A|}{|AE|} = \frac{|SC|}{|SA|}$, kde $|AE| = b$, $|SC| = b$, $|SA| = a$ a teda $|AS_A| = \frac{b^2}{a}$.

Teraz ukážeme, že platí: $\rho_C = |CS_C| = \frac{a^2}{b}$.

- Pravouhlé trojuholníky CS_CE, SAC sú podobné a platí: $\frac{|CS_C|}{|EC|} = \frac{|SA|}{|SC|}$, kde $|EC| = a$, $|SA| = a$, $|SC| = b$ a teda $|CS_C| = \frac{a^2}{b}$.

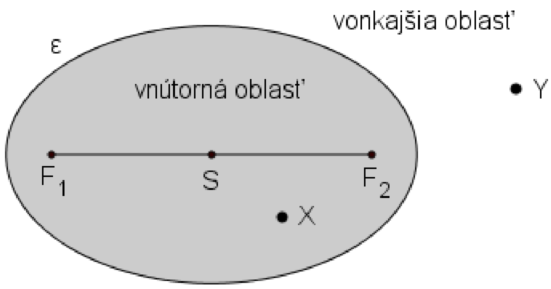
Ďalšie pojmy, s ktorými budeme pracovať súvisia s vlastnosťou, že elipsa je uzavretá rovinná krivka, ktorá rozdeľuje rovinu na dve oblasti – vnútornú a vonkajšiu. (Obr. 20)

Súvisiace pojmy: (Obr. 20)

vnútorný bod elipsy – bod vnútornej oblasti, platí $|F_1X| + |F_2X| < 2a$

vonkajší bod elipsy – bod vonkajšej oblasti, platí $|F_1Y| + |F_2Y| > 2a$

Ohniská elipsy F_1, F_2 aj stred S elipsy sú jej vnútorné body.



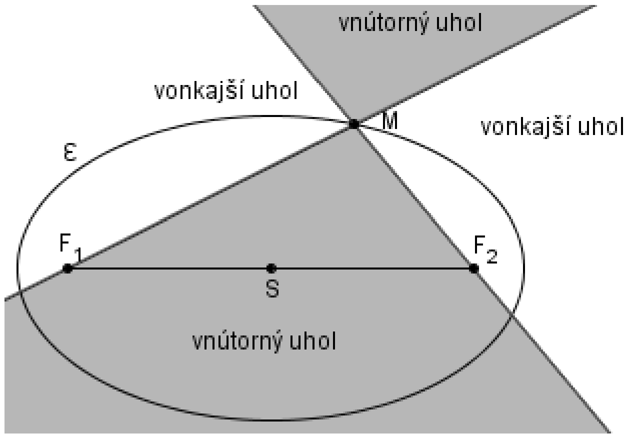
Obr. 20.: Vnútorná a vonkajšia oblasť elipsy

Sprievodiče bodu M vytvoria štyri uhly, pričom jeden z nich vždy obsahuje stred S elipsy. (Obr. 21)

Definícia 2.2:

Vnútorným uhlom sprievodičov bodu M vzhľadom na elipsu ε je uhol priamok F_1M, F_2M, ktorý obsahuje stred S elipsy a uhol k nemu vrcholový.

Vonkajším uhlom sprievodičov bodu M vzhľadom na elipsu ε je ľubovoľný z uhlov, ktorý je k vnútornému uhlu susedný. (Obr. 21)



Obr.21.: Vnútorné a vonkajšie uhly sprievodičov bodu M

Veta 2.3:

Priamka má s elipsou ε jednu z nasledujúcich polôh

a) priamka nemá s elipsou žiaden spoločný bod,

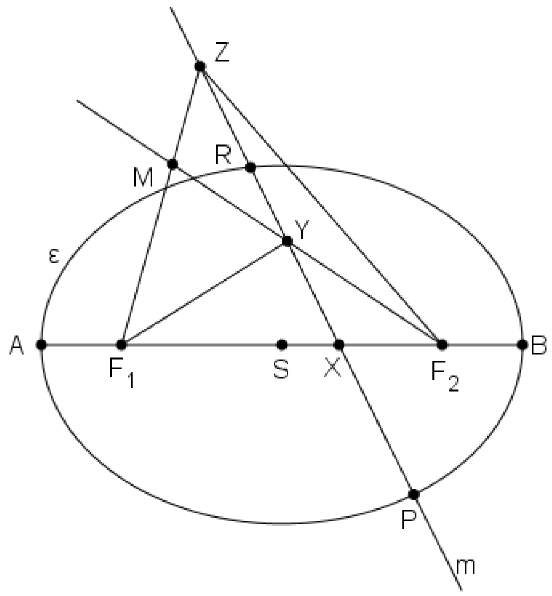
b) priamka má s elipsou práve jeden spoločný bod,

c) priamka má s elipsou dva spoločné body.

Dôkaz:

- Najkratšia spojnica bodov F_1, F_2 je úsečka F_1F_2.

a) Nech $m \cap F_1F_2 = \{X\}$, bod X je vnútorný bod úsečky F_1F_2. Vyšetríme aký najmenší súčet vzdialenostíod ohnísk F_1, F_2 môže mať bod X danej priamky m. (Obr. 22.)



Obr. 22: Vzájomná poloha priamky a elipsy, prípad a)

- Ak $m \cap F_1F_2 = \{X\}$ alebo $(X=F_1 \vee X=F_2)$, tak $|F_1X| + |F_2X| = |F_1F_2| < 2a$ (6)
- Pre každý ďalší bod $Y \in m$; $Y \neq X$ vznikne trojuholník F_1F_2Y, v ktorom z trojuholníkovej nerovnosti platí $|F_1Y| + |F_2Y| > |F_1F_2|$ (7)
- Ukážme, že pre každý ďalší bod priamky m je vzdialenosť od oboch ohnísk väčšia ako pre bod X. Nech bod $Z \in m$; $Z \neq X$, $Z \neq Y$, pre ktorý $|ZX| > |YX|$
- Zostrojíme bod $M = F_2Y \cap F_1Z$
- Z trojuholníkovej nerovnosti v trojuholníku F_2MZ platí:

$|MZ| + |F_2Z| > |F_2M|$, pripočítajme k obom stranám nerovnosti $|F_1M|$. Dostaneme $|MZ| + |F_2Z| + |F_1M| > |F_2M| + |F_1M|$. Vieme, že $|F_1M| + |MZ| = |F_1Z|$, teda

$$|F_1Z| + |F_2Z| > |F_2M| + |F_1M| \qquad (8)$$

- Z trojuholníkovej nerovnosti v trojuholníku F_1MZ platí:

$|F_1M| + |MY| > |F_1Y|$, pripočítam k obom stranám nerovnosti $|F_2Y|$. Dostaneme $|F_1M| + |MY| + |F_2Y| > |F_1Y| + |F_2Y|$, pričom vieme, že $|MY| + |F_2Y| = |F_2M|$. A teda:

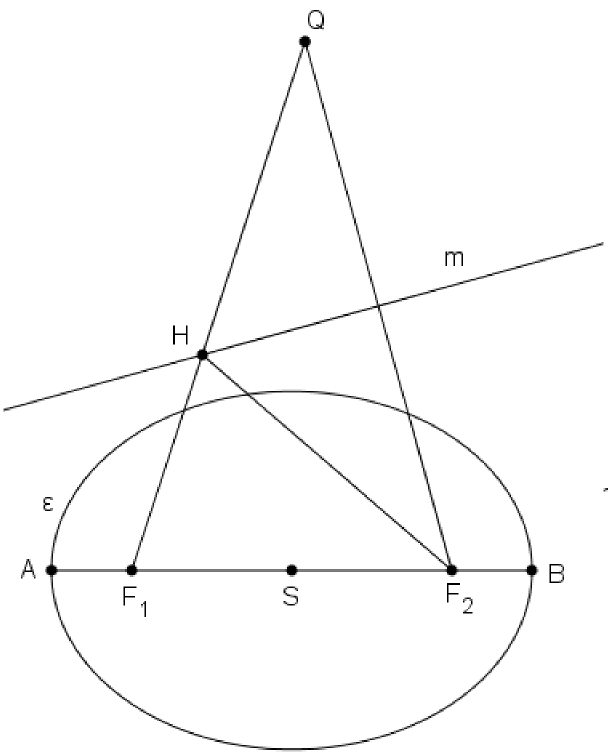
$$|F_1M| + |F_2M| > |F_1Y| + |F_2Y| \quad (9)$$

- Z nerovností (6),(7),(8) a (9) dostávame vzťah:
  $|F_1Z| + |F_2Z| > |F_2M| + |F_1M| > |F_1Y| + |F_2Y| > |F_1X| + |F_2X|$ z čoho vyplýva:
  $|F_1Z| + |F_2Z| > |F_1X| + |F_2X|$.
- Označme $Z_i \in m$, $Z_i \in$ polpriamky XY, $|Z_iX| > |YX|$, $i = 1,2,\ldots$. Pre body Z_i platí $|F_1Z_i| + |F_2Z_i| > |F_1X| + |F_2X|$.

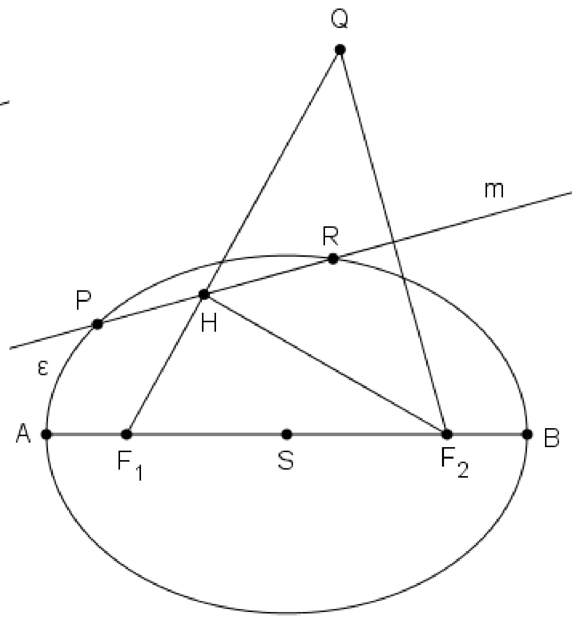
b) Nech $m \cap F_1F_2 = \emptyset$, t.j. priamka m nepretína úsečku F_1, F_2.

  - Hľadáme bod H, ktorý má od ohnísk F_1F_2 najmenší súčet vzdialeností: Zostrojíme bod Q súmerne združený podľa priamky m s ohniskom F_2. Potom bod $H = F_1Q \cap m$.
  - Nastať môžu tri prípady:
    1) $|F_1H| + |F_2H| = |F_1Q| > 2a$: Z predchádzajúceho vieme, že ostatné body priamky m majú súčet vzdialeností od ohnísk F_1, F_2 ešte väčší a teda priamky m nemá s elipsou ε žiaden spoločný bod. (Obr. 23.a))
    2) $|F_1H| + |F_2H| < 2a$: prípad a) (Obr. 23.b))
    3) $|F_1H| + |F_2H| = 2a$: bod H je v tomto prípade jediným bodom priamky m a zároveň bodom elipsy ε. (Obr. 23.c))

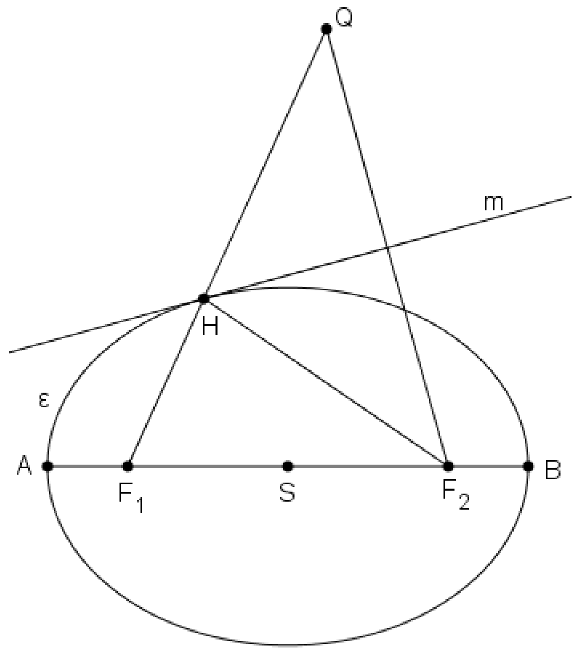
a)



b)



c)



Obr. 23.: Vzájomná poloha priamky a elipsy, prípad b)

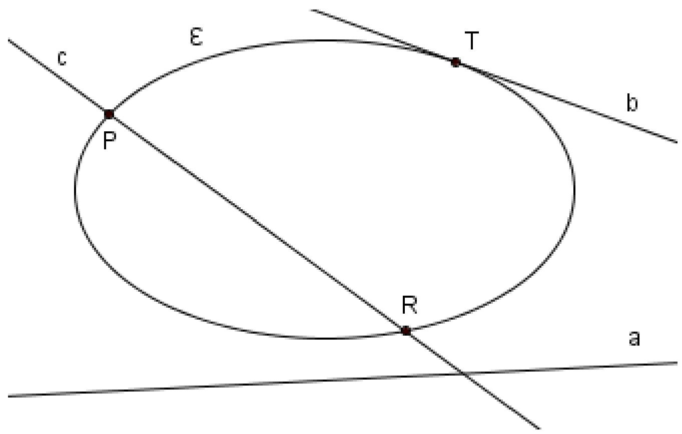
Súvisiace pojmy: (Obr. 23)

nesečnica – priamka, ktorá s elipsou nemá žiaden spoločný bod (na obr. 24. priamka *a*)

dotyčnica – priamka, ktorá má s elipsou práve jeden spoločný bod (na obr. 24. priamka *b*)

dotykový bod - spoločný bod elipsy a dotyčnice (na obr. 24. bod *T*)

sečnica – priamka, ktorá má s elipsou dva spoločné body (na obr. 24. priamka *c*, ktorá pretína elipsu v bodoch *P*, *R*)



Obr. 24.: Vzájomná poloha priamky a elipsy

Veta 2.4:

V každom bode elipsy ε existuje práve jedna dotyčnica elipsy, ktorá je osou vonkajších uhlov sprievodičov dotykového bodu.

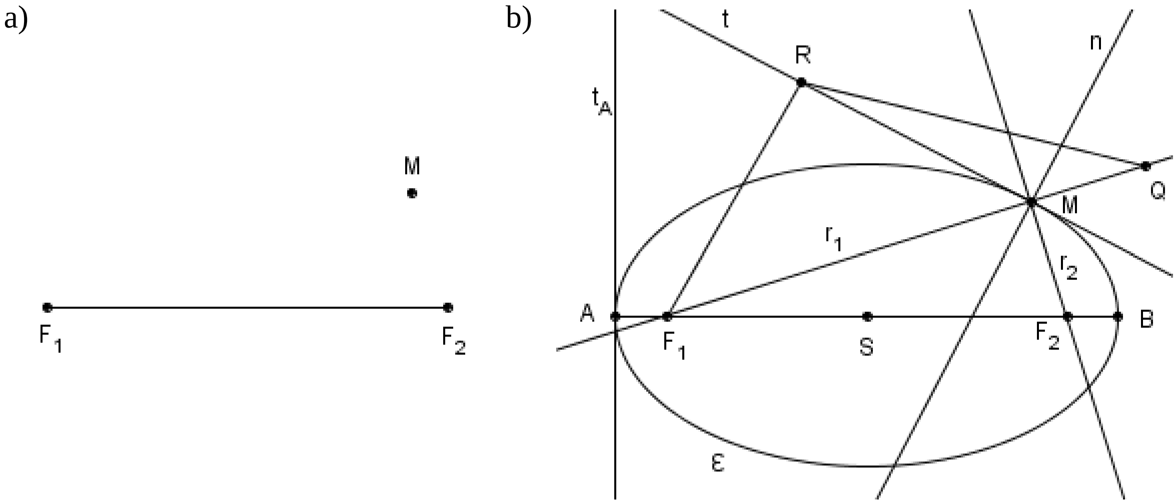
Dôkaz: Nech je elipsa ε určená ohniskami F_1, F_2 a jedným jej bodom M ($M \notin F_1F_2$).

existencia dotyčnice: dôkaz urobíme pomocou nasledujúcich krokov (Obr. 25)

- Zostrojíme os t vonkajšieho uhla sprievodičov bodu M.
- Zostrojíme bod Q, ktorý je súmerne združený s jedným z ohnísk, napr. F_2, podľa priamky t. Body F_1, M, Q sú kolineárne a pre dĺžku úsečky F_1Q platí: $|F_1Q| = |F_1M| + |MQ| = 2a$.
- Na priamke t zvoľme ľubovoľný bod $R \neq M$ a ukážeme, že nie je bodom elipsy. Body F_1, R, Q určujú trojuholník a z trojuholníkovej nerovnosti platí: $|F_1R|+|RQ|>|F_1Q|$ pričom $|F_1Q| = 2a$ a $|RQ| = |F_2R|$. Teda platí $|F_1R| + |F_2R| > 2a$, t.j. bod R nespĺňa podmienku (1) a nie je bodom elipsy.
- Záver: ukázali sme, že os t vonkajšieho uhla sprievodičov bodu M má s elipsou spoločný práve jeden bod a je dotyčnicou elipsy.

jednoznačnosť:

- Existuje práve jedna os konvexného uhla (pozri dôkaz [5, s. 30]).



Obr. 25.: Dotyčnica elipsy

Definícia 2.3:

<u>Vrcholová dotyčnica</u> je dotyčnica vo vrchole elipsy a je kolmá na hlavnú os elipsy. (na obr. 25. priamka t_A)

<u>Normála elipsy</u> je kolmica na dotyčnicu elipsy v jej dotykovom bode (na obr. 25. priamka n).

Veta 2.5:

Normála v bode elipsy rozpoľuje vnútorný uhol sprievodičov bodu, v ktorom je zostrojená.

Poznámka k dôkazu: Osi vnútorných a vonkajších uhlov sú na seba kolmé.

Z ohniskových vlastností elipsy sú najdôležitejšie dve vlastnosti, ktoré zapíšeme pomocou viet.

Veta 2.6:

Množina bodov súmerne združených s jedným ohniskom elipsy podľa všetkých jej dotyčníc je kružnica so stredom v druhom ohnisku tejto elipsy a polomerom $2a$.

Dôkaz: (Obr. 26.)

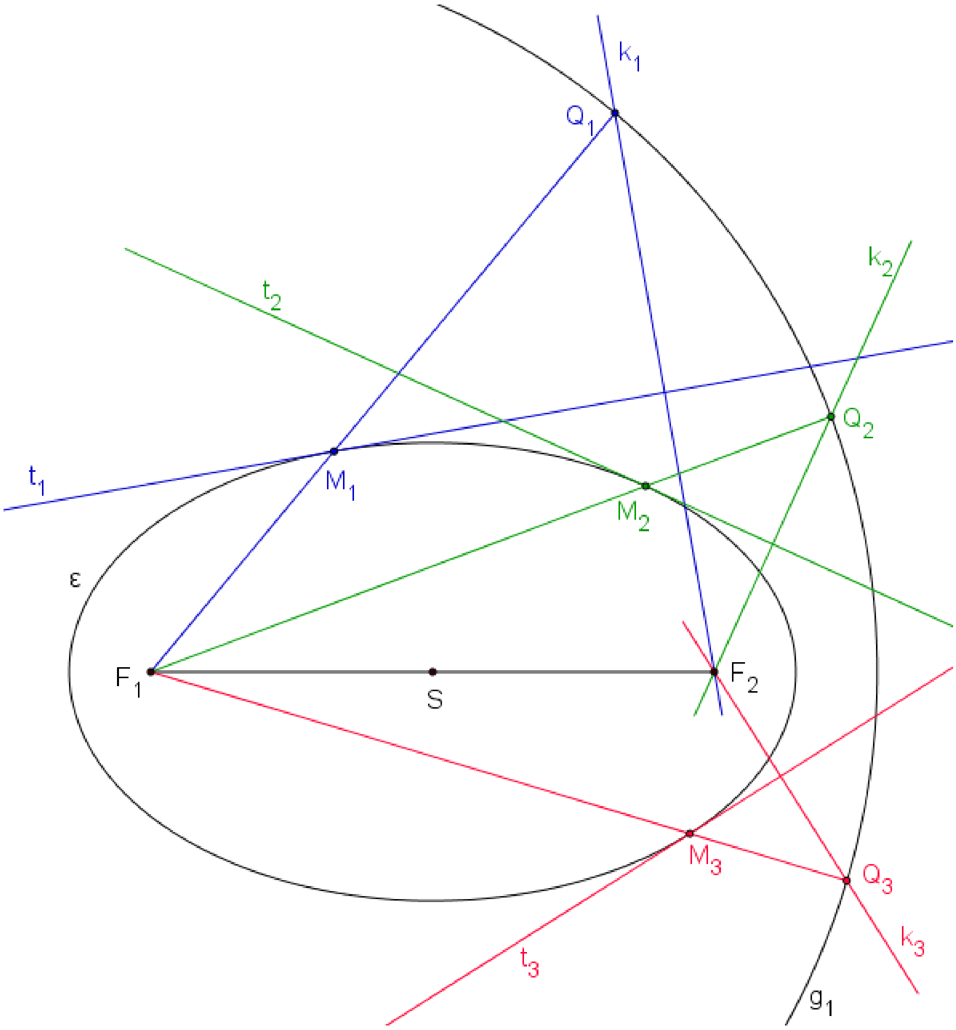
Nech elipsa ε je určená ohniskami F_1, F_2 a jedným jej bodom M ($M \notin F_1F_2$). Zostrojíme v bode M dotyčnicu t elipsy – je to os vonkajšieho uhla sprievodičov bodu M.

