2. Zbierka riešených príkladov

K riešeniu príkladov – konštrukčných úloh – použijeme jednotný postup, ktorý zahŕňa:

**Príklad**: Text úlohy s grafickým zadaním (odporúčané umiestnenie vstupných prvkov)

*Riešenie*: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: vstupné dáta, obrázok označený a)

Kroky konštrukcie:

1.
2. zdôvodnenie kroku je uvedené v prílohe [P]

 *n*.

Výstup: elipsa je určená prvkami požadovanými na bodovú konštrukciu a vykreslenie pomocou oskulačných kružníc, obrázok označený b)

Diskusia o počte riešení úlohy

*Riešenie*: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

 príklad číslo V riešení príkladu sa umožňuje:

* pre vstupné údaje, vyznačené modro, meniť ich polohu alebo veľkosť;
* poloha vstupných údajov nemusí byť rovnaká ako na obrázku a) tohto textu;
* pri existencii dvoch riešení vykresliť obe riešenia rôznou farbou – červená, zelená
* pri zmene hodnôt, resp. polôh vstupných údajov, úloha nemusí mať riešenie a v algebrickom okne je vypísaný text „*undefined*“ – nedefinované.

 Príklady v zbierke sú rozdelené do štyroch skupín:

I. Konštrukcia elipsy pomocou charakteristického trojuholníka:

1. [*ε* (*e*, *a* + *b*)](#príklad1)
2. [*ε* (*a*, *b* - *e*)](#príklad2).

II. Konštrukcia elipsy, ak poznáme: hodnoty *a*, *b*, *e*, a polohu bodov *A*, *B*, *C*, *D*, *F*1, *F*2, *M*

3. *[ε](#príklad3)* [(](#príklad3)*[A](#príklad3)*[,](#príklad3) *[C](#príklad3)*[,](#príklad3) *[a](#príklad3)*[)](#príklad3)

4. [*ε* (*F*1, *C*, *M*, *M* ≠ *C*)](#príklad4).

5. [*ε* (*F*1, *M*, *N*, *a*)](#príklad5)

6. [*ε* (F*1*, *C*, *e*)](#príklad6)

7. [*ε* (*F*1, *C*, *b*)](#príklad7)

8 . [*ε* (*F*1, *M*, *a*, *e*)](#príklad8)

9. [*ε* (*F*1, *M*, smer hlavnej osi, *a*)](#príklad9) .

III. Konštrukcia elipsy, ak je daná dotyčnica elipsy:

10. [*ε* (*F*1, *t*, *T* ϵ *t*, *a*)](#príklad10)

11. [ε (*F*1, *F*2, *t*)](#príklad11)

12. [*ε* (*o*, *F*1, *t*, *T* ϵ *t*)](#príklad12)

13. [*ε* (*F*1, *t*1, *t*2, *T*1 ϵ *t*1)](#príklad13)

14. [*ε* (*S*, *t*, *T* ϵ *t*, *a*)](#príklad14)

15. [*ε* (*A*, *B*, *t*)](#príklad15)

16. [*ε* (*F*1, *t*1, *t*2, *t*3)](#príklad16)

 17. [*ε* (*F*1, *t*1, *t*2, smer hlavnej osi)](#príklad17)

 18. [*ε* (*F*1, *M*, *t*, *a*)](#príklad18)

 19. [*ε* (*F*1, *M*, *t*, *a*)](#príklad19)

20. [*ε* (*S*, *t*1, *t*2, *a*)](#príklad20)

 21. [*ε* (*F*1, *t*, *a*, *b*)](#príklad21).

IV. Konštrukcia dotyčnice elipsy:

22. [*ε* (*F*1, *F*2, *T*), zostrojte *t* v bode *T*](#príklad22)

 23. [*ε* (*F*1, *F*2, *n*), zostrojte dotyčnicu](#príklad23)

 24. [*ε* (*AB*, *CD*), vonkajší bod *R*. Zostrojte dotyčnice z bodu *R* k elipse a body dotyku.](#príklad24)

 25. *ε* (*a*, *e*), priamka *p*. Zostrojte dotyčnice k elipse rovnobežné s priamkou *p* .

**I. Konštrukcia elipsy pomocou charakteristického trojuholníka.**

**Príklad 1.:** Zostrojte elipsu, ak excentricita elipsy je daná úsečkou |*EF*| a súčet dĺžok hlavnej a vedľajšej polosi je určený dĺžkou úsečky |*MN*|. (|*MN*| >|*EF*| = *a* + *b* > *e* )

*Riešenie:* a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: |*EF*| = *e*, |*MN*| = *a* + *b* (Obr. 1.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 1.b)

1. Zostrojíme úsečku *F*1*S* tak, že platí |*F*1*S*| = *e*.
2. Zostrojíme priamku *m* kolmú na priamku *F*1*S*  prechádzajúcu bodom *S*.
3. Na priamke *m* zostrojíme bod *U* pričom |*SU*| = *a* + *b*.
4. Zostrojíme os *o* úsečky *F*1*U*.
5. Vyznačíme *SU*∩*o*={*C*}.
6. Bod *F*2 leží na priamke *F*1*S* a (*F*1*F*2*S*) = -1.

