

8/IV/1995

298 - 099/05

Technická univerzita Zvolen
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie SvF STU Bratislava
Katedra operačného výskumu a ekonometrie FHI EU Bratislava
Technická univerzita Košice

Zborník prednášok

13. sympózia o algoritmoch

ALGORITMY '95

TS 195

ALGORITMY

30. mája - 2. júna 1995

Krpáčovo - Nízke Tatry

G²- hladké interpolačné Catmullove - Romove splajnové krvky
RNDr. Mária Bohdalová
FM UK
Staré Grunty 55, Bratislava

1. Úvod

V súčasnosti poznáme rôzne splajnové techniky vhodné pre účely CAGD, pre navrhovanie, modelovanie, atď. Pre praktické aplikácie je žiaduce, aby konštruované krvky alebo plochy mali vlastnosť lokálnosti, mali tvarovacie parametre na dodatočné zmeny tvaru výslednej krvky alebo plochy, boli aproximačné alebo interpolačné, jednoducho a rýchlo sa výčisľovali. Trieda splajnových krviek, ktorá spĺňa všetky tieto požiadavky je trieda Catmullovych-Romovych krviek [1].

Catmul a Rom pri definovaní krviek vychádzali z klasickej definície splajnových krviek.

Splajnovú krvku určujeme postupnosťou riadiacich vrcholov V_0, V_1, \dots, V_m , množinou bázových funkcií $W_0(t), W_1(t), \dots, W_m(t)$ a jej body splňajú vyjadrenie

$$(1) \quad Q(t) = \sum_{i=0}^m V_i W_i(t).$$

Catmul a Rom vo svojej teórii nahradili v (1) riadiace vrcholy V_i vektorovými interpolačnými funkciemi $P_i(t)$. Funkcie $P_i(t)$ konštruovali tak, aby každá interpolovala $r+1$ riadiacich vrcholov $V_i, V_{i+1}, \dots, V_{i+r}$, pre isté nezáporné číslo r . Po tejto úprave vzťah (1) nadobudol tvar:

$$(2) \quad Q(t) = \sum_{i=0}^{m-r} P_i(t) W_i(t).$$

Krvku $Q(t)$ definovanú vzťahom (2) teda vytvorili spojením dvoch typov krviek - interpolačných, definovaných vektorovými funkciemi $P_i(t)$ a bázových, definovaných vektorovými funkciemi $W_i(t)$, pre istý obor parametra t . Tako definované krvky získali rad zaujímavých vlastností. Napr. ak $r=0$ tak, funkcia $P_i(t)$ interpoluje práve jeden vrchol V_i , tzn. funkcia $P_i(t)$ je konštantná, nezávisí od parametra t a vzťah (2) je zhodný so vzťahom (1). Z uvedených úvah je teda zrejmé, že Catmullove-Romove splajnové krvky sú zovšeobecnením známych aproximačných krviek - Bézierových, B-splajnových a Beta splajnových. Naviac Catmull a Rom ukázali, že ak bázové funkcie sú nenulové nad k intervalmi parametra t , tak splajn daný vzťahom (2) je aproximačný pre $r < k-2$ a interpolačný v ostatných prípadoch.

Predpokladajme teraz, že

- i -ty segment krvky $Q_i(t)$ je definovaný nad sprava otvoreným intervalom $(i, i+1)$
- bázové funkcie $W_i(t)$ majú *lokálny nosič*, tzn. sú nenulové nad k intervalmi parametra t
- bázové funkcie $W_i(t)$ splňajú podmienku *váženého priemeru*:

$$\sum_{i=0}^m W_i(t) = 1 \quad t \in (0, m)$$

- interpolačné funkcie $P_i(t)$ sú konštruované nasledovne :

$P_i(q) = V_q$ pre $q = i, i+1, i+r$
 Potom i -ty segment $Q_i(t)$ krvky $Q(t)$ zapišeme nasledovne :

$$Q_i(t) = \sum_{j=-k+1}^0 P_{i+j}(t) W_{i+j}(t) \quad t \in (t_i, t_{i+1}).$$

Je zrejmé, že trieda Catmullovych-Romovych splajnových krviek je veľmi bohatou triedou.

My sa v ďalšom sústredíme na problematiku výčisľovania G^2 hladkých Catmullovych-Romovych splajnových krviek, ktorých segmenty interpolujú tri za sebou idúce riadiace vrcholy, tzn. $r=2$. V ďalšom texte sa budeme odvolávať na tieto krvky ako na $(G^2, 2)$ C-R splajnové krvky.