- Zostrojíme bod Q súmerne združený s ohniskom F_2 podľa dotyčnice t, pre ktorý platí: $|F_1Q| = 2a$.
- Na obr. 24. sú vyznačené ďalšie body Q_i priradené bodom M_i elipsy ε a dotyčnici t_i, ktoré sú súmerné s ohniskom F_2 podľa dotyčníc t_i, i = 1, 2, 3 a pre každý bod Q_i platí: $|F_1Q_i| = 2a$.
- Teda každý bod Q_i súmerne združený s ohniskom F_2 podľa dotyčnice t leží na kružnici $g_1(F_1, 2a)$.

Poznámka: Ak zostrojíme body Q_i ako body súmerne združené s ohniskom F_1 podľa dotyčníc t_i, budú ležať na kružnici $g_2(F_2, 2a)$.

V dôkaze je ďalej potrebné ukázať, že každý bod Q kružnice g_1 je súmerne združený s ohniskom F_2 podľa nejakej dotyčnice elipsy.

- Os t súmernosti úsečky F_2Q pretína úsečku F_1Q v bode M.
  - Platí: $|F_1Q|=2a$ a tiež $|F_1Q|=|F_1M|+|MQ|=|F_1M|+|F_2M|=2a$.
  - Bod M je bod elipsy a priamka t dotyčnicou.



Obr. 26.: Určujúca kružnica elipsy $g_1(F_1, 2a)$

Definícia 2.4:

Kružnicu $g_1(F_1, 2a)$ / $g_2(F_2, 2a)$ nazývame <u>určujúca (riadiaca) kružnica elipsy.</u> (Obr. 26.)

(Animácie, Určujúca kružnica)

Veta 2.7:

Množina piat kolmíc z ľubovoľného ohniska elipsy na všetky jej dotyčnice je kružnica $v(S, a)$ so stredom v strede elipsy a polomerom a.

Dôkaz: (Obr. 27.)

Nech elipsa ε je určená ohniskami F_1, F_2 a jedným jej bodom M ($M \notin F_1F_2$). Dokážeme, že bod P (päta kolmice na dotyčnicu) je bod kružnice $v(S, a)$.

- Najskôr zostrojíme v bode M dotyčnicu t elipsy – je to os vonkajšieho uhla sprievodičov bodu M.
- Zostrojíme bod Q súmerne združený s ohniskom F_2 podľa dotyčnice t.
- Zostrojíme priesečník $\{P\}=F_2Q \cap t$.
- Dôkaz urobíme pre bod P:

a) Nech bod $M \neq A, B$, potom body F_1, F_2, Q určujú trojuholník. Body S, P ležia na jeho strednej priečke a teda $|SP| = \frac{1}{2}|F_1Q| = a$.

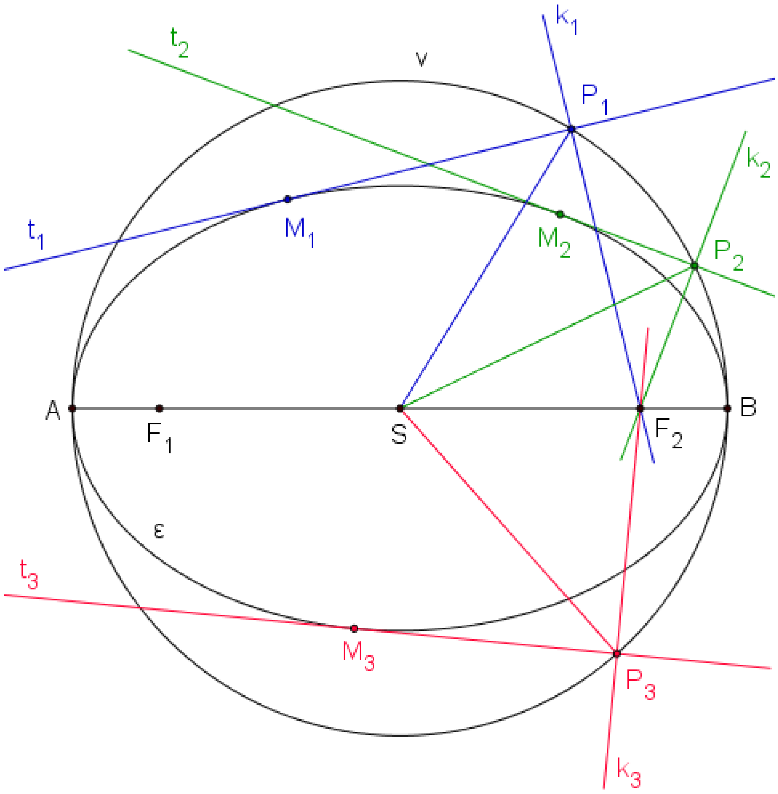
b) Ak $M = A/M = B$, tak bod $P = A/P = B$ a $|SP| = |SA| = |SB|$.

- Bod P je bodom kružnice $v(S, a)$.
- Na obr. 25. sú vyznačené body P_i priradené bodu M_i elipsy ε a dotyčnici t_i, ktoré sú pätami kolmíc k_i z ohniska F_2 na dotyčnice t_i, $i = 1, 2, 3$. Body P_i sú bodmi kružnice $v(S, a)$.

Poznámka: analogicky by sme postupovali aj pre ohnisko F_1.

obrátene:

- Nech P je bodom kružnice $v(S, a)$.
- Zostrojíme bod Q tak, že bod P je stred úsečky F_2Q.
- Bod Q leží aj na určujúcej kružnici $g_1(F_1, 2a)$ a os t úsečky F_2Q je dotyčnicou elipsy.
- Bod P je teda pätou kolmice zostrojenej z ohniska F_2 na dotyčnicu t elipsy.



Obr. 27.: Vrcholová kružnica elipsy v(S, a)

Definícia 2.5:

Kružnicu $v(S, a)$ nazývame vrcholová kružnica elipsy . (Obr. 27.)

(Animácie, Vrcholová kružnica)

3. Zbierka riešených príkladov

Vlastnosti elipsy opísané v prvej kapitole využijeme v príkladoch na konštrukciu elipsy zo zadaných prvkov. Teda budeme riešiť konštrukčné úlohy. Každá konštrukčná úloha pozostáva z krokov:

1. rozbor,
2. konštrukcia,
3. dôkaz,
4. diskusia.

V tejto práci uvedieme krok 2. konštrukcia a rozbor zapíšeme pri jednotlivých krokoch konštrukcie v hranatých zátvorkách t.j. [ ]. Taktiež nebudeme robiť dôkaz, že zostrojená krivka je elipsa, ale v diskusii rozoberieme počet riešení, ktoré závisia od vzájomnej polohy jednotlivých vstupných údajov, pričom vstupné dáta sú zvolené tak, že riešenie vždy existuje. Ak existujú dve riešenia, tak ich rozlíšime rôznymi farbami.

V nasledujúcich príkladoch pod zadaním "zostrojte elipsu" rozumieme určiť prvky elipsy, pomocou ktorých vieme elipsu vykresliť, napr. pomocou oskulačných kružníc. Postup konštrukcie končí vtedy, ak poznáme ohniská elipsy F_1, F_2 a aspoň jeden jej bod. Potom použitím konštrukcie z úlohy 2 vieme zostrojiť hlavné a vedľajšie vrcholy elipsy a použitím algoritmu konštrukcie stredov oskulačných kružníc elipsu približne vykresliť.

Podľa vstupných údajov a podľa toho, čo je výsledkom konštrukcie sú príklady rozdelené do štyroch skupín:

1. Konštrukcia elipsy pomocou charakteristického trojuholníka.
2. Konštrukcia elipsy, ak poznáme hlavnú os, resp. vedľajšiu os, resp. excentricitu a jeden bod elipsy.
3. Konštrukcia elipsy, ak je daná dotyčnica elipsy t.
4. Konštrukcia dotyčnice elipsy.

3.1. Konštrukcia elipsy pomocou charakteristického trojuholníka.

Príklad 1.: Zostrojte elipsu, ak excentricita elipsy je daná úsečkou $|EF|$ a súčet dĺžok hlavnej a vedľajšej polosi je určený dĺžkou úsečky $|MN|$. ($|MN| > |EF| = a + b > e$)

Riešenie: (Zbierka riešených príkladov, príklad 1)

<u>Vstup</u>: $|EF| = e$, $|MN| = a + b$ (Obr. 28.a)

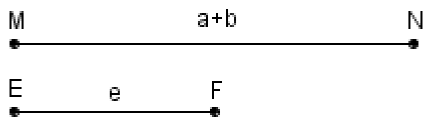
<u>Postup konštrukcie</u>: (Obr. 28.b)

1. Zostrojíme úsečku F_1S tak, že platí $|F_1S| = e$.
2. Zostrojíme priamku m kolmú na priamku F_1S prechádzajúcu bodom S.
3. Na priamke m zostrojíme bod U pričom $|SU| = a + b$.
4. Zostrojíme os o úsečky F_1U.
5. Vyznačíme $SU \cap o = \{C\}$ [pravouhlý trojuholník F_1UC je rovnoramenný (platí $|F_1C| = |CU| = a$), teda os o prepony tohto trojuholníka prechádza protiľahlým vrcholom C].
6. Bod F_2 leží na priamke F_1S a $(F_1F_2S) = -1$.

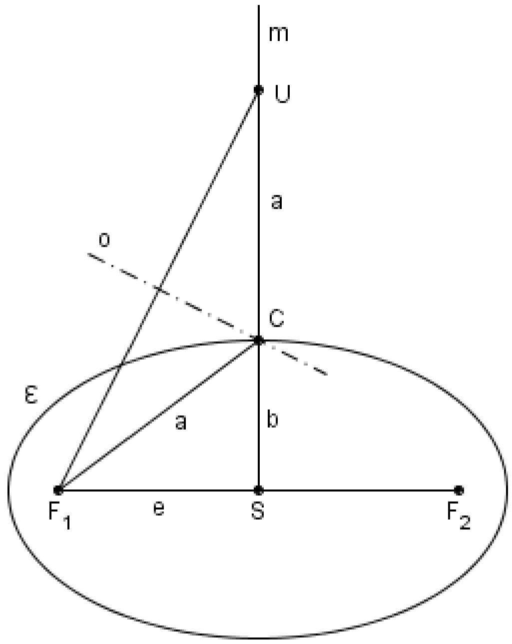
<u>Výstup</u>: $\varepsilon\,(F_1, F_2, C)$

<u>Diskusia</u>: Úloha má práve jedno riešenie.

a)



b)



Obr. 28.: Riešenie príkladu 1

Príklad 2.: Zostrojte elipsu, ak dĺžka hlavnej osi je daná úsečkou $|KL|$ a rozdiel dĺžok vedľajšej polosi a excentricity je určený dĺžkou úsečky $|MN|$.

Riešenie: (Zbierka riešených príkladov, príklad 2)

<u>Vstup</u>: $|KL| = a$, $|MN| = b - e$ $(b \neq e)$ (Obr. 29.a)

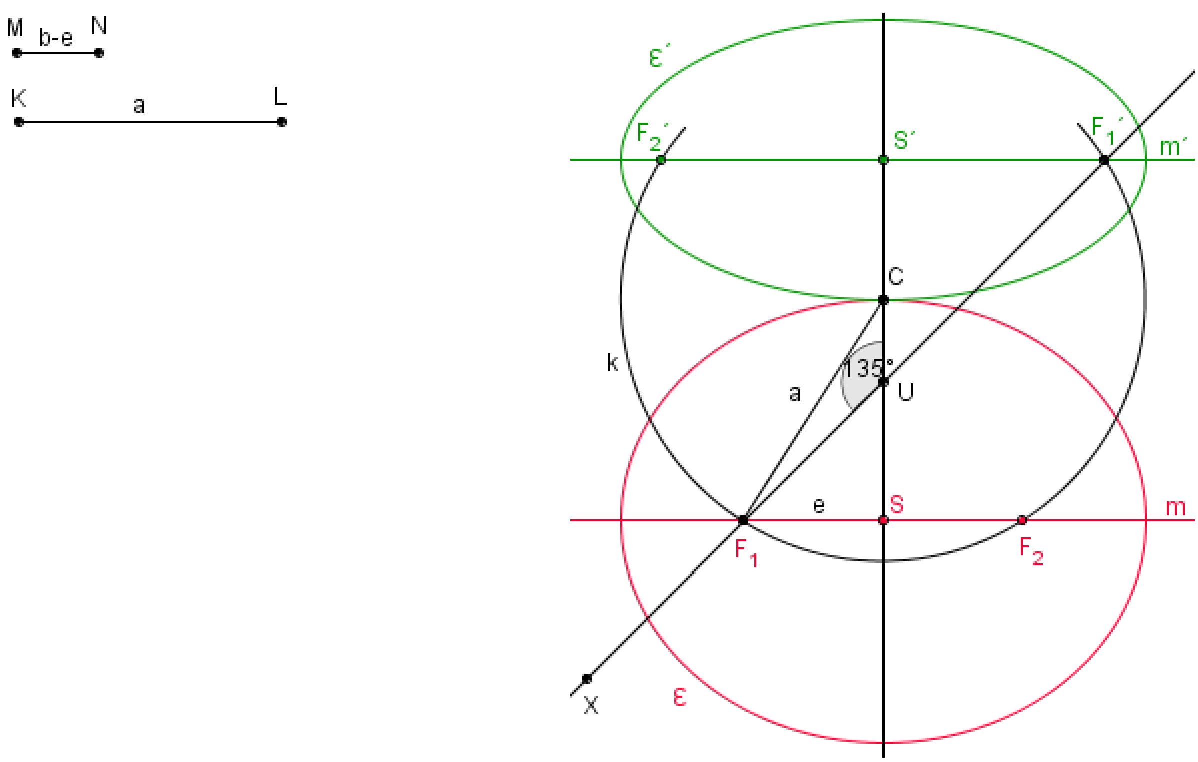
<u>Postup konštrukcie</u>: (Obr. 29.b)

1. Zostrojíme úsečku CU tak, že $|CU| = b - e$.
2. Zostrojíme uhol $|CUX| = 135°$.
3. Zostrojíme kružnicu $k(C, a)$.
4. Vyznačíme $k \cap UX = \{F_1, F_1'\}$.
5. Zostrojíme priamku m/m' kolmú na priamku CU prechádzajúcu bodom F_1/F_1'.
6. Vyznačíme $m \cap CU = \{S\}/m' \cap CU = \{S'\}$ [pravouhlý trojuholník USF_1 je rovnoramenný (platí: $|SF_1| = |SU| = e$), teda ostatné jeho dva uhly majú veľkosť 45° a k nim vonkajšie uhly majú veľkosť 135°; ostatné kroky vyplývajú z vlastností charakteristického trojuholníka elipsy].
7. Bod F_2 leží na priamke F_1S a $(F_1F_2S) = -1$.

<u>Výstup</u>: $b > e$: $\varepsilon(F_1, F_2, C)$, $b < e$: $\varepsilon'(F_1', F_2', C)$

<u>Diskusia</u>: Úloha má práve dve riešenia.

a) b)



Obr. 29.: Riešenie príkladu 2.

3.2. Konštrukcia elipsy, ak poznáme hlavnú os, resp.vedľajšiu os, resp. excentricitu a jeden bod elipsy.

Príklad 3.: Zostrojte elipsu, ak je daný hlavný vrchol A, vedľajší vrchol C a dĺžka hlavnej polosi je určená dĺžkou úsečky $|KL|$, ($|AC| > |KL| = a$).

Riešenie: (Zbierka riešených príkladov, príklad 3)

Vstup: hlavný vrchol A, vedľajší vrchol C, $|KL| = a$ (Obr. 30.a)

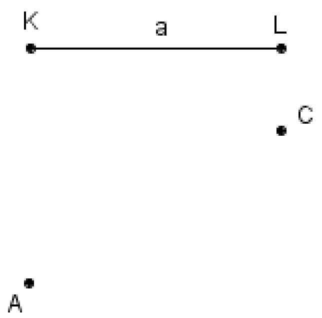
Postup konštrukcie: (Obr. 30.b)

1. Zostrojíme Talesovu kružnicu τ nad úsečkou AC [trojuholník ACS je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole S].
2. Zostrojíme kružnicu $k(A, a)$ [$|AS| = a$].
3. Vyznačíme $\tau \cap k = \{S, S'\}$.
4. Hlavný vrchol B/B' leží na priamke AS/AS' a $(ABS) = -1/(AB'S') = -1$.
5. Vedľajší vrchol D/D' leží na priamke CS/CS' a $(CDS) = -1/(CD'S') = -1$.

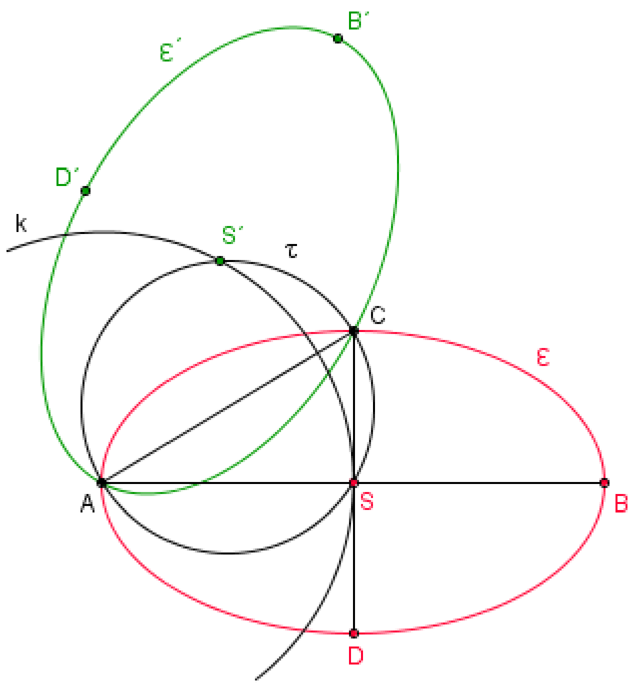
Výstup: $\varepsilon\,(A, B, C, D)$, $\varepsilon'\,(A, B, C', D')$

Diskusia: Úloha má vždy dve riešenia, ak $|AC| > a$.

a)



b)



Obr. 30.: Riešenie príkladu 3

Príklad 4.: Zostrojte elipsu ε, ktorá je určená ohniskom F_1, vedľajším vrcholom C a jedným jej bodom M ($M \notin F_1C$).

Riešenie: (Zbierka riešených príkladov, príklad 4)

Vstup: ohnisko F_1, vedľajší vrchol C, $M \in \varepsilon$ (Obr. 31.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 31.b)

1. Zostrojíme kružnicu $k(C, a)$ [$|CF_1| = |CF_2| = a$].
2. Na polpriamke F_1M zostrojíme bod Q tak, že $|F_1Q| = 2a = 2|F_1C|$.
3. Zostrojíme kružnicu $l(M, |MQ|)$ [$|F_1M| + |MF_2| = |F_1M| + |MQ| = 2a$].
4. Vyznačíme $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$.