Výstup: *ε* (*F*1, *F*2, *C*)

Diskusia: Úloha má práve jedno riešenie.

a) b)



Obr. 1.: Riešenie príkladu 1

*Riešenie :*b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 1](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_1.ggb)

**Príklad 2.:**Zostrojte elipsu, ak dĺžka hlavnej osi je daná úsečkou |*KL*| a rozdiel dĺžok vedľajšej polosi a excentricity je určený dĺžkou úsečky |*MN*|.

*Riešenie*: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: |*KL*| = *a*, |*MN*| = *b* – *e* (*b* ≠ *e*)(Obr. 2.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 2.b)

1. Zostrojíme úsečku *CU* tak, že |*CU*| = *b* – *e*.
2. Zostrojíme uhol |*CUX*| = 135°.
3. Zostrojíme kružnicu *k*(*C*, *a*).
4. Vyznačíme *k*∩*UX*={*F*1, *F*1´}.
5. Zostrojíme priamku *m*/*m´*  kolmú na priamku *CU* prechádzajúcu bodom *F*1/*F*1´.
6. Vyznačíme *m*∩*CU*={*S*}/*m´*∩*CU*={*S´*}.
7. Bod *F*2 leží na priamke *F*1*S* a (*F*1*F*2*S*) = -1.

Výstup: *b* > *e*: *ε* (*F*1, *F*2, *C*), *b* < *e*: *ε´*(*F*1´, *F*2´, *C*)

Diskusia: Úloha má práve dve riešenia.

a) b)



Obr. 2.: Riešenie príkladu 2.

*Riešenie:* b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 2](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_2.ggb)

**II. Konštrukcia elipsy, ak poznáme hlavnú os, resp. vedľajšiu os, resp. excentricitu a jeden bod elipsy.**

**Príklad 3.:** Zostrojte elipsu, ak je daný hlavný vrchol *A*, vedľajší vrchol *C* a dĺžka hlavnej polosi je určená dĺžkou úsečky |*KL*|. (|*AC*| > |*KL*| = *a*)

*Riešenie:* a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: hlavný vrchol *A*, vedľajší vrchol *C*, |*KL*| = *a* (Obr. 3.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 3.b)

1. Zostrojíme Talesovu kružnicu *τ* nad úsečkou *AC*.
2. Zostrojíme kružnicu *k*(*A*, *a*) [|*AS*| = *a*].
3. Vyznačíme *τ*∩*k*={*S, S´*}.
4. Hlavný vrchol *B*/*B´* leží na priamke *AS*/*AS´* a (*ABS*) = -1/(*AB´S´*) = -1.
5. Vedľajší vrchol *D*/*D´* leží na priamke *CS*/*CS´* a (*CDS*) = -1/(*CD´S´*) = -1.

Výstup: *ε* (*A*, *B*, *C*, *D*), *ε´* (*A*, *B*, *C´*, *D´*)

Diskusia: Úloha má vždy dve riešenia.

a) b)



Obr. 3.: Riešenie príkladu 3

*Riešenie:* b) **pomocou softvéru GeoGebra** 

[príklad 3](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_3.ggb)

**Príklad 4.:** Zostrojte elipsu *ε*, ktorá je určená ohniskom *F*1, vedľajším vrcholom *C* a jedným jej bodom *M* (*M*∉*F1C*).

*Riešenie:* a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko *F*1, vedľajší vrchol *C*, *M*∈*ε* (Obr. 4.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 4.b)

1. Zostrojíme kružnicu *k*(*C*, *a*) [ |*CF*1| = |*CF*2| = *a* ].
2. Na polpriamke *F*1*M* zostrojíme bod *Q* tak, že |*F*1*Q*| = 2*a* = 2|*F*1*C*|.
3. Zostrojíme kružnicu *l*(*M*, |*MQ*|).
4. Vyznačíme *k*∩*l*={*F*2, *F*2´}.

Výstup: elipsa *ε*  (*F*1, *F*2, *M*), *ε ´* (*F*1, *F*2´, *M*)

Diskusia: Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc *k*, *l*:

* *k*∩*l*={*F*2, *F*2´}, tak úloha má dve riešenia (Obr. 4.b) *ε*  (*F*1, *F*2, *M*), *ε´*  (*F*1, *F*2´, *M*),
* *k*∩*l*={*F*2}, tak úloha má jedno riešenie,
* *k*∩*l*=∅, tak úloha nemá riešenie.

a) b)





Obr. 4.: Riešenie príkladu 4

*Riešenie:* b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 4](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_4.ggb)

**Príklad 5.:** Zostrojte elipsu *ε*, ak je dané ohnisko *F*1, jej dva body *M*, *N* ( body *F*1, *M*, *N* sú nekolineárne) a dĺžka hlavnej polosi je určená dĺžkou úsečky *KL*.

*Riešenie:* a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko *F*1, dĺžka hlavnej polosi *a* = |*KL*|, *M*, *N* ∈ *ε* (Obr. 5.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 5.b)

1. Na polpriamke *F*1*M* zostrojíme bod *Q*, pričom |*F*1*Q*| = 2*a* = 2|*KL*|.
2. Na polpriamke *F*1*N* zostrojíme bod *P*, pričom |*F*1*P*| = 2*a* = 2|*KL*|.
3. Zostrojíme kružnicu *k*(*M*, |*MQ*|).
4. Zostrojíme kružnicu *l*(*N*, |*NP*|).
5. Vyznačíme *k*∩*l* = {*F*2, *F*2´}.