2. Vyčisľovanie $(G^2, 2)$ Catmullovych-Romovych splajnových krviek

Problematikou výčisľovania geometricky hladkých Catmullovych-Romovych splajnových krviek sa zaoberali Farin a Boehm. Konštrukcie ktoré vytvorili nájdeme v [2]. Podstata Farinových-Boehmových konštrukcií spočíva v tom, že každý segment geometricky hladkých Catmullovych-Romovych splajnových krviek popísali Bézierovou krvkou. Presnejšie, skonštruovali zloženú Bézierovu krvku, ktorá opisovala geometricky hladkú Catmullovu-Romovu krvku. Farinove a Boehmove konštrukcie majú jasnú geometrickú interpretáciu, ale vďaka tomu, že konštruovali zloženú Bézierovu krvku, vlastnosť lokálnosti Catmullových-Romových splajnov značne oslabili. Naviac, ich prístup nie je možné jednoducho aplikovať na výčislenie plôch.

V tomto príspievku ukážeme, ako možno využiť Farinov a Boehmov prístup na nájdenie maticového vyjadrenia i -teho segmentu $(G^2, 2)$ C-R splajnovej krvky.

Farin a Boehm ukázali v [2], že na skonštruovanie $(G^2, 2)$ C-R splajnovej krvky je potrebné vyriešiť nasledujúce dva problémy :

1. ako skonštruovať G^2 hladké bázové funkcie
2. ako skonštruovať G^2 hladké interpolačné funkcie.

Riešenie prvého problému poznáme, pretože stačí použiť G^2 hladké Beta splajnové bázové funkcie. Druhý problém vyriešili Farin a Boehm v [2]. V stručnosti teraz popišme ich riešenie.

3. Konštrukcia G^2 hladkých interpolačných funkcií.

Pripomeňme si, že funkcie $P_i(t)$ sú vektorové funkcie a konštruuujeme ich tak, aby interpolovali vrcholy V_i, V_{i+1}, V_{i+2} pre daný index i ($i=0, \dots, m-2$).

Catmull a Rom ich vyjadrili v nasledujúcom tvare

$$(3.1) \quad P_i(t) = \sum_{j=0}^r V_{i+j} L_j(r, t-i)$$

kde

$$(3.2) \quad L_j(r, t-i) = \prod_{p=0, p \neq j}^r \frac{t-p}{j-p}$$

sú známe Lagrangeove polynómy.

Je známe, že Lagrangeove polynómy spĺňajú tzv. Kroneckerovu podmienku

$$(3.3) \quad L_j(r, s) = \delta_{j,s} = \begin{cases} 1 & \text{ak } j = s, \quad s = 0, 1, \dots, r \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

a preto funkcie $P_i(t)$ interpolujú vrcholy V_i, V_{i+1}, V_{i+2} ($i=2$) pre každé i .

Skúmajme spojitosť funkcií $P_i(t)$. Pretože polynom $L_j(r, s)$ v rovnici (3.1) je polynomom stupňa 2, prakticky to znamená, že je C^0 spojity. Teda Lagrangeove polynómy sú príliš hladké na riešenie úloh geometrického modelovania. Tie si vyžadujú čiastkové polynomické funkcie. Geometrickú spojitosť čiastkových interpolačných funkcií dosiahneme tak, že položíme na ne podmienky geometrickej spojitosti (známe β -podmienky).

Uvažujme teraz celočíselný uzlový vektor, t.j. $\{t_i\}_{i=0}^{m+k} = \{i\}_0^{m+k}$. Zvoľme funkciu $P_i(t)$ tak, že vo vzťahu (3.1) nahradíme Lagrangeove polynómy $L_j(r, t-i)$ dané vzťahom (3.2) čiastkovými polynomickými funkciami

$$\Lambda_{i,j}(r; \beta_1, \beta_2; t)$$

Týmto nadobudne (3.1) tvar

$$(3.4) \quad P_i(t) = \sum_{j=0}^r V_{i+j} \Lambda_{i,j}(r; \beta_1, \beta_2; t).$$

Aby funkcia $P_i(t)$ interpolovala vrcholy V_i, V_{i+1}, V_{i+2} musia funkcie $\Lambda_{i,j}(r; \beta_1, \beta_2; s)$ spĺňať Kroneckerovu podmienku tvaru

$$(3.5) \quad \Lambda_{i,j}(r; \beta_1, \beta_2; s) = \delta_{j,s-2} \quad \text{pre } s=i, \dots, i+2.$$

Pretože funkcia $P_i(t)$ má byť G^2 -spojitá, musia funkcie $\Lambda_{i,j}(r; \beta_1, \beta_2; t)$ spĺňať β -podmienky v uzloch $i-k+1, \dots, i$.