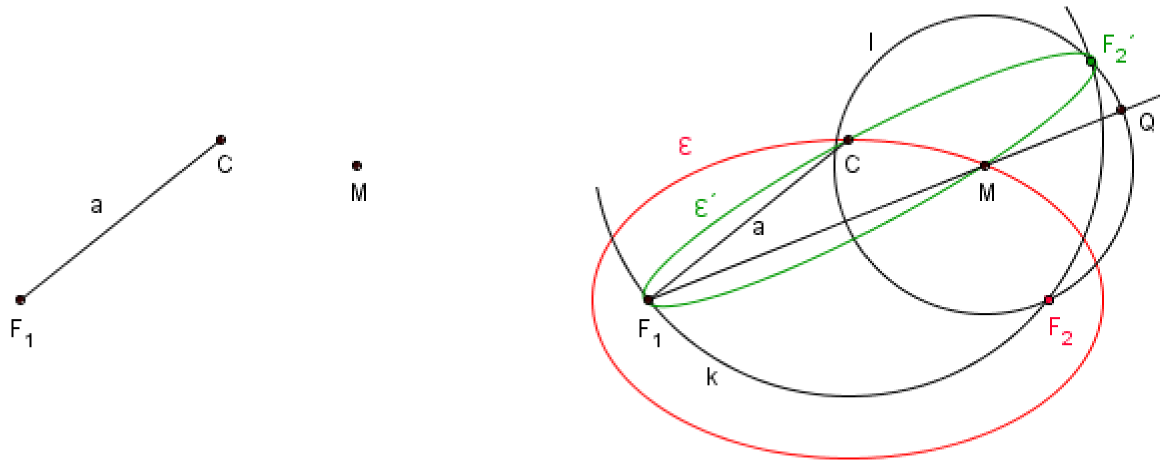
Výstup: elipsa ε (F_1, F_2, M), ε' (F_1, F_2', M)

Diskusia:

Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc k, l:

- $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$, tak úloha má dve riešenia (Obr. 31.b) ε (F_1, F_2, M), ε' (F_1, F_2', M),
- $k \cap l = \{F_2\}$, tak úloha má jedno riešenie,
- $k \cap l = \emptyset$, tak úloha nemá riešenie.

a) b)



Obr. 31.: Riešenie príkladu 4

Príklad 5.: Zostrojte elipsu ε, ak je dané ohnisko F_1, jej dva body M, N (body F_1, M, N sú nekolineárne) a dĺžka hlavnej polosi je určená dĺžkou úsečky KL.

Riešenie: (Zbierka riešených príkladov, príklad 5)

Vstup: ohnisko F_1, dĺžka hlavnej polosi $a = |KL|$, $M, N \in \varepsilon$ (Obr. 32.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 32.b)

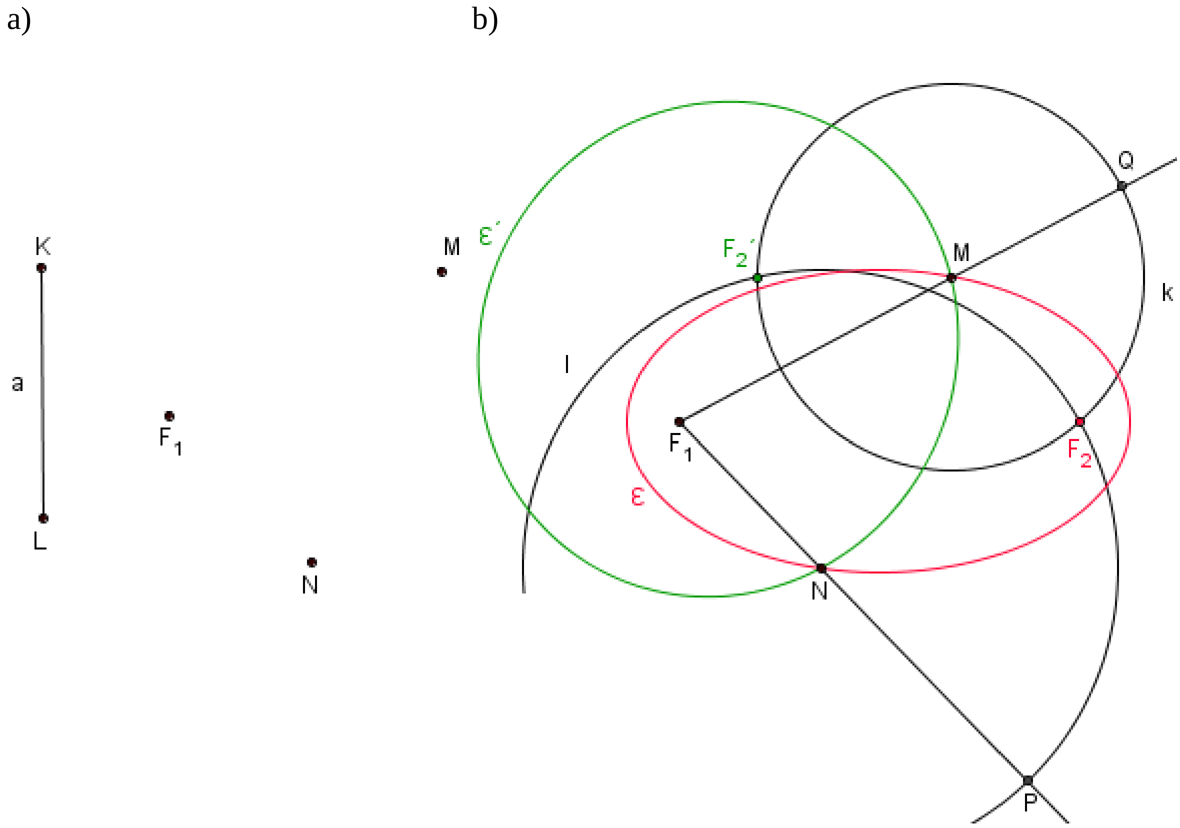
1. Na polpriamke F_1M zostrojíme bod Q, pričom $|F_1Q| = 2a = 2|KL|$.
2. Na polpriamke F_1N zostrojíme bod P, pričom $|F_1P| = 2a = 2|KL|$.
3. Zostrojíme kružnicu $k(M, |MQ|)$ [$|F_1M| + |MF_2| = |F_1M| + |MQ| = 2a$, takže $|MF_2| = |MQ|$].
4. Zostrojíme kružnicu $l(N, |NP|)$ [$|F_1N| + |NF_2| = |F_1N| + |NP| = 2a$, takže $|NF_2| = |NP|$].
5. Vyznačíme $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$.

Výstup: elipsa ε (F_1, F_2, M), ε' (F_1, F_2', M)

Diskusia:

Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc k, l:

- $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$, tak úloha má dve riešenia (Obr. 32.b) ε (F_1, F_2, M), ε' (F_1, F_2', M),
- $k \cap l = \{F_2\}$, tak úloha má jedno riešenie,
- $k \cap l = \emptyset$, tak úloha nemá riešenie.



Obr. 32.: Riešenie príkladu 5

Príklad 6.: Zostrojte elipsu ε, ak je dané ohnisko F_1, vedľajší vrchol elipsy C a excentricita elipsy je určená dĺžkou úsečky EF.

Riešenie: (Zbierka riešených príkladov, príklad 6)

<u>Vstup:</u> ohnisko F_1, vedľajší vrchol C, $e = |EF|$ (Obr. 33.a)

<u>Postup konštrukcie:</u> (Obr. 33.b)

1. Zostrojíme kružnicu $k(C, |F_1C| = a)$ [$|F_1C| = |F_2C| = a$].
2. Zostrojíme kružnicu $l(F_1, 2e)$ [$|F_1F_2| = 2e$].
3. Vyznačíme $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$.

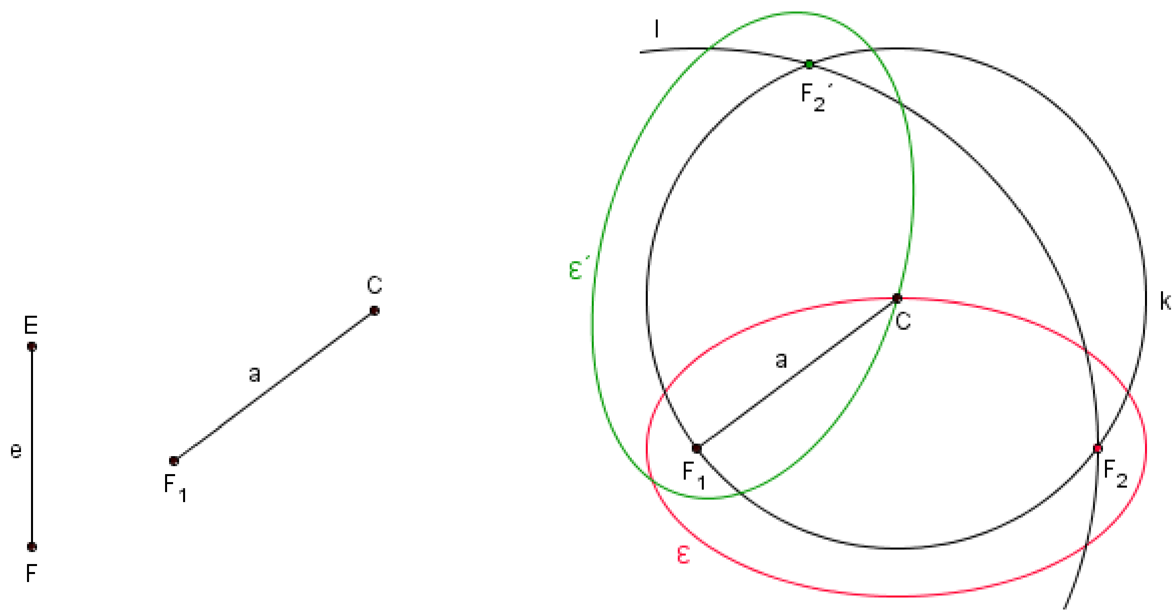
<u>Výstup:</u> elipsa ε (F_1, F_2, C), ε' (F_1, F_2', C)

<u>Diskusia:</u>

Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc k, l:

- $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$, tak úloha má dve riešenia (Obr. 33.b) ε (F_1, F_2, C), ε' (F_1, F_2', C),
- $k \cap l = \{F_2\}$, tak úloha má jedno riešenie,
- $k \cap l = \emptyset$, tak úloha nemá riešenie.

a) b)



Obr. 33.: Riešenie príkladu 6

Príklad 7.: Zostrojte elipsu ε, ak je dané ohnisko F_1, vedľajší vrchol C a dĺžka vedľajšej polosi je určená úsečkou PQ. ($|F_1C| > |PQ| = a > b$)

Riešenie: (Zbierka riešených príkladov, príklad 7)

Vstup: ohnisko F_1, vedľajší vrchol C, $b = |PQ|$ (Obr. 34.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 34.b)

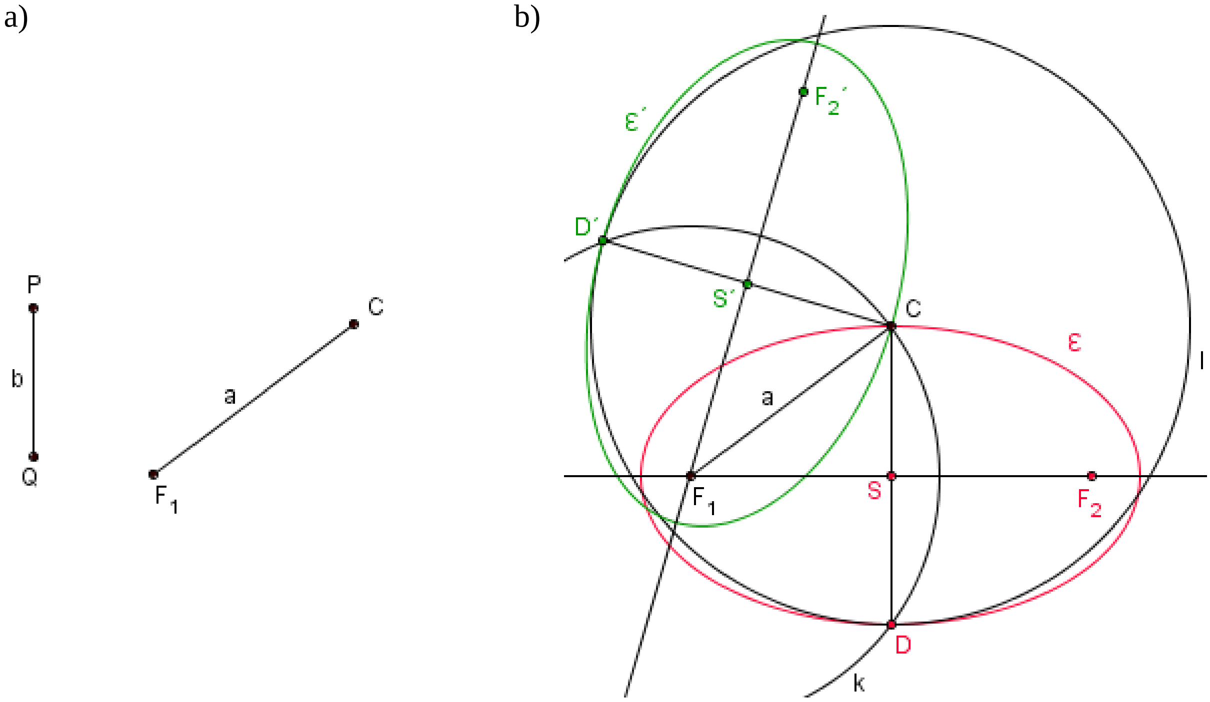
1. Zostrojíme kružnicu $k(F_1, |F_1C| = a)$ $[|F_1C| = |F_1D| = a]$.
2. Zostrojíme kružnicu $l(C, 2b)$ $[|CD| = 2b]$.
3. Vyznačíme $k \cap l = \{D, D'\}$.
4. Zostrojíme stred S/S' úsečky CD/CD', ktorý je aj stred elipsy.
5. Na priamke F_1S/F_1S' zostrojíme ohnisko F_2/F_2' tak, aby S/S' bol stredom úsečky F_1F_2/F_1F_2'.

Výstup: elipsa ε (F_1, F_2, C), ε' (F_1, F_2', C)

Diskusia:

Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc k, l:

- $k \cap l = \{D, D'\}$, tak úloha má dve riešenia (Obr. 34.b) ε (F_1, F_2, C), ε' (F_1, F_2', C),
- $k \cap l = \{D\}$, tak úloha má jedno riešenie,
- $k \cap l = \emptyset$, tak úloha nemá riešenie.



Obr. 34.: Riešenie príkladu 7

Príklad 8.: Zostrojte elipsu ε, ak je dané ohnisko F_1, jeden jej bod M, dĺžka hlavnej polosi je určená úsečkou KL a excentricita elipsy je určená úsečkou EF. ($|KL| > |EF| = a > e$)

Riešenie: (Zbierka riešených príkladov, príklad 8)

Vstup: ohnisko F_1, $M \in \varepsilon$, $a = |KL|$, $e = |EF|$ (Obr. 35.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 35.b)

1. Na polpriamke F_1M zostrojíme bod Q, pričom $|F_1Q| = 2a$.
2. Zostrojíme kružnicu $k(M, |MQ|)$ $[|F_1M| + |MF_2| = |F_1M| + |MQ| = 2a$, takže $|MF_2| = |MQ|$].
3. Zostrojíme kružnicu $l(F_1, 2e)$ $[|F_1F_2| = 2e]$.
4. Vyznačíme body $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$.

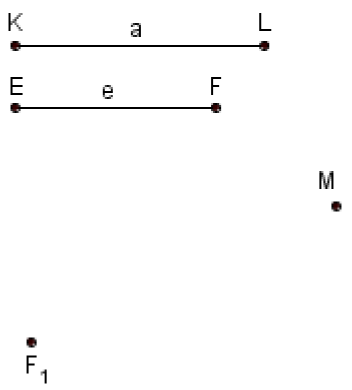
Výstup: elipsa ε (F_1, F_2, M), ε' (F_1, F_2', M)

Diskusia:

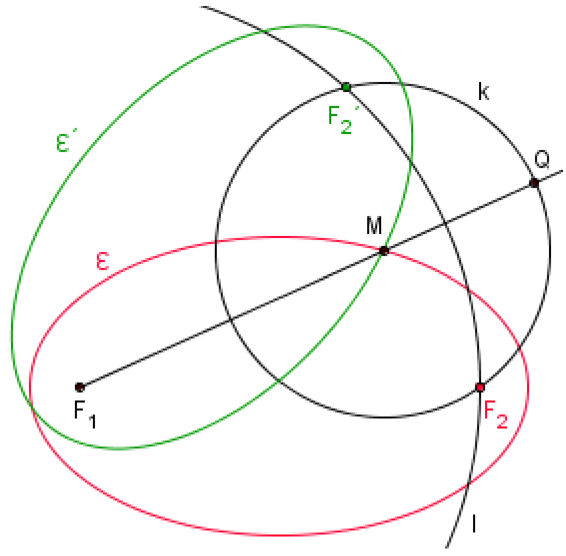
Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc k, l:

- $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$, tak úloha má dve riešenia (Obr. 35.b) ε (F_1, F_2, M), ε' (F_1, F_2', M),
- $k \cap l = \{F_2\}$, tak úloha má jedno riešenie,
- $k \cap l = \emptyset$, tak úloha nemá riešenie.

a)



b)



Obr. 35.: Riešenie príkladu 8

Príklad 9.: Zostrojte elipsu ε, ak je dané ohnisko F_1, jeden jej bod M (nie vrchol), hlavná os elipsy patrí do osnovy priamky s a dĺžka hlavnej polosi je určená úsečkou KL.

Riešenie: (Zbierka riešených príkladov, príklad 9)

Vstup: ohnisko F_1, $M \in \varepsilon$, priamka s, $a = |KL|$ (Obr. 36.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 36.b)

1. Zostrojíme priamku o rovnobežnú s priamkou s prechádzajúcu ohniskom F_1.
2. Na polpriamke F_1M zostrojíme bod Q tak, že $|F_1Q| = 2a$.
3. Zostrojíme kružnicu $k(M, |MQ|)$ $[|F_1M| + |MF_2| = |F_1M| + |MQ| = 2a$, takže $|MF_2| = |MQ|$].
4. Vyznačíme bod $o \cap k = \{F_2, F_2'\}$.

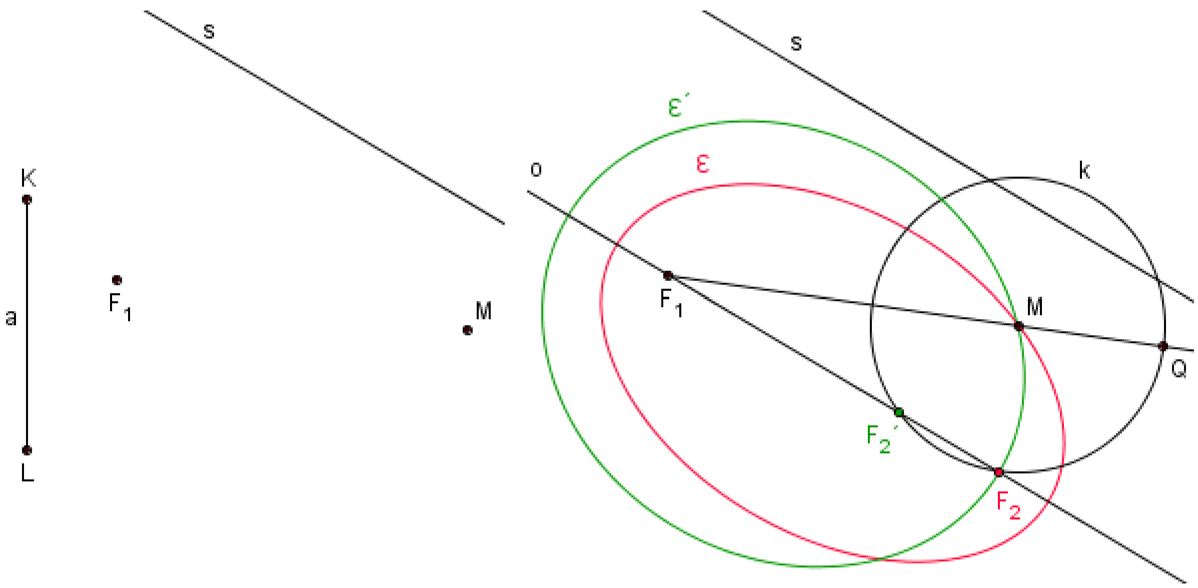
Výstup: elipsa ε (F_1, F_2, M), ε' (F_1, F_2', M)

Diskusia:

Počet riešení závisí od vzájomnej polohy osi o a kružnice k:

- $o \cap k = \{F_2, F_2'\}$, tak úloha má dve riešenia (Obr. 36.b) ε (F_1, F_2, M), ε' (F_1, F_2', M),
- $o \cap k = \{F_2\}$, tak úloha má jedno riešenie,
- $o \cap k = \emptyset$, tak úloha nemá riešenie.

a) b)



Obr. 36.: Riešenie príkladu 9

3.3. Konštrukcia elipsy, ak je daná dotyčnica elipsy *t*.

Príklad 10.: Zostrojte elipsu ak je dané ohnisko F_1, dotyčnica t s dotykovým bodom T a dĺžka hlavnej polosi je určená dĺžkou úsečky $|KL|$.