Výstup: elipsa *ε*  (*F*1, *F*2, M), *ε´*  (*F*1, *F*2´, *M*)

Diskusia: Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc *k*, *l*:

* *k*∩*l*={*F*2, *F*2´}, tak úloha má dve riešenia (Obr. 5.b) *ε*  (*F*1, *F*2, *M*), *ε´*  (*F*1, *F*2´, *M*),
* *k*∩*l*={*F*2}, tak úloha má jedno riešenie,
* *k*∩*l*=∅, tak úloha nemá riešenie.

a) b)



Obr. 5.: Riešenie príkladu 5

*Riešenie:* b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 5](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_5.ggb)

**Príklad 6.:** Zostrojte elipsu *ε*, ak je dané ohnisko *F*1, vedľajší vrchol elipsy *C* a excentricita elipsy je určená dĺžkou úsečky *EF*.

*Riešenie:* a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko *F*1, vedľajší vrchol *C*, *e* = |*EF*| (Obr. 6.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 6.b)

1. Zostrojíme kružnicu *k*(*C*, |*F*1*C*| = *a*).
2. Zostrojíme kružnicu *l*(*F*1, 2*e*).
3. Vyznačíme *k*∩*l* = {*F*2, *F*2 ´}.

Výstup: elipsa *ε*  (*F*1, *F*2, *C*), *ε´*  (*F*1, *F*2´, *C*)

Diskusia: Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc *k*, *l*:

* *k*∩*l*={*F*2, *F*2´}, tak úloha má dve riešenia (Obr. 6.b) *ε*  (*F*1, *F*2, *C*), *ε´*  (*F*1, *F*2´, *C*),
* *k*∩*l*={*F*2}, tak úloha má jedno riešenie,
* *k*∩*l*=∅, tak úloha nemá riešenie.

a) b)





Obr. 6.: Riešenie príkladu 6

*Riešenie:* b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 6](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_6.ggb)

**Príklad 7.:** Zostrojte elipsu *ε*, ak je dané ohnisko *F*1, vedľajší vrchol *C* a dĺžka vedľajšej polosi je určená úsečkou *PQ*. (|*F*1*C*| > |*PQ*| = *a* > *b*)

*Riešenie:* a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko *F*1, vedľajší vrchol *C*, *b* = |*PQ*| (Obr. 7.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 7.b)

1. Zostrojíme kružnicu *k*(*F*1, |*F*1*C*| = *a*).
2. Zostrojíme kružnicu *l*(*C*, 2*b*).
3. Vyznačíme *k*∩*l*={*D*, *D*´}.
4. Zostrojíme stred *S*/*S*´ úsečky *CD*/*CD´*, ktorý je aj stred elipsy.
5. Na priamke *F*1*S*/*F*1*S*´ zostrojíme ohnisko *F*2/*F*2´ tak, aby *S*/*S*´ bol stredom úsečky *F*1*F*2/*F*1*F*2´.

Výstup: elipsa *ε*  (*F*1, *F*2, *C*), *ε´*  (*F*1, *F*2´, *C*)

Diskusia: Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc *k*, *l*:

* *k*∩*l*={*D*, *D*´}, tak úloha má dve riešenia (Obr. 7.b) *ε*  (*F*1, *F*2, *C*), *ε´*  (*F*1, *F*2´, *C*),
* *k*∩*l*={*D*}, tak úloha má jedno riešenie,
* *k*∩*l*=∅, tak úloha nemá riešenie.

a) b)





Obr. 7.: Riešenie príkladu 7

*Riešenie:* b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 7](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_7.ggb)

**Príklad 8.:** Zostrojte elipsu *ε*, ak je dané ohnisko *F*1, jeden jej bod *M*, dĺžka hlavnej polosi je určená úsečkou *KL* a excentricita elipsy je určená úsečkou *EF*. (|*KL*| > |*EF*| = *a* > *e* )

*Riešenie:* a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko *F*1, *M* ∈ *ε*, *a* = |*KL*|, *e* = |*EF*| (Obr. 8.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 8.b)

1. Na polpriamke *F*1*M* zostrojíme bod *Q*, pričom |*F*1*Q*| = 2*a.*
2. Zostrojíme kružnicu *k*(*M*, |*MQ*|).
3. Zostrojíme kružnicu *l*(*F*1, 2*e*).
4. Vyznačíme body *k*∩*l* = {*F*2, *F*2´}.

Výstup: elipsa *ε*  (*F*1, *F*2, *M*), *ε´* (*F*1, *F*2´, *M*)

Diskusia: Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc *k*, *l*:

* *k*∩*l*={*F*2, *F*2´}, tak úloha má dve riešenia (Obr. 8.b) *ε*  (*F*1, *F*2, *M*), *ε´*  (*F*1, *F*2´, *M*),
* *k*∩*l*={*F*2}, tak úloha má jedno riešenie,
* *k*∩*l*=∅, tak úloha nemá riešenie.

a) b)



Obr. 8.: Riešenie príkladu 8

*Riešenie:* b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 8](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_8.ggb)

**Príklad 9.:** Zostrojte elipsu *ε*, ak je dané ohnisko *F*1, jeden jej bod *M* (nie vrchol), hlavná os elipsy patrí do osnovy priamky *s*  a dĺžka hlavnej polosi je určená úsečkou *KL*.