Riešenie: (Zbierka riešených príkladov, príklad 10)

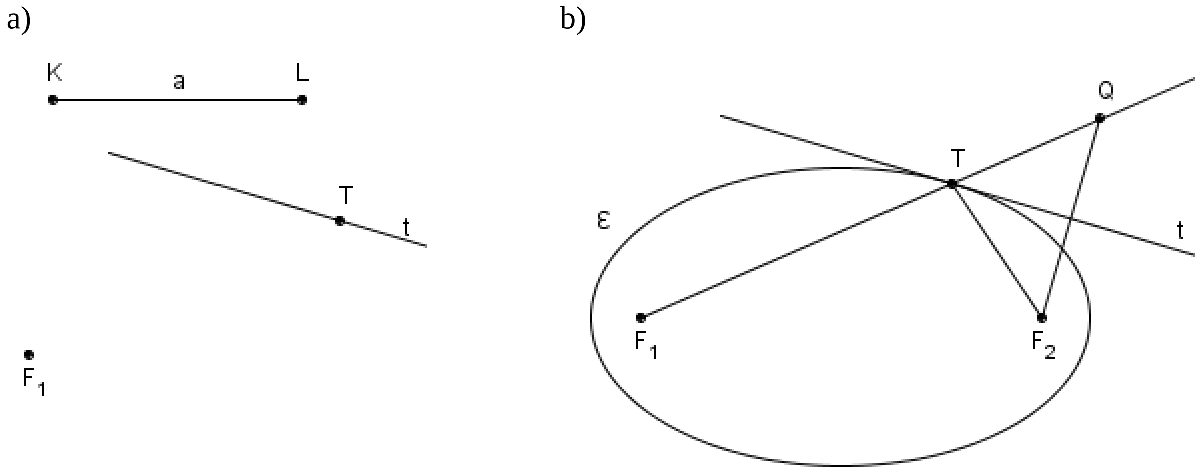
Vstup: ohnisko F_1, dotyčnica t, dotykový bod $T \in t$, $|KL| = a$ (Obr. 37.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 37.b)

1. Na polpriamke F_1T zostrojíme bod Q tak, že $|F_1Q| = 2a = 2|KL|$.
2. Zostrojíme ohnisko F_2 ako bod súmerne združený podľa dotyčnice t s bodom Q [sprievodiče F_1T, TF_2 sú súmerne združené podľa dotyčnice t, pretože dotyčnica je osou vonkajšieho uhla sprievodičov bodu T a platí: $|F_1T| + |TQ| = 2a$ a $|TQ| = |TF_2|$, teda $|F_1T| + |TF_2| = 2a$ a F_2 je ohnisko].

Výstup: $\varepsilon(F_1, F_2, T)$

Diskusia: Úloha má práve jedno riešenie.



Obr. 37.: Riešenie príkladu 10

Príklad 11.: Dané sú ohniská F_1, F_2 elipsy a dotyčnica t elipsy (body F_1, F_2 ležia v jednej polrovine vzhľadom na dotyčnicu). Zostrojte dotykový bod T dotyčnice t.

Riešenie: (Zbierka riešených príkladov, príklad 11)

Vstup: ohniská F_1, F_2, dotyčnica elipsy t ($F_1, F_2 \notin t$) (Obr. 38.a)

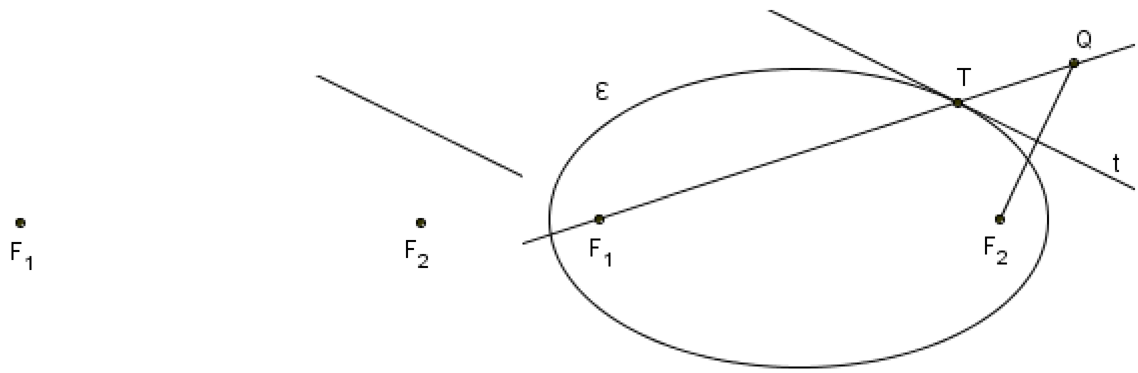
Postup konštrukcie: (Obr. 38.b)

1. Zostrojíme bod Q, ktorý je súmerne združený s ohniskom F_2 podľa dotyčnice t. Bod Q je bodom určujúcej kružnice elipsy $g_1(F_1, 2a)$.
2. Vyznačíme $F_1Q \cap t = \{T\}$ [platí $|F_1T| + |TQ| = |F_1Q| = 2a$, tak $T \in \varepsilon$. Teda T je dotykový bod dotyčnice].

Výstup: dotykový bod T dotyčnice t

Diskusia: Úloha má práve jedno riešenie. [dotyčnica elipsy má s elipsou práve jeden spoločný bod]

a) b)



Obr. 38.: Riešenie príkladu 11

Príklad 12.: Daná je priamka o, na ktorej leží hlavná os elipsy, ohnisko elipsy F_1 a dotyčnica t s dotykovým bodom T. Zostrojte elipsu ε.

Riešenie: (Zbierka riešených príkladov, príklad 12)

<u>Vstup:</u> ohnisko F_1, dotyčnica t s dotykovým bodom T, hlavná os o (Obr. 39.a)

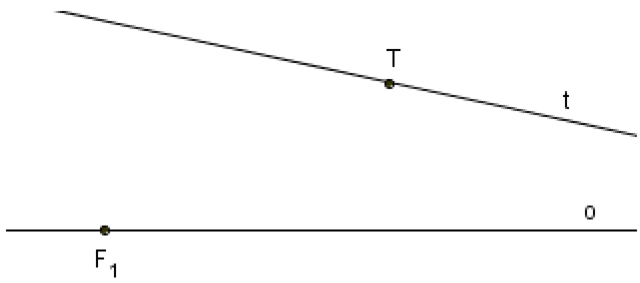
<u>Postup konštrukcie:</u> (Obr. 39.b)

1. Zostrojíme bod Q súmerne združený s ohniskom F_1 podľa dotyčnice t.
2. Zostrojíme priamku QT.
3. Vyznačíme bod $QT \cap o = \{F_2\}$ [dotyčnica je osou vonkajších uhlov sprievodičov bodu T, bod Q leží na sprievodiči F_2T].

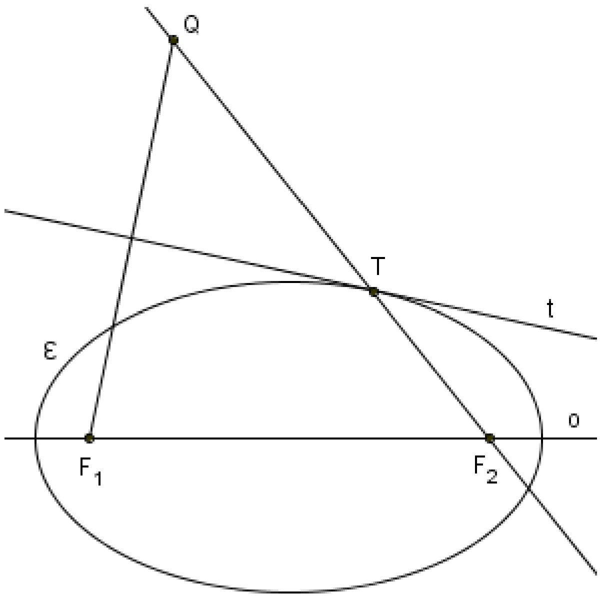
<u>Výstup:</u> elipsa $\varepsilon\,(F_1, F_2, T)$

<u>Diskusia:</u> Úloha má práve jedno riešenie.

a)



b)



Obr. 39.: Riešenie príkladu 12

Príklad 13.: Dané je ohnisko elipsy F_1, dotyčnice t_1, t_2 elipsy a na dotyčnici t_1 dotykový bod T_1 (bod F_1 leží medzi priamkami t_1, t_2). Zostrojte elipsu ε.

Riešenie: (Zbierka riešených príkladov, príklad 13)

<u>Vstup:</u> ohnisko F_1, dotyčnice t_1, t_2, dotykový bod $T_1 \in t_1$ (Obr. 40.a)

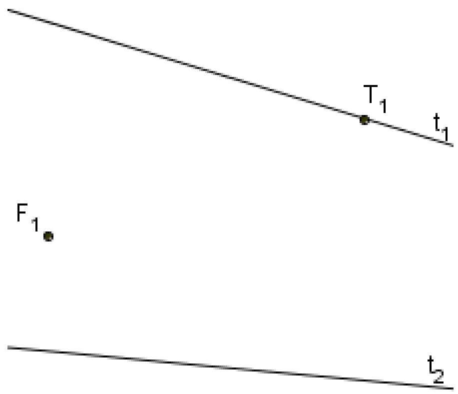
<u>Postup konštrukcie:</u> (Obr. 40.b)

1. Zostrojíme body Q_i súmerne združené s ohniskom F_1 podľa dotyčníc t_i, $i = 1, 2$.
2. Zostrojíme os o úsečky Q_1Q_2 [body Q_1,Q_2 sú body určujúcej kružnice $g_2(F_2, 2a)$, úsečka nimi určená je jej tetivou, a teda stred F_2 určujúcej kružnice leží na osi o tetivy Q_1Q_2].
3. Zostrojíme sprievodič F_1T_1.
4. Zostrojíme priamku Q_1T_1.
5. Potom bod $Q_1T_1 \cap o = \{F_2\}$ [dotyčnica t_1 je osou vonkajších uhlov sprievodičov bodu T_1, bod Q_1 leží na sprievodiči F_2T_1].

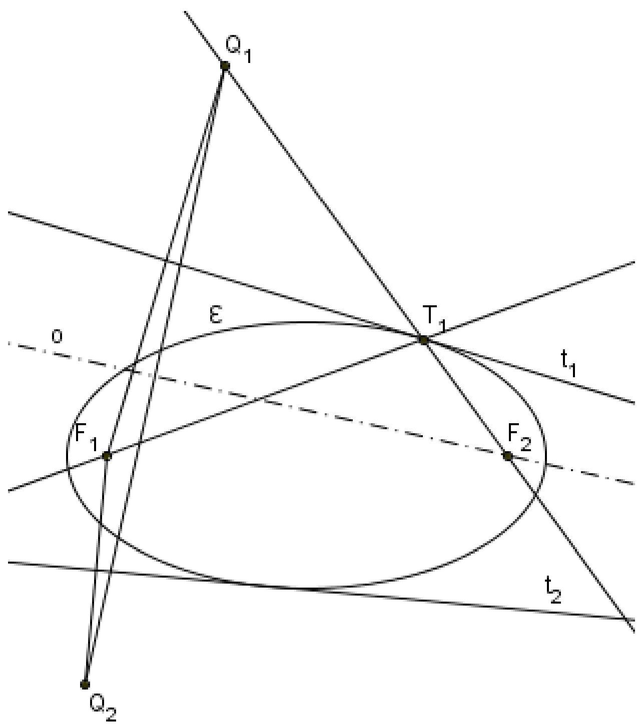
<u>Výstup:</u> elipsa $\varepsilon\,(F_1, F_2, T_1)$

<u>Diskusia:</u> Úloha má práve jedno riešenie.

a)



b)



Obr. 40.: Riešenie príkladu 13

Príklad 14.: Zostrojte elipsu ε, ak je daný jej stred S, dotyčnica elipsy t s dotykovým bodom T a dĺžka hlavnej polosi je určená dĺžkou úsečky $|KL|$.

Riešenie: (Zbierka riešených príkladov, príklad 14)

Vstup: stred S, dotyčnica elipsy t, dotykový bod T ($T \in t$), $a = |KL|$ (Obr. 41.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 41.b)

1. Zostrojíme vrcholovú kružnicu $v(S, a)$.
2. Zostrojíme body $v \cap t = \{P_1, P_2\}$ [body P_1, P_2 sú päty kolmíc zostrojených z ohnísk F_1, F_2 na dotyčnicu t; veta 2.6.].
3. Zostrojíme kolmice k_1, k_2 v bodoch P_1, P_2 na dotyčnicu t [hľadané ohniská elipsy sú bodmi priamok k_1, k_2].
4. Zostrojíme priamky SP_1, SP_2.
5. Zostrojíme priamku m_1 rovnobežnú s priamkou SP_1 idúcu bodom T [Pozri dôkaz vety 7. (Pozn.: bod T je z dôkazu tejto vety bod M)].
6. Označíme bod $k_2 \cap m_1 = \{F_2\}$.
7. Ohnisko F_1 zostrojíme dvomi spôsobmi:
   a) F_1 leží na priamke F_2S a $(F_1F_2S) = -1$.
   b) Zostrojíme priamku m_2 bodom T rovnobežnú s priamkou SP_2. Potom $\{F_1\} = m_2 \cap k_1$.

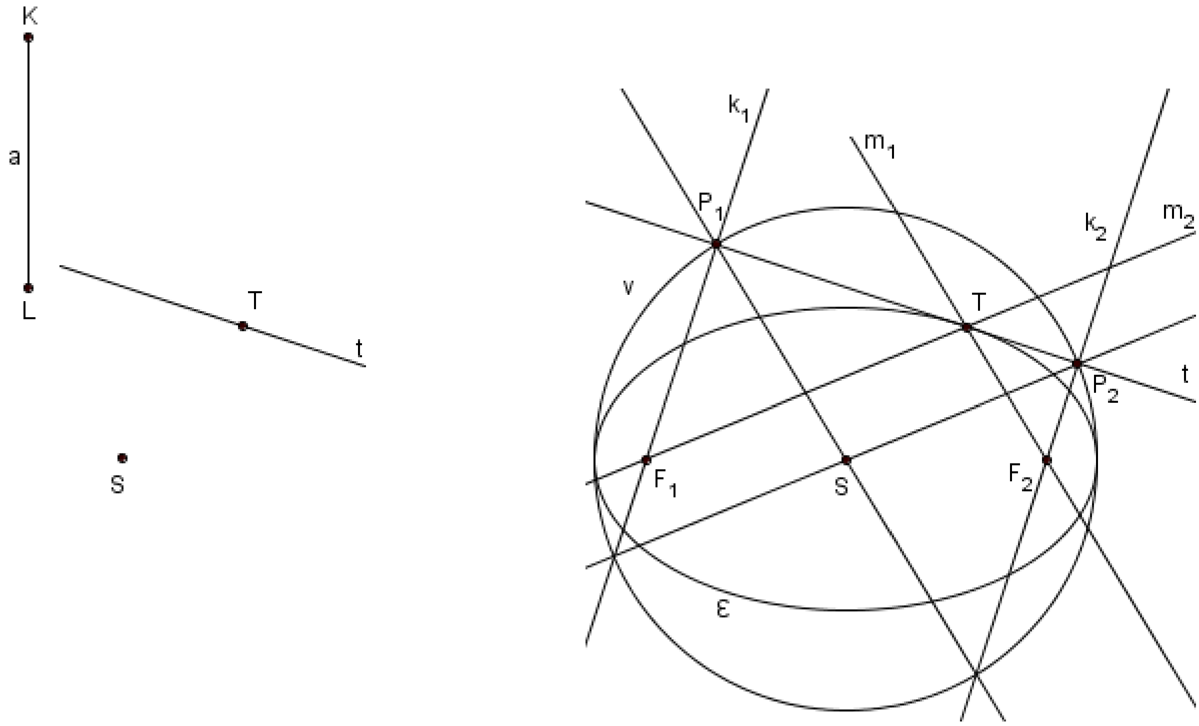
Výstup: elipsa $\varepsilon(F_1, F_2, T)$

Diskusia:

Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružnice v a dotyčnice t:

- $v \cap t = \{ P_1, P_2\}$, tak úloha má práve jedno riešenie (Obr. 41.b),
- $v \cap t = P$ alebo $\emptyset$, tak úloha nemá riešenie.

a) b)



Obr. 41.: Riešenie príkladu 14

Príklad 15.: Zostrojte elipsu ε, ak sú dané jej hlavné vrcholy A, B a dotyčnica t (body A, B ležia v jednej polrovine vzhľadom na dotyčnicu t)

Riešenie: *(Zbierka riešených príkladov, príklad 15)*

Vstup: hlavné vrcholy A, B, dotyčnica t (Obr. 42.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 42.a)

1. Zostrojíme stred S hlavnej osi AB, je to stred elipsy.
2. Zostrojíme vrcholovú kružnicu $v(S, a = |SA|)$.
3. Vyznačíme body $v \cap t = \{P_1, P_2\}$ [body P_1, P_2 sú päty kolmíc zostrojených z ohnísk F_1, F_2 na dotyčnicu t; veta 2.6.].
4. Zostrojíme kolmicu k_i na dotyčnicu t bodom P_i, $i = 1, 2$.
5. Určíme body $k_i \cap AB = \{F_i\}$, $i = 1,2$.

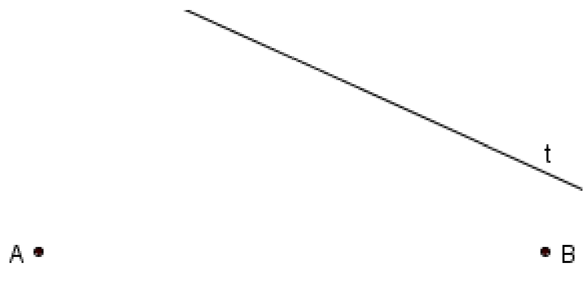
Výstup: elipsa $\varepsilon(F_1, F_2, A)$

Diskusia:

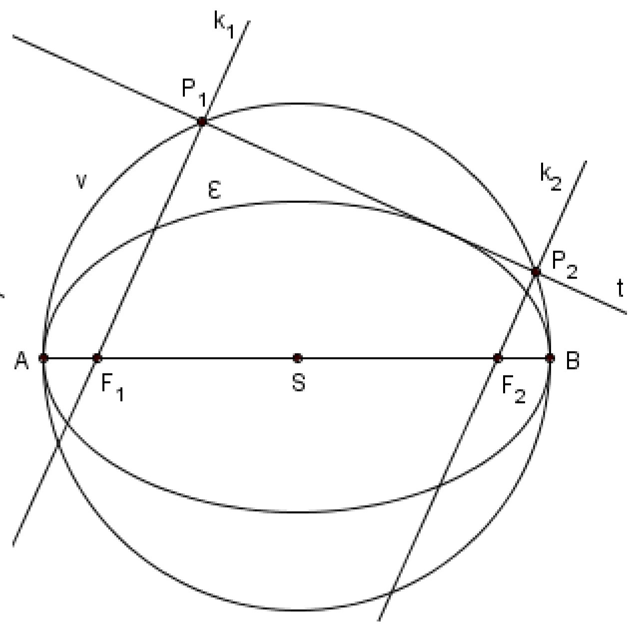
Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružnice v a dotyčnice t:

- $v \cap t = \{ P_1, P_2\}$, tak úloha má práve jedno riešenie (Obr. 42.b),
- $v \cap t = \emptyset$, tak úloha nemá riešenie.

a)



b)



Obr. 42.: Riešenie príkladu 15

Príklad 16.: Zostrojte elipsu ε, ak sú dané tri navzájom rôznobežné dotyčnice t_1, t_2, t_3 a ohnisko F_1.

Riešenie: (Zbierka riešených príkladov, príklad 16)

Vstup: ohnisko F_1, dotyčnice t_1, t_2, t_3 (Obr. 43.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 43.b) pomocou vrcholovej kružnice

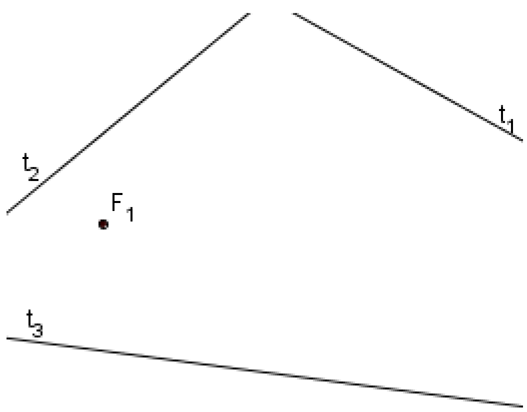
1. Zostrojíme kolmice k_i z ohniska F_1 na dotyčnice t_i, i = 1, 2, 3.
2. Vyznačíme body $k_i \cap t_i = \{P_i\}$ [body P_1, P_2, P_3 sú päty kolmíc zostrojených z ohniska F_1 na dotyčnice t_i; veta 2.6.].
3. Zostrojíme osi o_{12}, o_{23}, o_{13} úsečiek určených bodmi P_i, i = 1, 2, 3.
4. Vyznačíme bod $o_{12} \cap o_{23} \cap o_{13} = \{S\}$ [body P_i, i = 1, 2, 3 sú body vrcholovej kružnice elipsy, ktorej stred S je priesečník osí strán trojuholníka $P_1P_2P_3$; stred S je aj stred elipsy].
5. Ohnisko F_2 leží na priamke F_1S a $(F_1F_2S) = -1$.
6. V ďalších krokoch konštrukcie aplikujeme postup konštrukcie z príkladu 11, t.j. pomocou ohnísk F_1, F_2 a jednej z dotyčníc t_i zostrojíme bod elipsy ako dotykový bod dotyčnice t_i.

Výstup: elipsa ε (F_1, F_2, T_i)

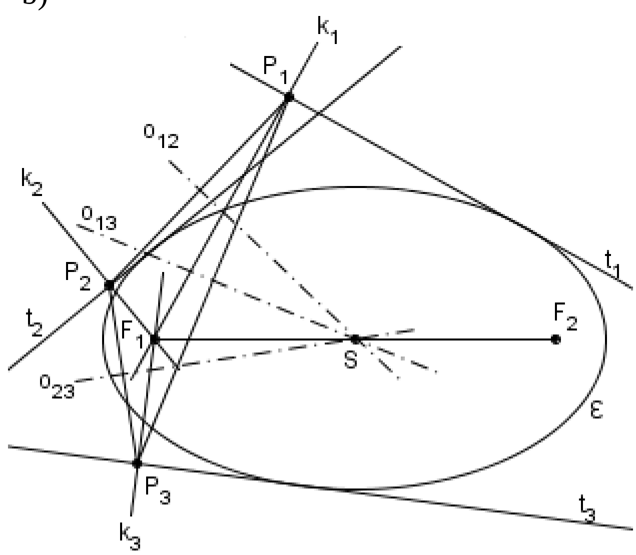
Diskusia: Úloha má práve jedno riešenie.

Poznámka: Postup konštrukcie pomocou určujúcej kružnice: zostrojíme body Q_i, i = 1, 2, 3 súmerne združené s ohniskom F_1 podľa dotyčníc t_i, ktoré sú bodmi určujúcej kružnice g_2 $(F_2, 2a)$. Jej stred, ohnisko F_2, určíme ako priesečník osí strán trojuholníka $Q_1Q_2Q_3$.

a)



b)



Obr. 43.: Riešenie príkladu 16

Príklad 17.: Zostrojte elipsu ε, ak je dané ohnisko F_1, dvojica rôznobežných dotyčníc elipsy t_1, t_2 a smer hlavnej osi elipsy patrí do osnovy priamky s.

Riešenie: (Zbierka riešených príkladov, príklad 17)

Vstup: ohnisko F_1, dotyčnice t_1, t_2, smer hlavnej osi s (Obr. 44.a)

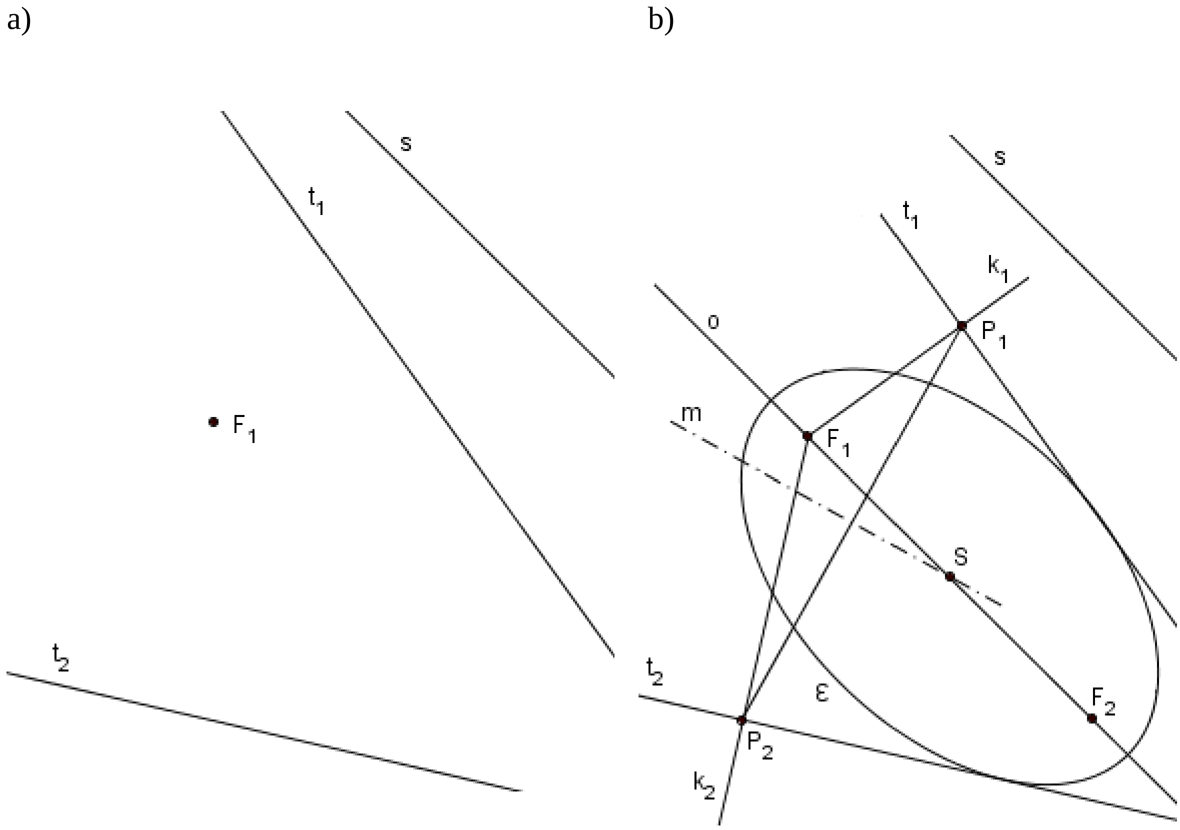
Postup konštrukcie: (Obr. 44.b) pomocou vrcholovej kružnice

1. Zostrojíme os o rovnobežnú s priamkou s idúcu ohniskom F_1 [na nej leží hlavná os elipsy].
2. Zostrojíme kolmice k_i prechádzajúce ohniskom F_1 na dotyčnice t_i, $i = 1, 2$.
3. Vyznačíme body $k_i \cap t_i = \{P_i\}$ [body P_i sú päty kolmíc zostrojených z ohnísk F_1, F_2 na dotyčnice t_i; veta 2.6.].
4. Zostrojíme os m úsečky P_1P_2.
5. Zostrojíme bod $m \cap o = \{S\}$ [body P_i ležia na vrcholovej kružnici elipsy so stredom S a určujú jej tetivu. Bod S je stred elipsy, leží na osi tetivy P_1P_2 a zároveň na hlavnej osi o elipsy].
6. Ohnisko F_2 leží na hlavnej osi a $(F_1F_2S) = -1$.
7. V ďalších krokoch konštrukcie aplikujeme postup konštrukcie z príkladu 11, t.j. pomocou ohnísk F_1, F_2 a jednej z dotyčníc t_i zostrojíme bod elipsy ako dotykový bod dotyčnice t_i

Výstup: elipsa $\varepsilon\,(F_1, F_2, T_i)$

Diskusia: Úloha má práve jedno riešenie.

Poznámka: Postup konštrukcie pomocou určujúcej kružnice: zostrojíme body Q_i, $i = 1, 2$ súmerne združené s ohniskom F_1 podľa dotyčníc t_i, ktoré sú bodmi určujúcej kružnice g_2 $(F_2, 2a)$. Jej stred, ohnisko F_2, nájdeme ako priesečník osi m s hlavnou osou elipsy o.



Obr. 44.: Riešenie príkladu 17

Príklad 18.: Zostrojte elipsu, ak je dané ohnisko F_1, bod elipsy M, dotyčnica t ($M \notin t$) a dĺžka hlavnej polosi je určená dĺžkou úsečky $|KL|$ (body F_1, M ležia v jednej polrovine vzhľadom na dotyčnicu t).

Riešenie: (Zbierka riešených príkladov, príklad 18)

Vstup: ohnisko F_1, $M \in \varepsilon$, dotyčnica t, $|KL| = a$ (Obr. 45.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 45.b)

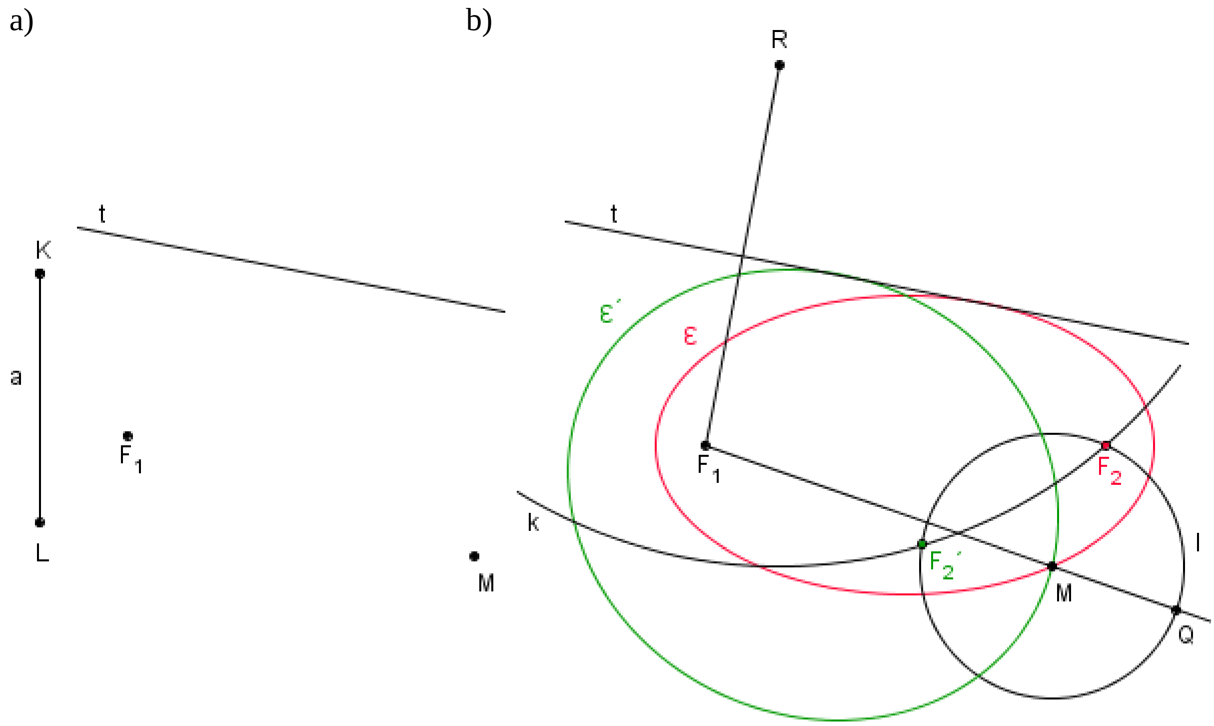
1. Zostrojíme bod R súmerne združený s ohniskom F_1 podľa dotyčnice t.
2. Zostrojíme kružnicu $k(R, 2a)$ [bod R leží na určujúcej kružnici $g_2(F_2, 2a)$, teda platí $|RF_2| = 2a$].
3. Na polpriamke F_1M zostrojíme bod Q, pre ktorý $|F_1Q| = 2a = 2|KL|$.
4. Zostrojíme kružnicu $l(M, |MQ|)$ [$|F_1M| + |MF_2| = |F_1M| + |MQ| = 2a$].
5. Vyznačíme $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$.

Výstup: elipsa ε (F_1, F_2, M), ε' (F_1, F_2', M)

Diskusia:

Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc k, l:

- $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$, tak úloha má dve riešenia (Obr. 45.b) ε (F_1, F_2, M), ε' (F_1, F_2', M),
- $k \cap l = \{F_2\}$, tak úloha má jedno riešenie,
- $k \cap l = \emptyset$, tak úloha nemá riešenie.



Obr. 45.: Riešenie príkladu 18

Príklad 19.: Zostrojte elipsu, ak je dané ohnisko F_1, vedľajší vrchol C a dotyčnica elipsy t (body F_1, C ležia v jednej polrovine vzhľadom na dotyčnicu t).

Riešenie: (Zbierka riešených príkladov, príklad 19)

Vstup: ohnisko F_1, vedľajší vrchol C, dotyčnica t (Obr. 46.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 46.b)

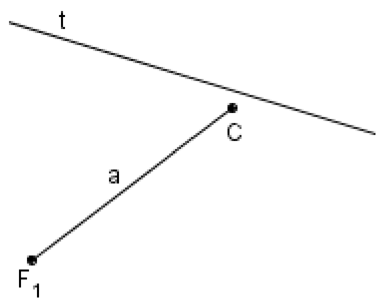
1. Zostrojíme bod R súmerne združený s ohniskom F_1 podľa dotyčnice t.
2. Zostrojíme kružnicu $k(R, 2|F_1C| = 2a)$ [bod R leží na riadiacej kružnici $g_2(F_2, 2a)$, teda platí $|RF_2| = 2a$].
3. Zostrojíme kružnicu $l(C, a)$ [$|F_1C| = |F_2C| = a$].
4. Určíme $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$.

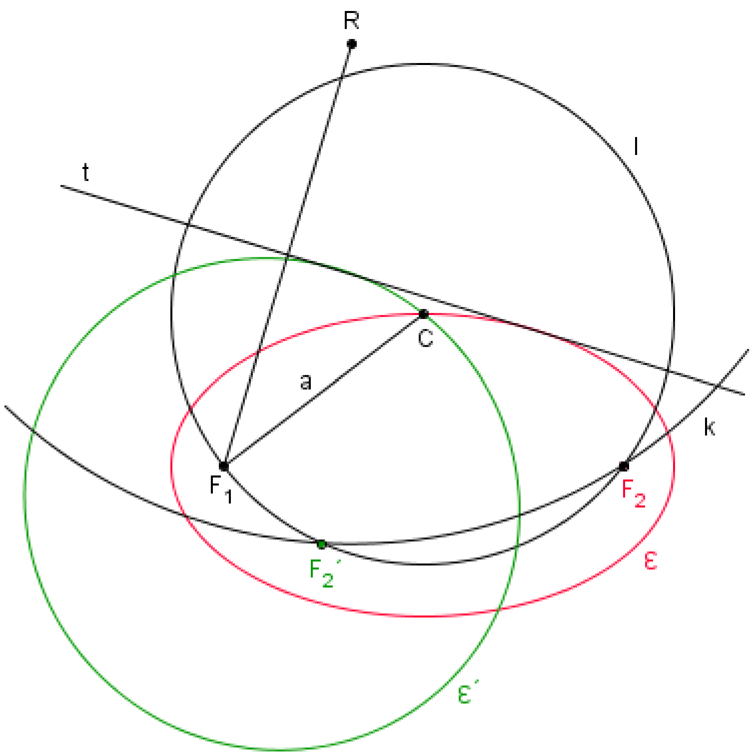
Výstup: elipsa ε (F_1, F_2, C), ε' (F_1, F_2', C)

Diskusia:

Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc k, l:

- $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$, tak úloha má dve riešenia (Obr. 46.b) ε (F_1, F_2, C), ε' (F_1, F_2', C),
- $k \cap l = \{F_2\}$, tak úloha má jedno riešenie,
- $k \cap l = \emptyset$, tak úloha nemá riešenie.

a) 

b) 

Obr. 46.: Riešenie príkladu 19

Príklad 20.: Zostrojte elipsu, ak je daný jej stred S, dotyčnice t_1, t_2 (S leží medzi t_1, t_2) a dĺžka hlavnej polosi je určená dĺžkou úsečky $|KL|$.

Riešenie: (Zbierka riešených príkladov, príklad 20)

<u>Vstup</u>: stred S, dotyčnice t_1, t_2, $|KL| = a$ (Obr. 47.a)

<u>Postup konštrukcie</u>: (Obr. 47.b)

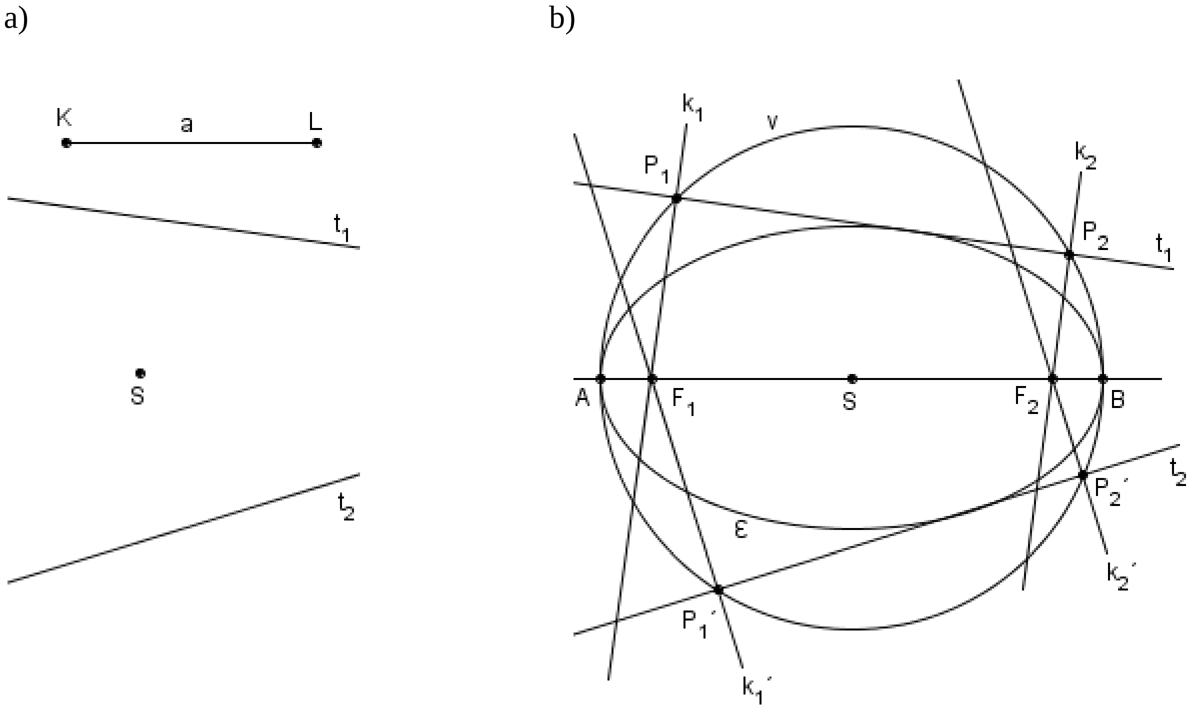
1. Zostrojíme vrcholovú kružnicu $v(S, a)$.
2. Vyznačíme body $t_1 \cap v = \{P_1, P_2\}$, $t_2 \cap v = \{P_1', P_2'\}$ [body P_1, P_2/P_1',P_2' sú päty kolmíc zostrojených z ohnísk F_1, F_2 na dotyčnicu t_1, t_2 ; veta 2.6.] .
3. Zostrojíme kolmice k_i, k_i',i=1,2 v bodoch P_i, P_i'.
4. Vyznačíme body $k_1 \cap k_1' = \{F_1\}$, $k_2 \cap k_2' = \{F_2\}$.
5. Hlavné vrcholy A, B elipsy sú priesečníky priamky F_1F_2 s kružnicou v.

<u>Výstup</u>: elipsa ε (F_1, F_2, A)

<u>Diskusia</u>:

Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružnice v a dotyčníc t_i:

- $v \cap t_i = \{P_i, P_i'\}$ tak úloha má práve jedno riešenie (Obr. 47.b),
- $v \cap t_i = \{P_1\}$ alebo $v \cap t_i = \varnothing$ tak úloha nemá riešenie.



Obr. 47.: Riešenie príkladu 20

Príklad 21.: Zostrojte elipsu, ak je dané ohnisko F_1, dotyčnica t, dĺžka hlavnej osi je určená dĺžkou úsečky $|KL|$ a dĺžka vedľajšej osi je určená dĺžkou úsečky $|PQ|$ ($|KL| > |PQ| = 2a > 2b$).