*Riešenie:* a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko *F*1, *M* ∈ *ε*, priamka *s*, *a* = |*KL*| (Obr. 9.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 9.b)

1. Zostrojíme priamku *o* rovnobežnú s priamkou *s* prechádzajúcu ohniskom *F*1.
2. Na polpriamke *F*1*M* zostrojíme bod *Q* tak, že |*F*1*Q*| = 2*a.*
3. Zostrojíme kružnicu *k*(*M*, |*MQ*|).
4. Vyznačíme bod *o*∩*k* = {*F*2, *F*2´}.

Výstup: elipsa *ε*  (*F*1, *F*2, *M*), *ε´*  (*F*1, *F*2´, *M*)

Diskusia: Počet riešení závisí od vzájomnej polohy osi *o* a kružnice *k*:

* *o*∩*k*={*F*2, *F*2´}, tak úloha má dve riešenia (Obr. 9.b) *ε*  (*F*1, *F*2, *M*), *ε´*  (*F*1, *F*2´, *M*),
* *o*∩*k*={*F*2}, tak úloha má jedno riešenie,
* *o*∩*k*=∅, tak úloha nemá riešenie.

a) b)



Obr. 9.: Riešenie príkladu 9

 *Riešenie:* b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 9](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_9.ggb)

**III. Konštrukcia elipsy, ak je daná dotyčnica elipsy *t*.**

**Príklad 10.:** Zostrojte elipsu ak je dané ohnisko *F*1, dotyčnica *t* s dotykovým bodom *T* a dĺžka hlavnej polosi je určená dĺžkou úsečky |*KL*|.

*Riešenie:* a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko *F*1, dotyčnica *t*, dotykový bod *T* ∈ *t*, |*KL*| = *a* (Obr. 10.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 10.b)

1. Na polpriamke *F*1*T* zostrojíme bod *Q* tak, že |*F*1*Q*| = 2*a* = 2|*KL*|.
2. Zostrojíme ohnisko *F*2 ako bod súmerne združený podľa dotyčnice *t* s bodom *Q*.

Výstup: *ε* (*F*1, *F*2, *T* )

Diskusia: Úloha má práve jedno riešenie.

a) b)



Obr. 10.: Riešenie príkladu 10

*Riešenie:* b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 10](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_10.ggb)

**Príklad 11.:** Dané sú ohniská *F*1, *F*2 elipsy a dotyčnica *t* elipsy (body *F*1, *F*2 ležia v jednej polrovine vzhľadom na dotyčnicu). Zostrojte dotykový bod *T* dotyčnice *t*.

*Riešenie:*  a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohniská *F*1, *F*2, dotyčnica elipsy *t* (*F*1, *F*2 ∉ *t*) (Obr. 11.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 11.b)

1. Zostrojíme bod *Q*, ktorý je súmerne združený s ohniskom *F*2 podľa dotyčnice *t*. Bod *Q* je bodom určujúcej kružnice elipsy *g*1(*F*1, 2*a*).
2. Vyznačíme *F*1*Q*∩*t* = {*T*}.

Výstup: dotykový bod *T* dotyčnice *t*

Diskusia: Úloha má práve jedno riešenie.

a) b)





Obr. 11.: Riešenie príkladu 11

*Riešenie:* b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 11](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_11.ggb)

**Príklad 12.:** Daná je priamka *o*, na ktorej leží hlavná os elipsy, ohnisko elipsy *F*1 a dotyčnica *t*  s dotykovým bodom *T*. Zostrojte elipsu *ε*.

*Riešenie:*  a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko *F*1, dotyčnica *t* s dotykovým bodom *T*, hlavná os *o* (Obr. 12.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 12.b)

1. Zostrojíme bod *Q* súmerne združený s ohniskom *F*1 podľa dotyčnice *t*.
2. Zostrojíme priamku *QT.*
3. Vyznačíme bod *QT*∩*o*={*F*2}.

Výstup: elipsa *ε* (*F*1, *F*2, *T*)

Diskusia: Úloha má práve jedno riešenie.

a) b)





Obr. 12.: Riešenie príkladu 12

 *Riešenie:* b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 12](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_12.ggb)

**Príklad 13.:** Dané je ohnisko elipsy *F*1, dotyčnice *t*1, *t*2 elipsy a nadotyčnici *t*1 dotykový bod *T*1 (*F*1 leží medzi *t*1, *t*2). Zostrojte elipsu *ε*.

*Riešenie:* a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko *F*1, dotyčnice *t*1, *t*2, dotykový bod *T*1 ∈ *t*1 (Obr. 13.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 13.b)

1. Zostrojíme body *Qi* súmerne združené s ohniskom *F*1 podľa dotyčníc *ti*, *i* = 1, 2.
2. Zostrojíme os *o* úsečky *Q*1*Q*2.
3. Zostrojíme sprievodič *F*1*T*1.
4. Zostrojíme priamku *Q*1*T*1.
5. Bod *Q*1*T*1∩*o*={*F*2} je druhé ohnisko elipsy.

Výstup: elipsa *ε* (*F*1, *F*2, *T*1)

Diskusia: Úloha má práve jedno riešenie.

a) b)

**

**

Obr. 13.: Riešenie príkladu 13

*Riešenie:* b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 13](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_13.ggb)

**Príklad 14.:** Zostrojte elipsu *ε*, ak je daný jej stred *S*, dotyčnica elipsy *t* s dotykovým bodom *T* a dĺžka hlavnej polosi je určená dĺžkou úsečky |*KL*|.

*Riešenie:* a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: stred *S*, dotyčnica elipsy *t*, dotykový bod *T* (*T*∈*t*), *a* = |*KL*| (Obr. 14.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 14.b)

1. Zostrojíme vrcholovú kružnicu *v*(*S*, *a*).
2. Zostrojíme body *v*∩*t*={*P*1, *P*2}.
3. Zostrojíme kolmice *k*1, *k*2 v bodoch *P*1, *P*2 na dotyčnicu *t*.
4. Zostrojíme priamky *SP*1, *SP*2.
5. Zostrojíme priamku *m*1 rovnobežnú s priamkou *SP*1 idúcu bodom *T*.
6. Označíme bod *k*2∩*m*1={*F*2}.
7. Ohnisko *F*1 leží na priamke *F*2*S* a (*F*1*F*2*S*) = -1, resp. zostrojíme priamku *m*2 bodom *T* rovnobežnú s priamkou *SP*2 a {*F*1}=*m*2∩*k*1.

Výstup: elipsa *ε* (*F*1, *F*2, *T*)

Diskusia: Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružnice *v* a dotyčnice *t*:

* *v*∩*t* = { *P*1, *P*2}, tak úloha má práve jedno riešenie (Obr. 14.b),
* *v*∩*t* = *P* alebo ∅, tak úloha nemá riešenie.
1. b)





Obr. 14.: Riešenie príkladu 14

*Riešenie:* b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 14](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_14.ggb)

**Príklad 15.:** Zostrojte elipsu *ε*, ak sú dané jej hlavné vrcholy *A*, *B* a dotyčnica *t* (body *A*, *B* ležia v jednej polrovine vzhľadom na dotyčnicu *t*)

*Riešenie*: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: hlavné vrcholy *A*, *B*, dotyčnica *t* (Obr. 15.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 15.a)

1. Zostrojíme stred *S* hlavnej osi *AB*, je to stred elipsy.
2. Zostrojíme vrcholovú kružnicu *v*(*S*, *a* = |*SA*|) .
3. Vyznačíme body *v*∩*t*={*P*1, *P*2}.
4. Zostrojíme kolmicu *k*i na dotyčnicu *t* bodom *P*i, *i* = 1, 2.
5. Určíme body *k*i∩*AB*={*F*i}, *i* = 1,2, sú to ohniská elipsy.

Výstup: elipsa *ε* (*F*1, *F*2, *A*)

Diskusia: Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružnice *v* a dotyčnice *t*:

* *v*∩*t* = { *P*1, *P*2}, tak úloha má práve jedno riešenie (Obr. 15.b),
* *v*∩*t* = ∅, tak úloha nemá riešenie.

a) b)





Obr. 15.: Riešenie príkladu 15

*Riešenie*: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 15](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_15.ggb)

**Príklad 16.:** Zostrojte elipsu *ε,*  ak sú dané tri navzájom rôznobežné dotyčnice *t*1, *t*2, *t*3 a ohnisko *F*1.

*Riešenie:* a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko *F*1, dotyčnice *t*1, *t*2, *t*3 (Obr. 16.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 16.b) pomocou vrcholovej kružnice

1. Zostrojíme kolmice *ki* z ohniska *F*1 na dotyčnice *ti*, *i* = 1, 2, 3.
2. Vyznačíme body *ki*∩*ti* = {*Pi*}, *i* = 1, 2, 3.
3. Zostrojíme osi *o*12, *o*23, *o*13 úsečiek určených bodmi *Pi*, *i* = 1, 2, 3.
4. Vyznačíme bod *o*12∩*o*23∩*o*13={*S*}.
5. Ohnisko *F*2 leží na priamke *F*1*S* a (*F*1*F*2*S*) = -1.
6. Zostrojíme dotykový bod *Ti* dotyčnice *ti*, príklad 11.

Výstup: elipsa *ε* (*F*1, *F*2, *Ti*)

Diskusia: Úloha má práve jedno riešenie.

a) b)



Obr. 16.: Riešenie príkladu 16

*Riešenie:* b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 16](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_16.ggb)

**Príklad 17.:** Zostrojte elipsu *ε*, ak je dané ohnisko *F*1, dvojica rôznobežných dotyčníc elipsy *t*1, *t*2 a smer hlavnej osi elipsy patrí do osnovy priamky *s*.