Riešenie: (Zbierka riešených príkladov, príklad 21)

<u>Vstup</u>: ohnisko F_1, dotyčnica t, $|KL| = 2a$, $|PQ| = 2b$ (Obr. 48.a)

<u>Postup konštrukcie</u>: (Obr. 48.b)

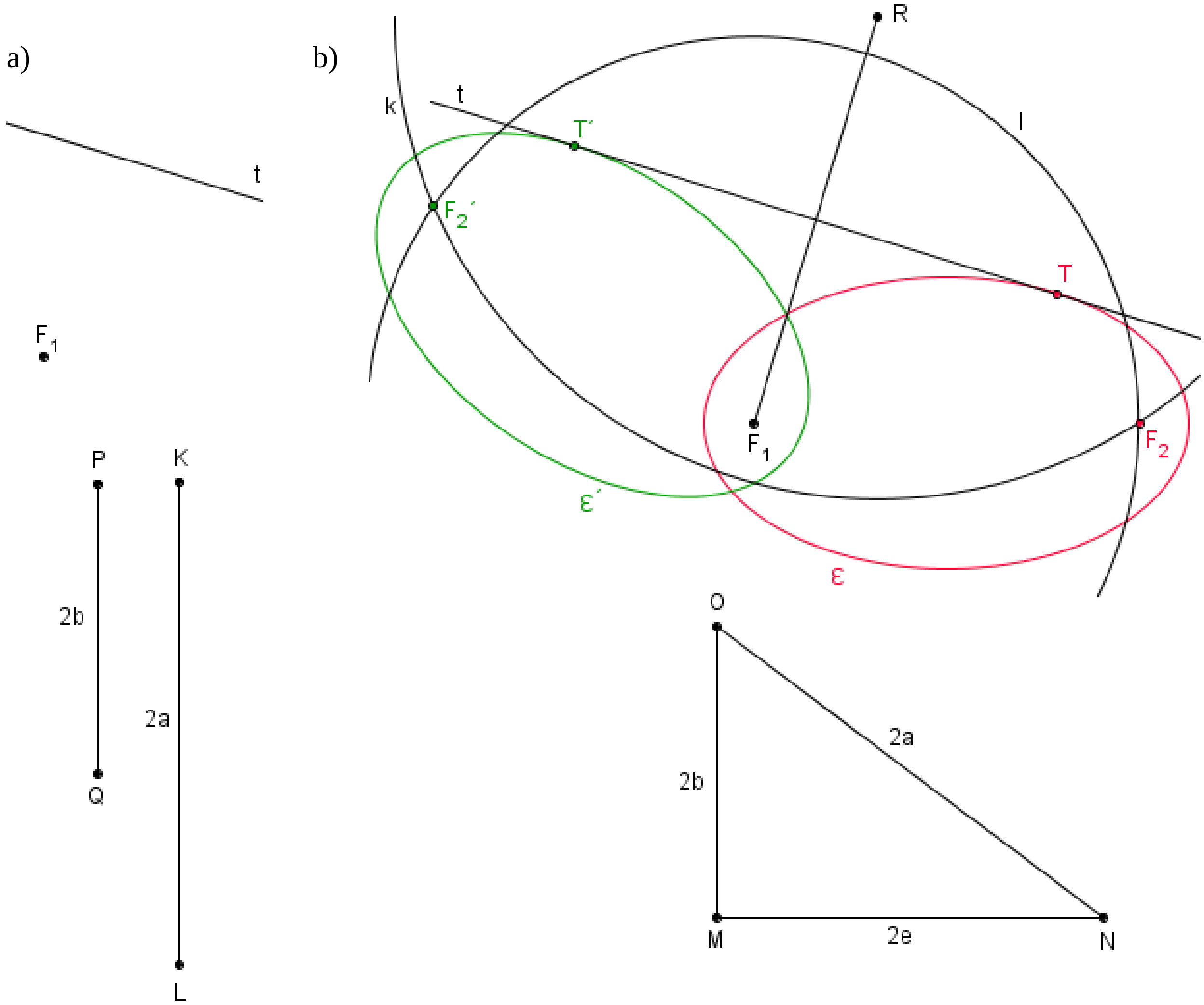
1. Zostrojíme pravouhlý trojuholník MNO s pravým uhlom pri vrchole M, ak prepona $|ON| = 2a$ a odvesna $|MO| = 2b$ [Tento trojuholník je podobný s charakteristickým trojuholníkom hľadanej elipsy, teda odvesna $|MN| = 2e$].
2. Zostrojíme bod R súmerne združený s ohniskom F_1 podľa dotyčnice t.
3. Zostrojíme kružnicu $k(R, 2a)$ [bod R leží na riadiacej kružnici $g_2(F_2, 2a)$, teda platí $|RF_2| = 2a$].
4. Zostrojíme kružnicu $l(F_1, 2e)$. [$|F_1F_2| = 2e$]
5. Vyznačíme $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$.
6. V ďalších krokoch konštrukcie aplikujeme postup konštrukcie z príkladu 11, t.j. pomocou ohnísk F_1, F_2 a dotyčnice t zostrojíme bod elipsy ako dotykový bod dotyčnice t

<u>Výstup</u>: $\varepsilon (F_1, F_2, T)$, $\varepsilon' (F_1, F_2', T')$

<u>Diskusia:</u>

Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc k, l:

- $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$, tak úloha má dve riešenia (Obr. 48.b) ε (F_1, F_2, T), ε' (F_1, F_2', T),
- $k \cap l = \{F_2\}$, tak úloha má jedno riešenie,
- $k \cap l = \emptyset$, tak úloha nemá riešenie.



Obr. 48.: Riešenie príkladu 21

3.4. Konštrukcia dotyčnice elipsy.

Príklad 22.: Zostrojte dotyčnicu k nenarysovanej elipse v jej bode T, ak sú dané ohniská F_1, F_2.

Riešenie: (Zbierka riešených príkladov, príklad 22)

Vstup: ohniská F_1, F_2, $T \in \varepsilon$, ($T \notin F_1F_2$) (Obr. 49.a)

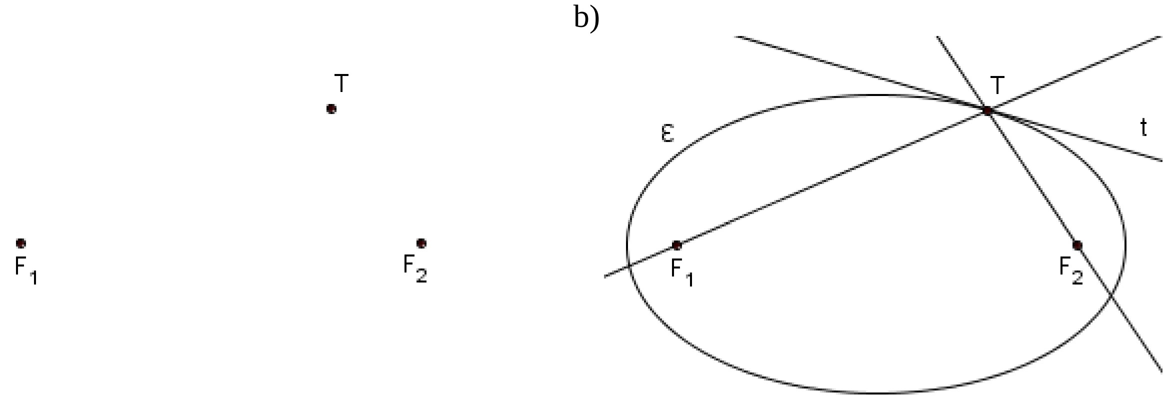
Postup konštrukcie: (Obr. 49.b)

1. Zostrojíme sprievodiče bodu T [priamky F_1T, F_2T].
2. Zostrojíme priamku t, ako os vonkajšieho uhla sprievodičov bodu T [z vety 4. vyplýva, že je to dotyčnica v bode T].

Výstup: dotyčnica elipsy v bode T

Diskusia: Úloha má práve jedno riešenie [existuje práve jedna dotyčnica elipsy v jej bode].

a) b)



Obr. 49.: Riešenie príkladu 22

Príklad 23.: Dané sú ohniská F_1, F_2 a normála n elipsy (body F_1, F_2 ležia v rôznych polrovinách vzhľadom na normálu n). Zostrojte elipsu ε a dotyčnicu t elipsy v bode, v ktorom je zostrojená normála.

Riešenie: (Zbierka riešených príkladov, príklad 23)

<u>Vstup:</u> ohniská F_1, F_2, normálna n (Obr. 50.a)

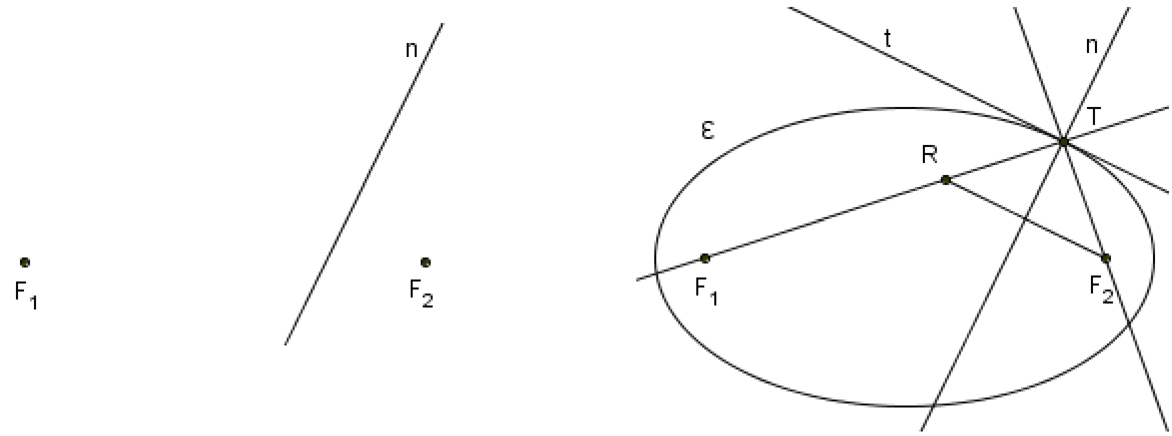
<u>Postup konštrukcie:</u> (Obr. 50.b)

1. Zostrojíme bod R, ktorý je súmerne združený s ohniskom F_2 podľa normály n [normála je osou vnútorných uhlov sprievodičov bodu T, ktorý hľadáme, bod R leží na sprievodiči F_1T].
2. Zostrojíme priamku F_1R.
3. Vyznačíme bod $F_1R \cap n = \{T\}$, $T \in \varepsilon$.
4. V bode T zostrojíme kolmicu t na normálu n, je to dotyčnica elipsy v bode T.

<u>Výstup:</u> elipsa ε, dotyčnica elipsy

<u>Diskusia</u>: Úloha má práve jedno riešenie.

a) b)



Obr. 50.: Riešenie príkladu 23

Príklad 24.: Zostrojte dotyčnicu elipsy prechádzajúcu vonkajším bodom R elipsy bez jej vykreslenia, ak sú dané hlavné a vedľajšie vrcholy elipsy.

Riešenie:

Vstup: hlavné vrcholy A, B, vedľajšie vrcholy C, D, vonkajší bod elipsy R (Obr. 51.a)

Postup konštrukcie: pomocou určujúcej kružnice elipsy (Obr. 51.b)

(Zbierka riešených príkladov, príklad 24 – určujúca kružnica)

- Zostrojíme ohniská F_1, F_2.
- Zostrojíme kružnicu $k(R, |F_2R|)$.
- Zostrojíme určujúcu kružnicu $g_1(F_1, 2a)$.
- Vyznačíme $k \cap g_1 = \{Q_1, Q_2\}$ [body Q_1, Q_2 sú súmerne združené podľa hľadaných dotyčníc s ohniskom F_2 a teda ležia na riadiacej kružnici g_1. Bod R je v tejto súmernosti samodružný a platí: $|F_2R|=|RQ|$].
- Zostrojíme body O_1, O_2 tak, že $(F_2QO) = -1$ a $(F_2QO') = -1$. [stredy O_1, O_2 úsečiek Q_1F_2, Q_2F_2 ležia na osiach súmerností, ktorými sú hľadané dotyčnice]
- Zostrojíme dotyčnice $t_1=RO_1$, $t_2=RO_2$.
- Zostrojíme priamky F_1Q_1, F_2Q_2.
- Vyznačíme $RO_i \cap F_1Q_i = \{T_i\}$, $i = 1, 2$ [platí $|F_1T_i| + |T_iQ_i| = |F_1Q_i| = 2a$, tak $T_i \in \varepsilon$. Teda T_i sú dotykové body dotyčníc t_i].

Postup konštrukcie: pomocou vrcholovej kružnice elipsy (Obr. 51.c)

(Zbierka riešených príkladov, príklad 24 – vrcholová kružnica)

- Zostrojíme ohniská F_1, F_2.
- Zostrojíme bod O tak, že $(RF_2O) = -1$.
- Zostrojíme Talesovu kružnicu $\tau(O, |RO|)$.
- Zostrojíme vrcholovú kružnicu $v(S,a)$.
- Vyznačíme $k \cap v = \{P_1, P_2\}$ [body P_i, $i = 1, 2$ sú päty kolmíc zostrojených z ohniska F_2 na hľadané dotyčnice t_i; veta 2.6.; trojuholníky RF_2P_i sú pravouhlé s pravým uhlom pri vrcholoch P_i, preto body P_i ležia na Talesovej kružnici τ].
- Zostrojíme dotyčnice elipsy $t_i = RP_i$, $i = 1, 2$.
- Zostrojíme body Q_i, $i = 1, 2$ súmerne združené s ohniskom F_2 podľa dotyčníc t_i.
- Zostrojíme priamky F_1Q_i.
- Vyznačíme $t_i \cap F_1Q_i = \{T_i\}$. [platí $|F_1T_i| + |T_iQ_i| = |F_1Q_i| = 2a$, tak $T_i \in \varepsilon$. Teda T_i sú dotykové body dotyčníc t_i]

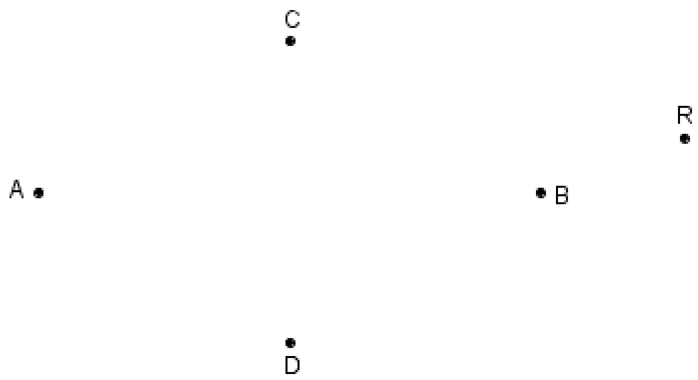
Výstup: dotyčnice t_1, t_2 elipsy ε prechádzajúce vonkajším bodom R elipsy

Diskusia:

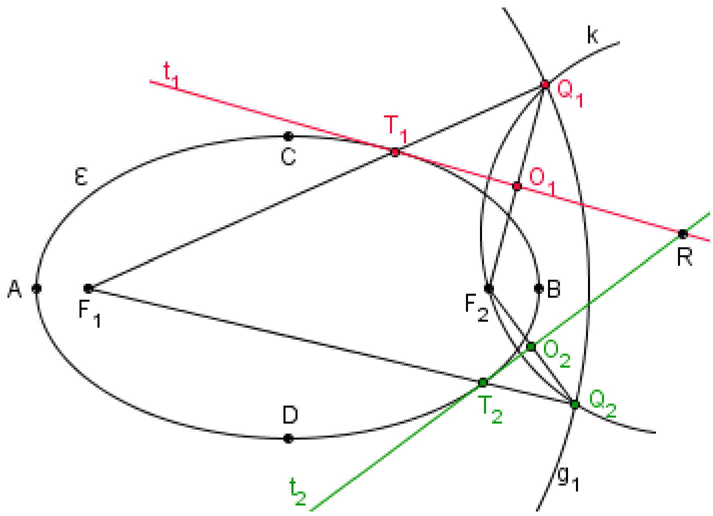
Počet riešení závisí od polohy bodu *R* a elipsy:

- ak bod *R*, je vonkajší bod, tak úloha má dve riešenia (Obr. 51.b, c)
- ak bod *R*, je bod elipsy, tak úloha má práve jedno riešenie,
- ak bod *R*, je vnútorným bodom elipsy, tak úloha nemá riešenie.

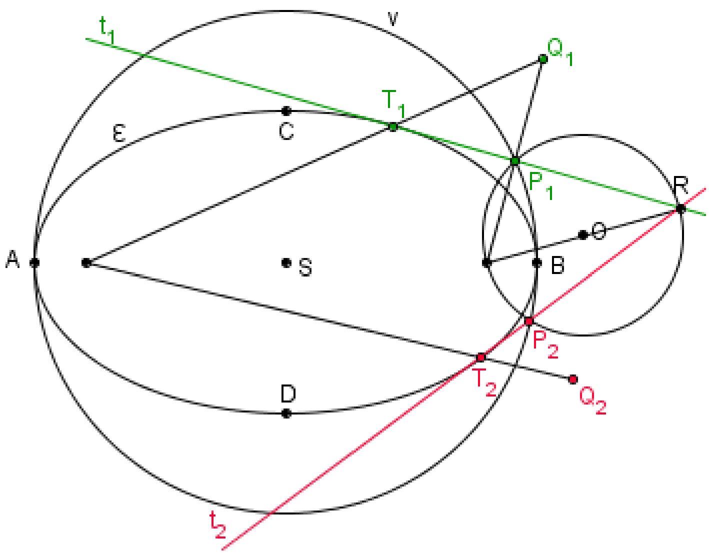
a)



b)



c)



Obr. 51.: Riešenie príkladu 24

Príklad 25.: Zostrojte dotyčnice elipsy rovnobežné s danou priamkou p, bez vykreslenia elipsy, ak sú dané jej hlavné a vedľajšie vrcholy.

Riešenie:

<u>Vstup</u>: hlavné vrcholy A, B, vedľajšie vrcholy C, D, priamka p (Obr. 52.a)

<u>Postup konštrukcie</u>: pomocou určujúcej kružnice elipsy (Obr. 52.b)

(Zbierka riešených príkladov, príklad 25 – určujúca kružnica)

- Zostrojíme priamku k kolmú na danú priamku p prechádzajúcu ohniskom F_2.
- Zostrojíme určujúcu kružnicu $g_1(F_1, 2a)$.
- Vyznačíme $g_1 \cap k = \{Q_1, Q_2\}$.
- Zostrojíme body O_i, i=1,2 úsečky F_2Q_i [Bod Q_i je súmerne združený s ohniskom F_2 podľa hľadaných dotyčníc, preto stredy O_i úsečiek Q_iF_2 ležia na osiach súmernosti, ktorými sú hľadané dotyčnice].
- Zostrojíme priamky t_i prechádzajúce bodmi O_i, $i = 1, 2$ rovnobežné s priamkou p.
- Určíme $F_1Q_i \cap t_i = \{T_i\}$ [platí $|F_1T_i| + |T_iQ_i| = |F_1Q_i| = 2a$, tak $T_i \in \varepsilon$. Teda T_i sú dotykové body dotyčníc].

<u>Postup konštrukcie</u>: pomocou vrcholovej kružnice elipsy (Obr. 52.c)

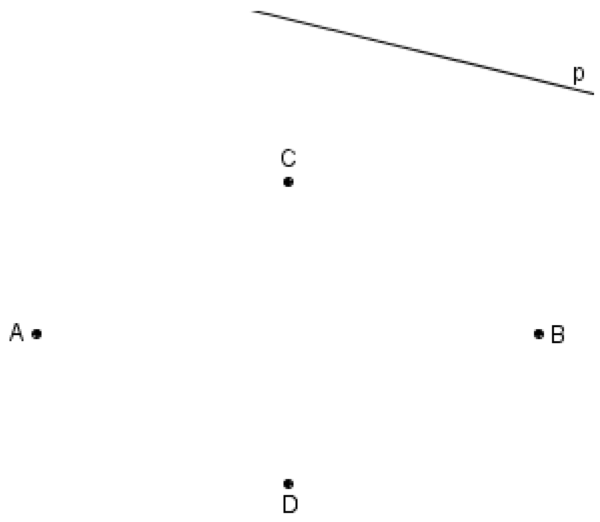
(Zbierka riešených príkladov, príklad 25 – vrcholová kružnica)

- Zostrojíme ohniská F_1, F_2.
- Zostrojíme priamku k kolmú na danú priamku p prechádzajúcu ohniskom F_2.
- Zostrojíme vrcholovú kružnicu $v(S,a)$.
- Vyznačíme body $v \cap k = \{P_1, P_2\}$.
- Zostrojíme priamky t_i prechádzajúce bodmi P_i, $i = 1, 2$ rovnobežné s priamkou p. [body P_i sú päty kolmice k na hľadané dotyčnice prechádzajúcej ohniskom F_1, a teda $P_i \in t_i$].
- Zostrojíme body Q_i, $i = 1, 2$ ktoré sú súmerne združené s ohniskom F_2 podľa dotyčníc t_i. Body Q_i sú bodmi riadiacej kružnice elipsy $g_1(F_1, 2a)$.
- Zostrojíme $F_1Q_i \cap t_i = \{T_i\}$ [platí $|F_1T_i| + |T_iQ_i| = |F_1Q_i| = 2a$, takže $T_i \in \varepsilon$ a Ti sú dotykové body dotyčníc t_i].