*Riešenie:* a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko *F*1, dotyčnice *t*1, *t*2, smer hlavnej osi *s* (Obr. 17.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 17.b) pomocou vrcholovej kružnice

1. Zostrojíme os *o* rovnobežnú s priamkou *s* idúcu ohniskom *F*1.
2. Zostrojíme kolmice *ki* prechádzajúce ohniskom *F*1 na dotyčnice *ti*, *i* = 1, 2.
3. Vyznačíme body *ki*∩*ti*={*Pi*}.
4. Zostrojíme os *m* úsečky *P*1*P*2.
5. Zostrojíme bod *m*∩*o*={*S*}.
6. Ohnisko *F*2 leží na hlavnej osi *o* a (*F*1*F*2*S*) = -1.
7. Zostrojíme dotykový bod *Ti* dotyčnice *ti*, podľa príkladu 11.

Výstup: elipsa *ε* (*F*1, *F*2, *Ti*)

Diskusia: Úloha má práve jedno riešenie.

a) b)



Obr. 17.: Riešenie príkladu 17

*Riešenie:* b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 17](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_17.ggb)**Príklad 18.:** Zostrojte elipsu, ak je dané ohnisko *F*1, bod elipsy *M*, dotyčnica *t* (*M*∉*t*) a dĺžka hlavnej polosi je určená dĺžkou úsečky |*KL*| (body *F*1, *M* ležia v jednej polrovine vzhľadom na dotyčnicu *t*).

*Riešenie:* a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko *F*1, *M*∈*ε*, dotyčnica *t*, |*KL*| = *a* (Obr. 18.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 18.b)

1. Zostrojíme bod *R* súmerne združený s ohniskom *F*1 podľa dotyčnice *t*.
2. Zostrojíme kružnicu *k*(*R*, 2*a*).
3. Na polpriamke *F*1*M* zostrojíme bod *Q* tak, že |*F*1*Q*| = 2*a* = 2|*KL*|.
4. Zostrojíme kružnicu *l*(*M*, |*MQ*|).
5. Vyznačíme *k*∩*l*={*F*2, *F*2´}.

Výstup: elipsa *ε*  (*F*1, *F*2, *M*), *ε ´* (*F*1, *F*2´, *M*)

Diskusia: Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc *k*, *l*:

* *k*∩*l*={*F*2, *F*2´}, tak úloha má dve riešenia (Obr. 18.b) *ε*  (*F*1, *F*2, *M*), *ε´*  (*F*1, *F*2´, *M*),
* *k*∩*l*={*F*2}, tak úloha má jedno riešenie,
* *k*∩*l*=∅, tak úloha nemá riešenie.

a) b)

Obr. 18.: Riešenie príkladu 18

*Riešenie:* b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 18](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_18.ggb)

**Príklad 19.:** Zostrojte elipsu, ak je dané ohnisko *F*1, vedľajší vrchol *C* a dotyčnica elipsy *t* (*F*1, *C* ležia v jednej polrovine vzhľadom na dotyčnicu *t*).

*Riešenie:* a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko *F*1, vedľajší vrchol *C*, dotyčnica *t* (Obr. 19.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 19.b)

1. Zostrojíme bod *R* súmerne združený s ohniskom *F*1 podľa dotyčnice *t*.
2. Zostrojíme kružnicu *k*(*R*, 2|*F*1*C*| = 2*a*).
3. Zostrojíme kružnicu *l*(*C*, *a*).
4. Určíme *k*∩*l*={*F*2, *F*2´}.

Výstup: elipsa *ε*  (*F*1, *F*2, *C*), *ε´*  (*F*1, *F*2´, *C*)

Diskusia: Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc *k*, *l*:

* *k*∩*l*={*F*2, *F*2´}, tak úloha má dve riešenia (Obr. 19.b) *ε*  (*F*1, *F*2, *C*), *ε´*  (*F*1, *F*2´, *C*),
* *k*∩*l*={*F*2}, tak úloha má jedno riešenie,
* *k*∩*l*=∅, tak úloha nemá riešenie.

a) b)





Obr. 19.: Riešenie príkladu 19

*Riešenie:* b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 19](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_19.ggb)

**Príklad 20.:** Zostrojte elipsu, ak je daný jej stred *S*, dotyčnice *t*1, *t*2 (*S* leží medzi *t*1, *t*2) a dĺžka hlavnej polosi je určená dĺžkou úsečky |*KL*|.

*Riešenie:* a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: stred *S*, dotyčnice *t*1, *t*2, |*KL*| = *a* (Obr. 20.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 20.b)

1. Zostrojíme kružnicu *v*(*S*, *a*).
2. Vyznačíme body *t*1∩*v*={*P*1, *P*2}, *t*2∩*v*={*P*1´,*P*2´} [body *P*1, *P*2/*P*1´,*P*2´ sú päty kolmíc zostrojených z ohnísk *F*1, *F*2 na dotyčnicu *t*1, *t*2; veta 2.6.] .
3. Zostrojíme kolmice *ki*, *ki*´,*i*=1,2 v bodoch *Pi*, *Pi*´.
4. Vyznačíme body *k*1∩*k*1´={*F*1}, *k*2∩*k*2´={*F*2}.
5. Hlavné vrcholy *A*, *B* elipsy sú priesečníky priamky *F*1*F*2 s kružnicou *v*.