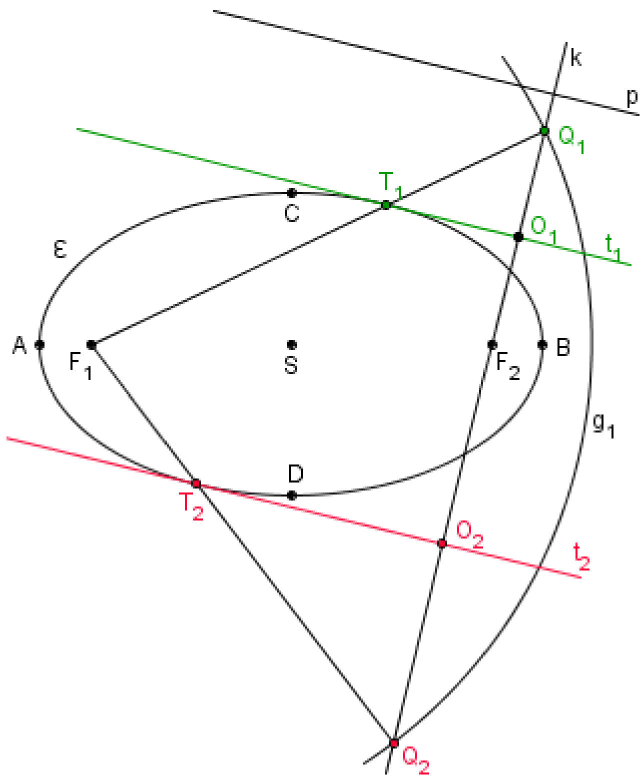
<u>Výstup</u>: dotyčnice t_1, t_2 elipsy ε rovnobežné s danou priamkou p

<u>Diskusia</u>: Úloha má vždy dve riešenia.

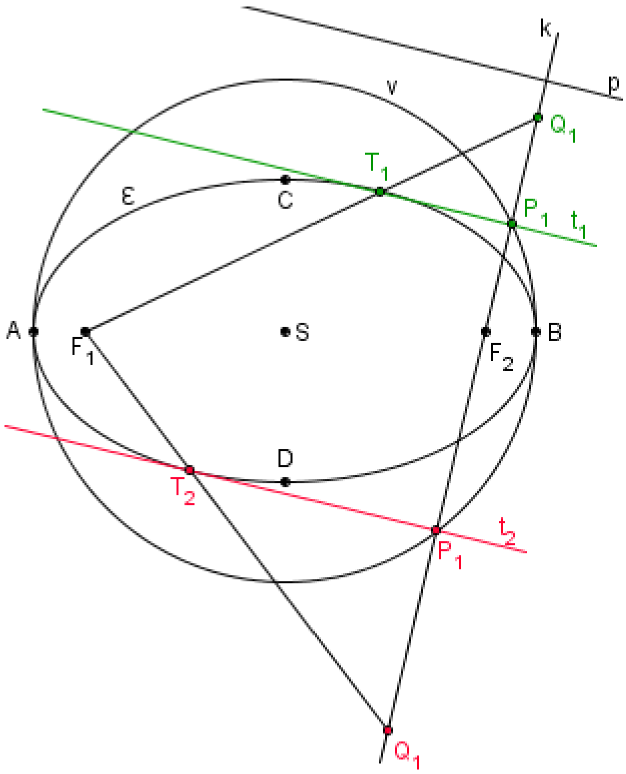
a)



b)



c)



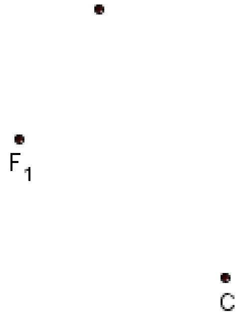
Obr. 52.: Riešenie príkladu 25

4. Zbierka cvičení

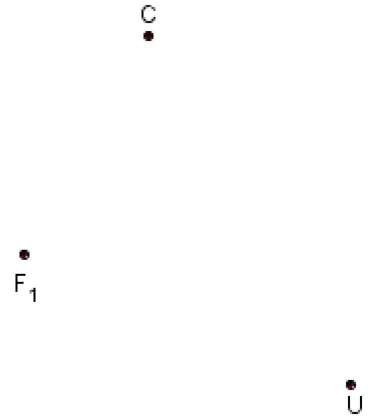
Príklady v zbierke cvičení sú navrhnuté tak, že úloha má nie vždy riešenie. Niektoré úlohy majú dve riešenia, niektoré práve jedno, niektoré žiadne. Počet riešení závisí od vzájomnej polohy vstupných údajov. Je dôležité, aby si čitateľ zvolil polohu bodov tak, ako je to ponúknuté v zadaní. Cieľom bolo, opísať polohu bodov tak, aby čitateľ dostal "rovnaké" riešenie, pre aké bol príklad navrhnutý. V príkladoch, v ktorých poloha vstupných údajov nie je určená, odporúčame zvoliť polohu "podobnú" polohe vstupných údajov v zadaní. Neodporúčame používať vzdialenosti, ktoré čitateľ nameria v zadaní úlohy. Obrázky zadaní sú súčasťou zadania úlohy.

1) Zostrojte elipsu, ak
   a) $e = 3j$ a $a + b = 7j$
   b) $e = 5j$ a $a + b = 4j$
   c) $e = 3j$ a $a + b = 5j$
   d) $a = 3j$ a $b - e = 1j$, $b > e$
   e) $a = 3j$ a $e - b = 1j$, $e > b$
2) Zostrojte elipsu, ak je daný hlavný vrchol A, vedľajší vrchol C, $|AC| = 3j$, a dĺžka hlavnej polosi je
   a) $a = 5j$.
   b) $a = 3j$.

3) Zostrojte elipsu, ak je dané ohnisko F_1, vedľajší vrchol C a jeden bod elipsy U.
   a)



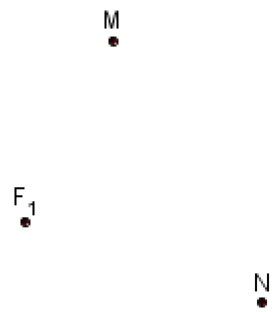
   b)



4) Zostrojte elipsu, ak je dané ohnisko F_1 a jej dva body M, N a dĺžka hlavnej polosi je

a) $a = 3{,}5j$. $|F_1M| = 5j$, $|F_1N| = 4j$, $|MN| = 5j$.

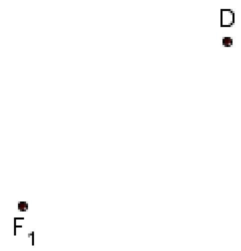
b) $a = 2{,}5j$. $|F_1M| = 2j$, $|F_1N| = 2{,}5j$, $|MN| = 3j$.



5) Zostrojte elipsu, ak je dané ohnisko F_1, vedľajší vrchol D, $|F_1D| = 3j$, a excentricita je

a) $e = 3j$,

b) $e = 2j$.

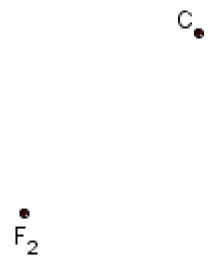


6) Zostrojte elipsu, ak je dané ohnisko F_2 a vedľajší vrchol C, $|F_2C| = 2{,}5j$, a veľkosť vedľajšej polosi je:

a) $b = 3j$.

b) $b = 2{,}5j$.

c) $b = 2j$.



7) Zostrojte elipsu, ak je dané ohnisko F_1, jeden bod elipsy M, $|F_1M| = 4j$, a

a) $e = 1j$, $a = 3j$.

b) $e = 1j$, $a = 2{,}5j$.

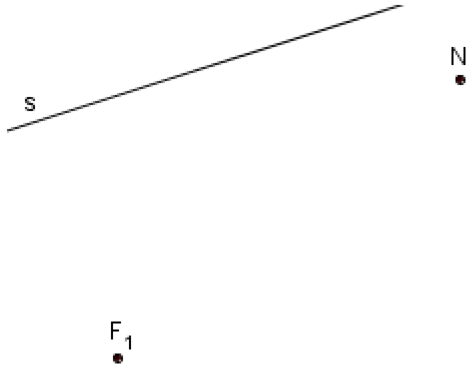
c) $e = 1j$, $a = 4j$.

8) Zostrojte elipsu, ak je dané ohnisko F_1, jeden jej bod N, hlavná os elipsy patrí do osnovy priamky s tak, že $|Ns| = 1j$, $|F_1s| = 2{,}5j$ (body F_1, M ležia v jednej polrovine vzhľadom na priamku s) a dĺžka hlavnej osi je:

a) $a = 3{,}5j$.

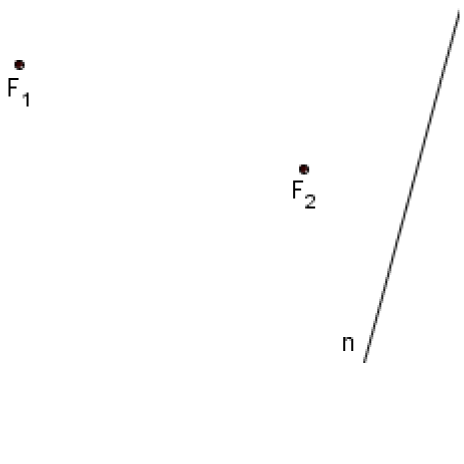
b) $a = 2{,}5j$.

c) $a = 3j$.

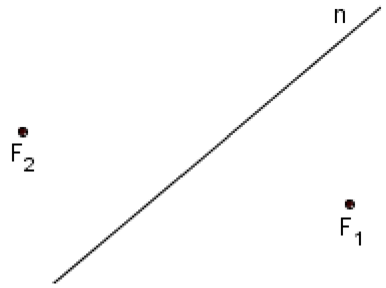


9) Dané sú ohniská F_1, F_2 a normála n elipsy. Zostrojte elipsu a dotyčnicu v bode, v ktorom je zostrojená normála.

a) Priamka F_1F_2 je kolmá na n a body F_1, F_2 ležia v jednej polrovine vzhľadom na priamku n.

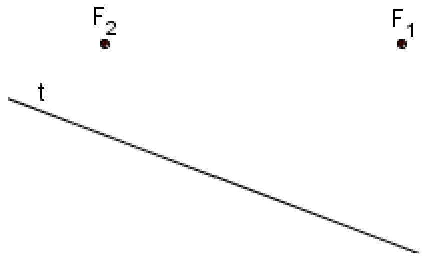


b) Body F_1, F_2 ležia v opačných polrovinách vzhľadom na priamku *n*.

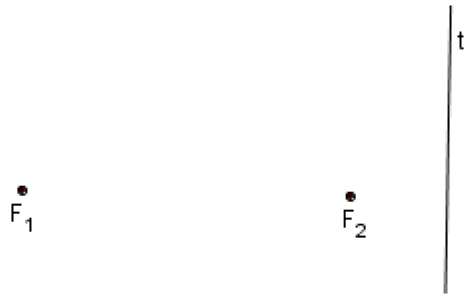


10) Dané sú ohniská F_1, F_2 elipsy a dotyčnica *t* elipsy. Zostrojte dotykový bod *T* dotyčnice *t*.

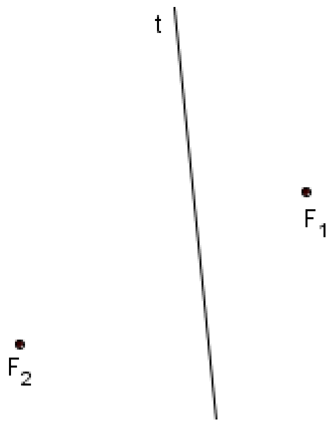
a) Body F_1, F_2 ležia v jednej polrovine vzhľadom na priamku *t*.



b) Priamka F_1F_2 je kolmá na *t* a body F_1, F_2 ležia v jednej polrovine vzhľadom na priamku *t*.

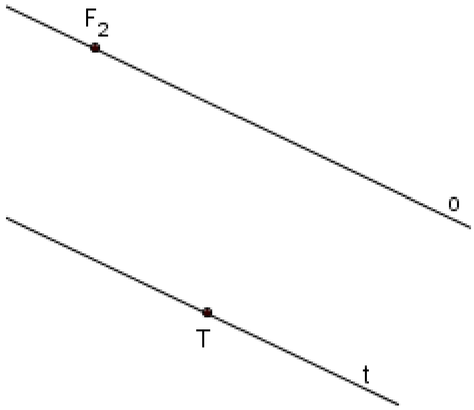


c) Body F_1, F_2 ležia v opačných polrovinách vzhľadom na priamku *t*.

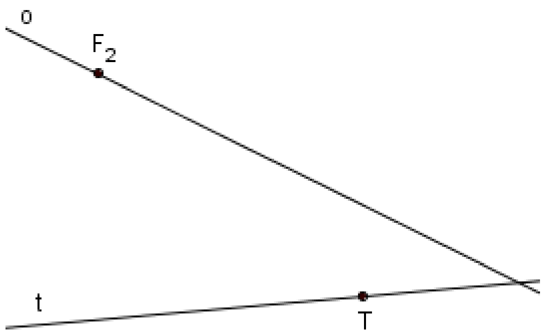


11) Zostrojte elipsu, ktorej hlavná os leží na priamke o, poznáme jej ohnisko F_2 a dotyčnicu t s dotykovým bodom T tak, že priamka TF_2 nie je kolmá na t.

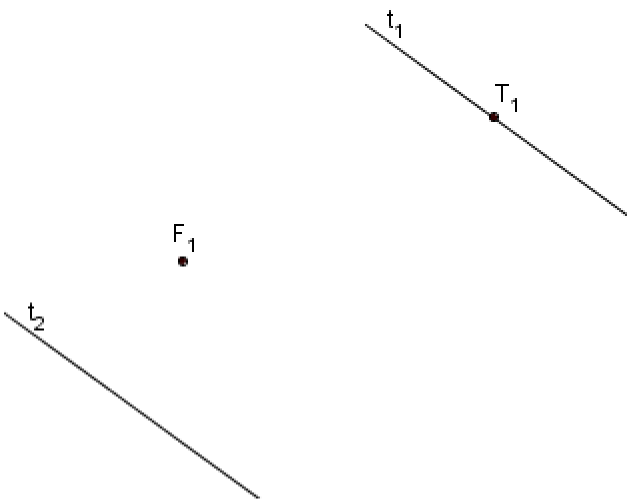
a) o je rovnobežná s t



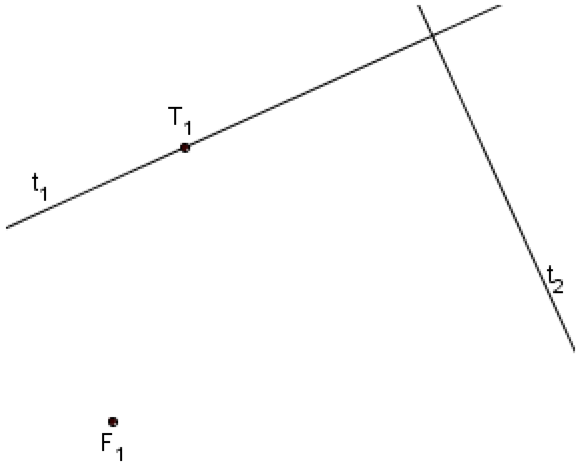
b) o je rôznobežná s t.



12) Dané je ohnisko elipsy F_1, dotyčnice t_1, t_2 elipsy sú rovnobežné a na dotyčnici t_1 je daný dotykový bod T_1, priamky F_1T, t_1 nie sú kolmé a $|F_1t_1| = 1{,}5j$, $|F_1t_2| = 3j$. Zostrojte elipsu.



13) Dané je ohnisko elipsy F_1, dotyčnice t_1, t_2 elipsy sú na seba kolmé a na dotyčnici t_1 je daný dotykový bod T_1. Zostrojte elipsu.

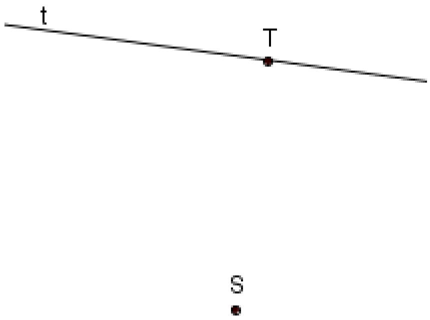


14) Zostrojte elipsu, ak je daný stred S elipsy, dotyčnica t s dotykovým bodom T (ST je kolmé/nie je kolmé na t) a dĺžka hlavnej polosi je:

a) $a = 3{,}5j$

b) $a = 2{,}5j$

c) $a = 2j$.

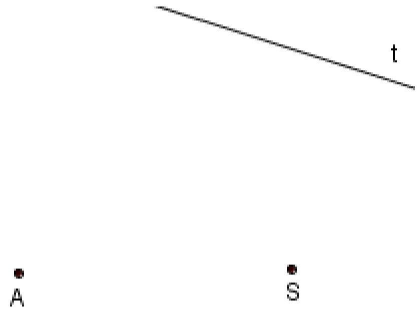


15) Zostrojte elipsu, ak je daný hlavný vrchol A, stred elipsy S a dotyčnica elipsy t (AS je rôznobežná s t)

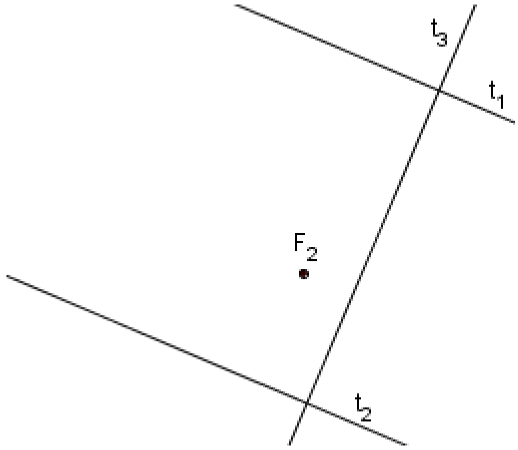
a) $|St| = 2j$.

b) $|St| = 3j$.

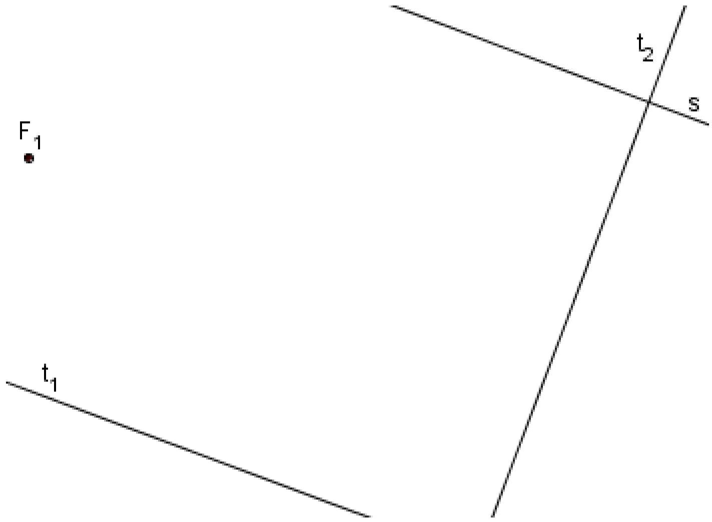
c) $|St| = 3{,}5j$.



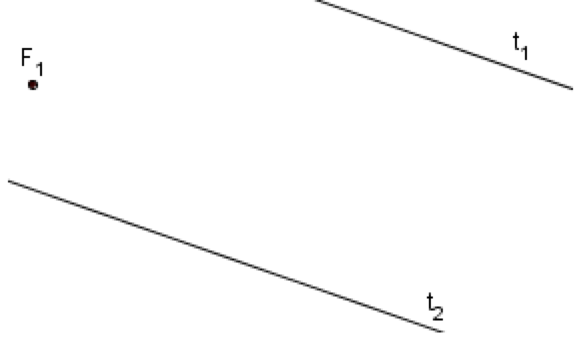
16) Zostrojte elipsu, ak je dané ohnisko F_2 a tri dotyčnice t_1, t_2, t_3, pričom t_1 a t_2 sú rovnobežky a priamka t_3 je na ne kolmá. Bod F_2 leží medzi dotyčnicami t_1, t_2 a $|F_2t_1| \neq |F_2t_2| \neq |F_2t_3|$.



17) Zostrojte elipsu, ak je dané ohnisko F_1 dvojica kolmých dotyčníc t_1, t_2, smer hlavnej osi a dotyčnica t_1 patria do osnovy priamky s a $|F_1t_1| \neq |F_1t_2|$.



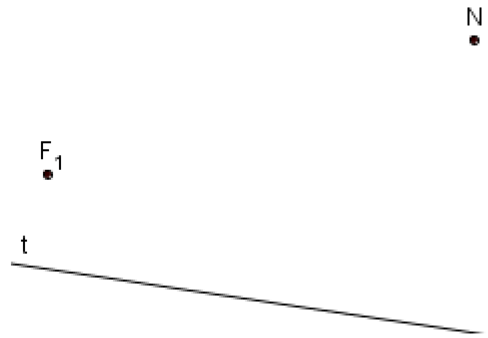
18) Zostrojte elipsu, ak je dané ohnisko F_1 a dotyčnice t_1, t_2, ktoré so smerom hlavnej osi patria do osnovy priamky s tak, že F_1 leži medzi dotyčnicami t_1, t_2.



19) Zostrojte elipsu, ak je dané ohnisko F_1, jeden jej bod N (body F_1N ležia v jednej polrovine vzhľadom na priamku t), dotyčnica t, pričom $|F_1N| = 4{,}5$j, $|F_1t| = 1j$, $|Nt| = 3j$ a dĺžka hlavnej polosi je:

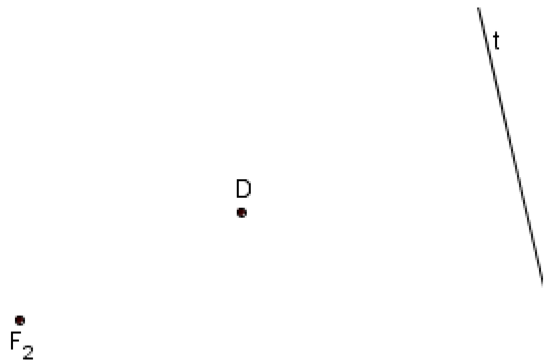
a) $a = 2{,}5j$.

b) $a = 3j$.

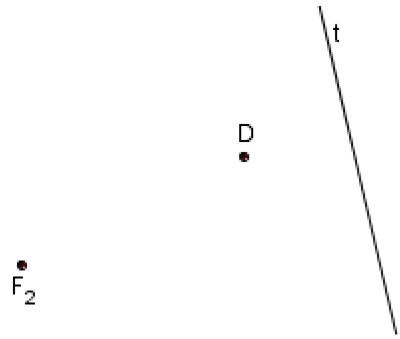


20) Zostrojte elipsu ak je dané ohnisko F_2, vedľajší vrchol D a dotyčnica elipsy t.

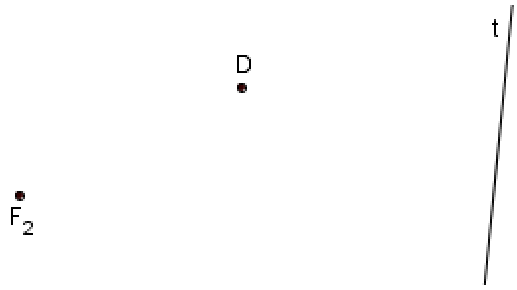
a) $|F_2D| = 2{,}5j$, $|F_2t| = 5{,}5j$, $|Dt| = 3j$.



b) $|F_2D| = 2{,}5j$, $|F_2t| = 3{,}5j$, $|Dt| = 1j$.

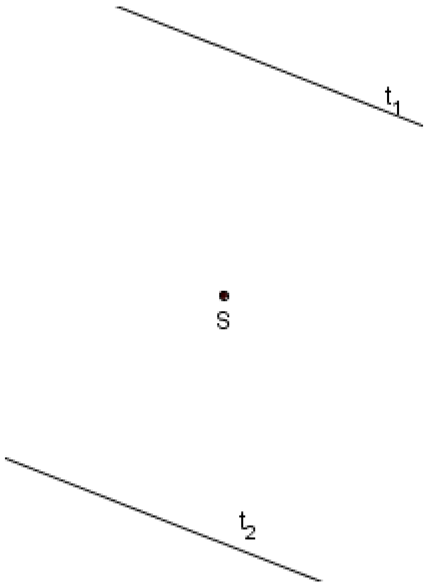


c) $|F_2D| = 2{,}5j$, $|F_2t| = 4{,}5j$, $|Dt| = 2{,}5j$.

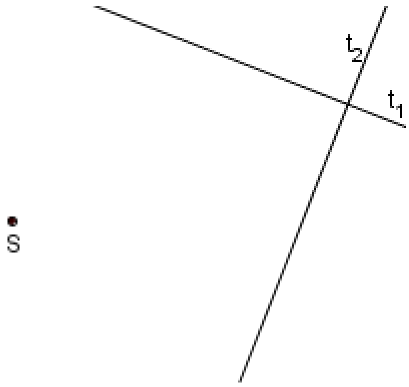


21) Zotrojte elipsu, ak je daný jej stred S a

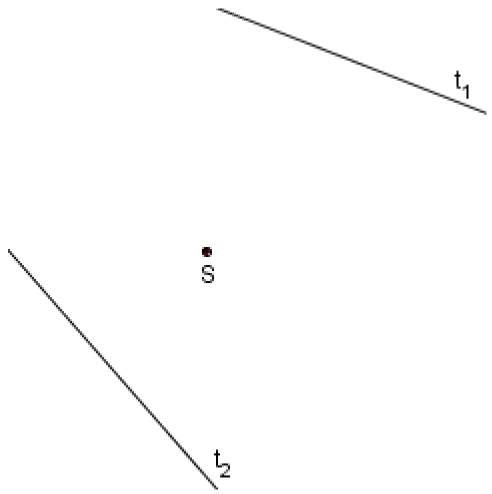
a) Dotyčnice t_1, t_2 sú rovnobežné, dĺžka hlavnej polosi je $a = 3j$ a



b) Dotyčnice t_1, t_2 sú kolmé a dĺžka hlavnej polosi je $a = 3j$ tak, že $|St_1|$, $|St_2| \leq a$.



c) Dotyčnice t_1, t_2 sú rôznobežné a dĺžka hlavnej polosi je $a = 3j$, resp. $2j$ a $|St_1| = 1{,}5j$, $|St_2| = 2{,}5j$.

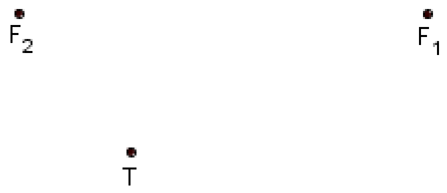


22) Zostrojte dotyčnicu k nenarysovanej elipsy v jej bode T, ak sú dané jej ohniská F_1, F_2.

a) F_1, F_2, T sú kolineárne a F_1 leží medzi F_2, T.

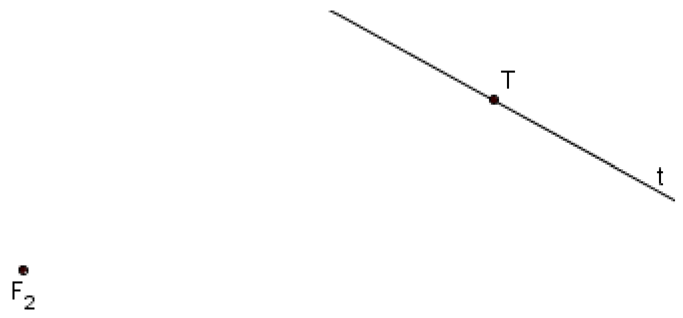
b) F_1, F_2, T sú kolineárne a T leží medzi F_1, F_2.

c) F_1, F_2, T sú nekolineárne.



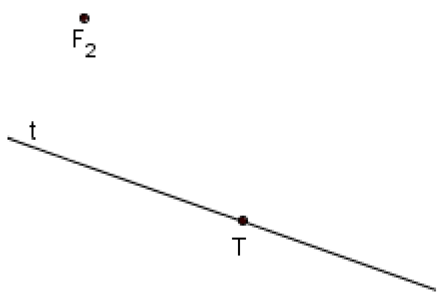
23) Zostrojte elipsu ak je dané ohnisko F_2, dotyčnica t s dotykovým bodom T a dĺžka hlavnej polosi je $a = 2j$.

a) $|F_2T| = 5j$, $|F_2t| = 3j$.



b) F_2T je kolmé na t, $|F_2t| = 3{,}5j$.

c) $|F_2T| = 3j$, $|F_2t| = 1{,}5j$.

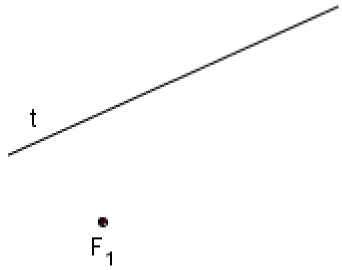


24) Zostrojte elipsu, ak je dané ohnisko F_1, dotyčnica t tak, že $|F_1t| = 1j$ a dĺžka hlavnej a vedľajšej osi:

a) $2a = 5j$, $2b = 4{,}5j$.

b) $2a = 5j$, $2b = 4j$.

c) $2a = 5j$, $2b = 3{,}5j$.



25) Zostrojte elipsu, ak je dané ohnisko F_2, dotyčnica t, pričom $|F_2t| = 5{,}5j$ a dĺžka hlavnej a vedľajšej osi:

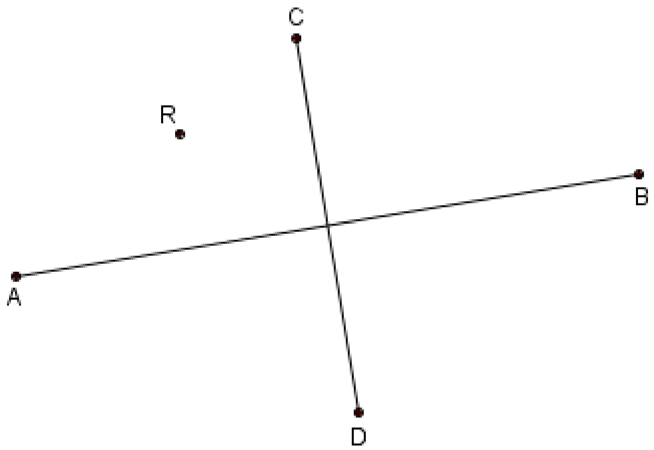
a) $2a = 6j$, $2b = 2{,}5j$.

b) $2a = 6j$, $2b = 5j$.

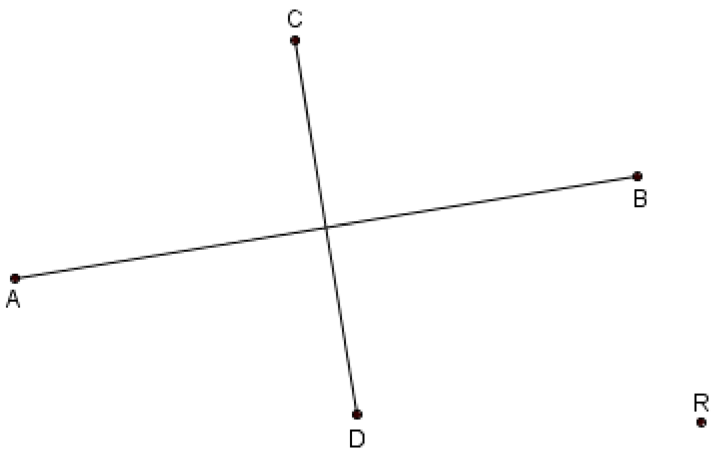
c) $2a = 6j$, $2b = 3{,}5j$.

26) Zostrojte dotyčnicu elipsy prechádzajúcu daným bodom R, bez jej vykreslenia, ak je daná dĺžka hlavnej polosi a a vedľajšej polosi b, $a > b$ (ľubovoľné hodnoty).

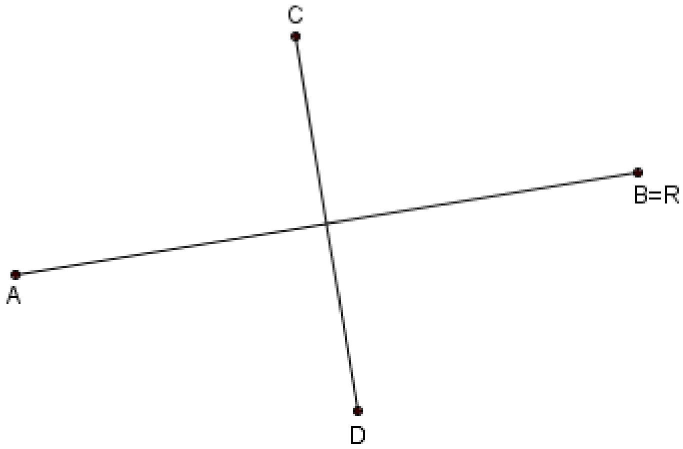
a) $R \in$ úsečke AC



b) $|BR| = 2{,}5j$, $|DR| = 3{,}5j$.

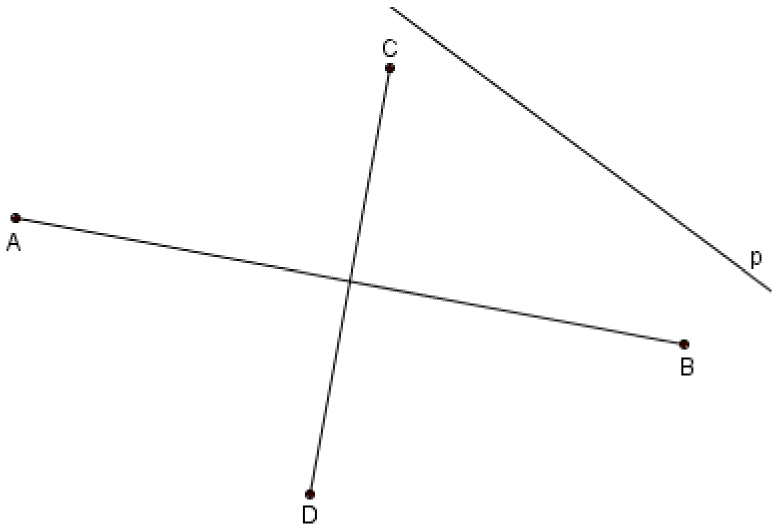


c) $B = R$.

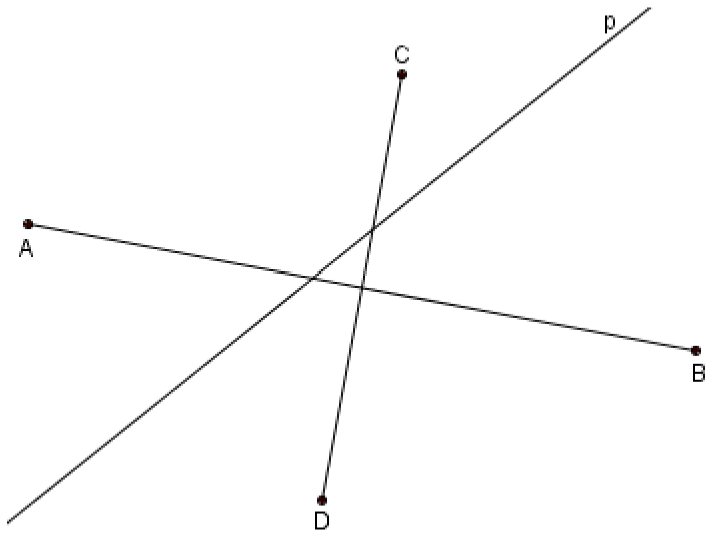


27) Zostrojte dotyčnicu elipsy rovnobežnú s danou priamkou *p*, bez jej vykreslenia, ak je daná dĺžka hlavnej polosi *a* a vedľajšej polosi *b*, $a > b$ (ľubovoľné hodnoty).

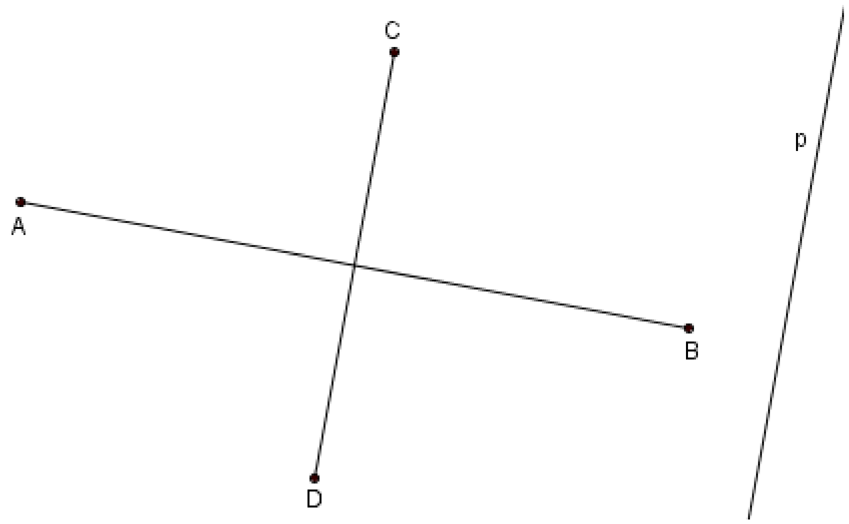
a) *p* nepretína štvoruholník *ABCD*



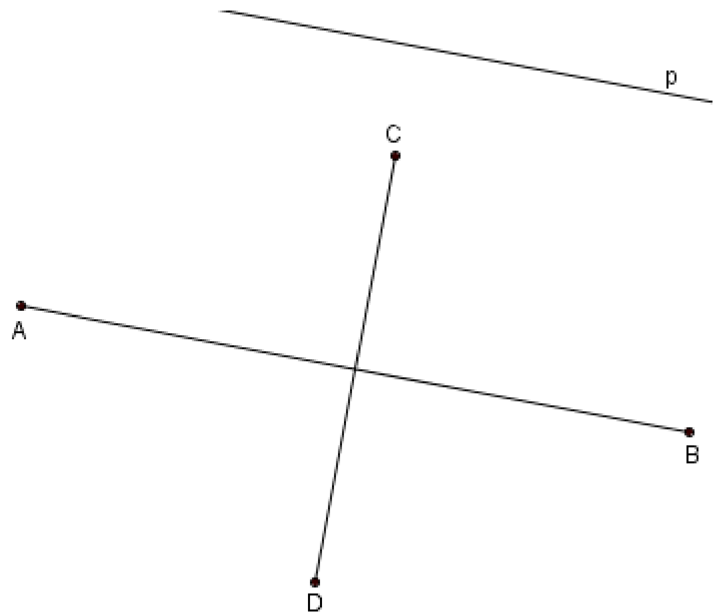
b) *p* pretína štvoruholník *ABCD* v stranách *CB*, *AD*.



c) *AB* je kolmá na *p*, *p* nepretína štvoruholník *ABCD*



d) *p* je rovnobežná s *AB* a *p* nepretína štvoruholník *ABCD*.



Literatúra

[1] Urban, A. 1982. *Deskriptivní geometrie I.* Praha : Alfa, 1982. 415 s.

[2] Dubec, A., Filip, J., Horák, S., Veselý, F., Vyčíchlo, F. 1952. *Deskriptívna geometria pre II. triedu gymnázií.* Bratislava : Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1952. 152 s. ISBN 301-16-521.

[3] Vojtašáková, M. 2008. *Kužeľosečka ako rovinný rez kružnicovej kužeľovej plochy*. Bakalárska práca (FMFI UK, Bratislava 2008)

[4] Harant, M., Lanta, O. 1965. *Deskriptívna geometria pre 2. a 3. ročník SVŠ*. Bratislava : Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1965.

[5] Pémová, M., Sklenáriková, Z. *Perspektívna afinita medzi dvoma rovinami* [online]. Bratislava [cit. 2016-05-11]. Dostupné na internete: https://flurry.dg.fmph.uniba.sk/webog/SuboryOG/kudlickova/1Perspektivna_afinita.pdf

[6] Sklenáriková, Z., Čižmár, J. 2005. *Elementárna geometria Euklidovskej roviny*. Bratislava : Vydavateľstvo UK, 2005. 2017 s. ISBN 80-223-2020-X

[7] Csiba, P. Vlastnosti softvéru GeoGebra a jeho používanie In Zborník sympózia o počítačovej geometrii SCG´2009. Bratislava : Vydavateľstvo STU, 2009. ISBN 978 80-227-3141-6, s.33-38.

[8] Mackovová, A. Elipsa v GeoGebre In Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2016: Zborník príspevkov. Bratislava, 2016 (odoslané do tlače)