Výstup: elipsa *ε*  (*F*1, *F*2, *A*)

Diskusia: Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružnice *v*a dotyčníc *ti*:

* *v*∩*ti* = {*Pi*, *Pi*´} tak úloha má práve jedno riešenie (Obr. 20.b),
* *v*∩*ti* = {*P*1} alebo *v*∩*ti* = ∅ tak úloha nemá riešenie.

a) b)



Obr. 20.: Riešenie príkladu 20

*Riešenie:* b) **pomocou softvéru GeoGebra**

 [príklad 20](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_20.ggb)

**Príklad 21.:** Zostrojte elipsu, ak je dané ohnisko *F*1, dotyčnica *t*, dĺžka hlavnej osi je určená dĺžkou úsečky |*KL*| a dĺžka vedľajšej osi je určená dĺžkou úsečky |*PQ*|

(|*KL*| > |*PQ*| = 2*a* > 2*b*).

*Riešenie:* a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko *F*1, dotyčnica *t*, |*KL*| = 2*a*, |*PQ*| = 2*b* (Obr. 21.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 21.b)

1. Zostrojíme pravouhlý trojuholník *MNO* s pravým uhlom pri vrchole *M*, s preponou |*ON*| *=* 2*a* a odvesnou |*MO*| *=* 2*b*.
2. Zostrojíme bod *R* súmerne združený s ohniskom *F*1 podľa dotyčnice *t*.
3. Zostrojíme kružnicu *k*(*R*, 2*a*).
4. Zostrojíme kružnicu *l*(*F*1, 2*e*).
5. Vyznačíme *k*∩*l* = {*F*2, *F*2´}.
6. Zostrojíme dotykový bod dotyčnice *t,* podľa príkladu 11.

Výstup: *ε* (*F*1, *F*2, *T*), *ε´* (*F*1, *F*2´, *T´*)

Diskusia: Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc *k*, *l*:

* *k*∩*l*={*F*2, *F*2´}, tak úloha má dve riešenia (Obr. 21.b) *ε*  (*F*1, *F*2, *T*), *ε´*  (*F*1, *F*2´, *T*),
* *k*∩*l*={*F*2}, tak úloha má jedno riešenie,
* *k*∩*l*=∅, tak úloha nemá riešenie.

a) b)



Obr. 21.: Riešenie príkladu 21

*Riešenie:* b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 21](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_21.ggb)

**IV. Konštrukcia dotyčnice elipsy.**

**Príklad 22.:**  Zostrojte dotyčnicu k nenarysovanej elipse v jej bode *T*, ak sú dané obe ohniská.

*Riešenie:* a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohniská *F*1, *F*2, *T* ∈ *ε*, (*T*∉*F*1*F*2) (Obr. 22.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 22.b)

1. Zostrojíme sprievodiče bodu *T*.
2. Zostrojíme priamku *t*, ako os vonkajšieho uhla sprievodičov bodu *T*.

Výstup: dotyčnica elipsy v bode *T*

Diskusia: Úloha má práve jedno riešenie.

a) b)



Obr. 22.: Riešenie príkladu 22

*Riešenie:* b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 22](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_22.ggb)

**Príklad 23.:** Dané sú ohniská *F*1, *F*2 a normála *n* elipsy (body *F*1, *F*2 ležia v rôznych polrovinách vzhľadom na normálu *n*). Zostrojte elipsu *ε* a dotyčnicu *t* elipsy v bode, v ktorom je zostrojená normála.

*Riešenie:* a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohniská *F*1, *F*2, normálna *n* (Obr. 23.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 23.b)

1. Zostrojíme bod *R*, ktorý je súmerne združený s ohniskom *F*2 podľa normály *n*.
2. Zostrojíme priamku *F*1*R.*
3. Vyznačíme bod *F*1*R*∩*n* = {*T*}, *T* ∈ *ε.*
4. V bode *T* zostrojíme kolmicu *t* na normálu *n*, je to dotyčnica elipsy v bode *T.*

Výstup: elipsa *ε*, dotyčnica elipsy

Diskusia: Úloha má práve jedno riešenie.

a) b)



Obr. 23.: Riešenie príkladu 23

*Riešenie:* b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 23](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_23.ggb)

**Príklad 24.:** Zostrojte dotyčnicu elipsy prechádzajúcu vonkajším bodom *R* elipsy bez jej vykreslenia, ak sú dané hlavné a vedľajšie vrcholy elipsy.

*Riešenie:* a1) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: hlavné vrcholy *A*, *B*, vedľajšie vrcholy *C*, *D*, vonkajší bod elipsy *R* (Obr. 24.a)

Postup konštrukcie: použitá určujúca kružnica elipsy (Obr. 24.b)

* Zostrojíme ohniská *F*1, *F*2.
* Zostrojíme kružnicu *k*(*R*, |*F*2*R*|).
* Zostrojíme určujúcu kružnicu *g*1(*F*1, 2*a*).
* Vyznačíme *k*∩*g*1={*Q*1, *Q*2}.
* Zostrojíme body *O*1, *O*2 tak, že (*F*2*QO*)= -1 a (*F*2*QO´*)= -1.
* Zostrojíme dotyčnice *t*1=*RO*1, *t*2=*RO*2.
* Zostrojíme priamky *F*1*Q*1, *F*2*Q*2.
* Vyznačíme *ROi*∩*F*1*Qi*={*Ti*}, *i* = 1, 2.

Diskusia: Počet riešení závisí od polohy bodu *R*:

* *R* vonkajší bod, tak úloha má dve riešenia (Obr. 24.b)
* *R* bod elipsy, tak úloha má práve jedno riešenie,
* *R* je vnútorným bodom elipsy, tak úloha nemá riešenie.

a) b)

Obr. 24.: Riešenie príkladu 24

*Riešenie:* b1) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 24 – určujúca kružnica](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_24-urcujuca_kruznica.ggb)

a2) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: hlavné vrcholy *A*, *B*, vedľajšie vrcholy *C*, *D*, vonkajší bod elipsy *R* (Obr. 24.a)

Postup konštrukcie: použitá vrcholová kružnica elipsy (Obr. 24.c)

* Zostrojíme ohniská *F*1, *F*2.
* Zostrojíme bod *O* tak, že (*RF*2*O*) = -1.
* Zostrojíme Talesovu kružnicu *τ* (*O*, |*RO*|).
* Zostrojíme vrcholovú kružnicu *v*(*S*, *a*).
* Vyznačíme *k*∩*v* = {*P*1, *P*2}.
* Zostrojíme dotyčnice elipsy *ti* = *RPi*, *i* = 1, 2.
* Zostrojíme body *Qi*, *i* = 1, 2 súmerne združené s ohniskom *F*2 podľa dotyčníc *ti*.
* Zostrojíme priamky *F*1*Qi*.
* Vyznačíme *ti*∩*F*1*Qi*={*Ti*}.

Výstup: dotyčnice *t*1, *t*2 elipsy *ε* prechádzajúce vonkajším bodom *R* elipsy

Diskusia: Počet riešení závisí od polohy bodu *R*:

* *R* vonkajší bod, tak úloha má dve riešenia (Obr. 24. c)
* *R* bod elipsy, tak úloha má práve jedno riešenie,
* *R* je vnútorným bodom elipsy, tak úloha nemá riešenie.



Obr. 24.: Riešenie príkladu 24

*Riešenie:* b2) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 24 – vrcholová kružnica](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_24-vrcholova_kruznica.ggb)

**Príklad 25.:** Zostrojte dotyčnice elipsy rovnobežné s danou priamkou *p*, bez vykreslenia elipsy, ak sú dané jej hlavné a vedľajšie vrcholy.

*Riešenie:* a1) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: hlavné vrcholy *A*, *B*, vedľajšie vrcholy *C*, *D*, priamka *p* (Obr. 25.a)

Postup konštrukcie: použitá určujúca kružnica elipsy (Obr. 25.b)

* Zostrojíme priamku *k* kolmú na danú priamku *p* prechádzajúcu ohniskom *F*2.
* Zostrojíme určujúcu kružnicu *g*1(*F*1, 2*a*).
* Vyznačíme *g*1∩*k*={*Q*1, *Q*2}.
* Zostrojíme body *Oi*, *i*=1,2 úsečky *F*2*Qi*.
* Zostrojíme priamky *ti* prechádzajúce bodmi *Oi*, *i* = 1, 2 rovnobežné s priamkou *p*.
* Určíme *F*1*Qi*∩*ti* = {*Ti*}.

Výstup: dotyčnice *t*1, *t*2 elipsy *ε* rovnobežné s danou priamkou *p*

Diskusia: Úloha má vždy dve riešenia.

a)

b)

Obr. 25.: Riešenie príkladu 25

*Riešenie:* b1) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 25 – určujúca kružnica](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_25-urcujuca_kruznica.ggb)

*Riešenie:* a2) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: hlavné vrcholy *A*, *B*, vedľajšie vrcholy *C*, *D*, priamka *p* (Obr. 25.a)

Postup konštrukcie: pomocou vrcholovej kružnice elipsy (Obr. 25.c)

* Zostrojíme ohniská *F*1, *F*2.
* Zostrojíme priamku *k* kolmú na danú priamku *p* prechádzajúcu ohniskom *F*2.
* Zostrojíme vrcholovú kružnicu *v*(*S*,*a*).
* Vyznačíme body *v*∩*k*={*P*1, *P*2}.
* Zostrojíme priamky *ti* prechádzajúce bodmi *Pi*, *i* = 1, 2 rovnobežné s priamkou *p*.
* Zostrojíme body *Qi*, *i* = 1, 2 ktoré sú súmerne združené s ohniskom *F*2 podľa dotyčníc *ti*. Body *Qi* sú bodmi riadiacej kružnice elipsy *g*1(*F*1,2*a*).
* Zostrojíme *F*1*Qi*∩*ti*={*Ti*}.

Výstup: dotyčnice *t*1, *t*2 elipsy *ε* rovnobežné s danou priamkou *p*

Diskusia: Úloha má vždy dve riešenia.



c)

Obr. 25.: Riešenie príkladu 25

*Riešenie:* b2) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 25 – vrcholová kružnica](Zbierka_riesenych_uloh/priklad_25-vrcholova_kruznica.ggb)