Nevýhodou funkcií $\Lambda_{i,j}(r; \beta_1, \beta_2; t)$ je, že nepoznáme ich všeobecné vyjadrenie pre libovoľný rád geometrickej hladkosti n , libovoľný počet interpolovaných vrcholov $r+1$ a šírku k nosiča bázových funkcií. Preto sa musia konštruovať od prípadu k prípadu pre dané n , r a k .

Konkrétnie G^2 hladká Lagrangeova interpolačná krivka je krivkou zloženou zo štyroch kvadratických segmentov. Tieto segmenty Farin a Boehm opísali Bézierovými krivkami. Každej Bézierovej krivke prislúcha jej riadiaci polygón - vektor $W_{i,j}^k$ (pozri [2]). Vrcholy týchto riadiacich polygónov závisia len od príslušných riadiacich (C-R) splajnových vrcholov V_i a od tvarovacích β -parametrov. Preto môžeme vyjadriť vektor $W_{i,j}^k$ Bézierových riadiacich vrcholov v tvare súčinu transformačnej matice $T_{L,i,j}^k$ (obsahujúcej β -parametre) s vektorom odpovedajúcich riadiacich (C-R) splajnových vrcholov V_i , tzn.

$$(3.6) \quad W_{i,j}^k = T_{L,i,j}^k V_i$$

Na základe súvislostí medzi Bézierovými a Lagrangeovými interpolačnými krivkami a po jednoduchých algebraických úpravách vzťahov opísaných vo Farinových a Boehmových konštrukciách nájdeme prvky transformačných matic $T_{L,i,j}^k$:

$$T_{L,i,0}^3 = \begin{pmatrix} t_{11}^{L3,0} & t_{12}^{L3,0} & \frac{\gamma_{i-1}(\gamma_i \beta_{1,i-1} + 1)\alpha_{i-1}}{\phi_{i-1}} \\ t_{21}^{L3,0} & -\frac{1+\gamma_i}{\omega_{i-1}} & \frac{\gamma_i}{\alpha_i \omega_{i-1}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3.7)
kde

$$\begin{aligned} t_{11}^{L3,0} &= 1 + \frac{\beta_{1,i-1}(1 + \beta_{1,i-1}\gamma_{i-1}) + 1}{\beta_{1,i-1}\chi_{i-1}} - \frac{\chi_i(\beta_{1,i-1}(\gamma_{i-1} + 1) + (1 + \chi_{i-1}))}{\phi_{i-1}} \\ t_{21}^{L3,0} &= 1 + \frac{1}{\beta_{1,i-1}} - \frac{\chi_i}{\alpha_i \omega_{i-1}} \\ t_{12}^{L3,0} &= \frac{\gamma_i(\beta_{1,i} - 1)}{\beta_{1,i-1}\omega_{i-1}} - \frac{(1 + \gamma_i)(\beta_{1,i-1}(\beta_{1,i-1} - 1) - 1)}{\omega_{i-1}\chi_{i-1}} \end{aligned}$$

Ďalej

$$(3.8) \quad T_{L,i,1}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\chi_i}{\epsilon_i} & \frac{1+\gamma_i}{\delta_i} & \frac{\gamma_i}{\epsilon_i} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(3.9) \quad T_{L,i,2}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\beta_{1,i}\chi_i}{\epsilon_i} & 1 - \frac{(\delta_i - 1)(1 + \beta_{1,i}^2)}{\epsilon_i} & \frac{\delta_i - 1}{\epsilon_i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3.10) \quad T_{L,i,3}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\beta_{1,i+1}\beta_{1,i}\chi_i}{V_i} & -\beta_{1,i+1} + \frac{\eta_i \alpha_i(1 - \beta_{1,i})}{V_i} & \alpha_{i+1} - \frac{\eta_i}{V_i} \\ \frac{\chi_i \beta_{1,i} \gamma_{i+1} (\delta_{i+1} + \beta_{1,i+1}^2 \delta_{i+1})}{V_i \gamma_{i+2}} & T_{32}^{L3,3} & T_{33}^{L3,3} \end{pmatrix}$$

kde

$$\begin{aligned} t_{32}^{L3,3} &= -\beta_{1,i+1} + \frac{\eta_i \gamma_{i+1} (\alpha_{i+1} - \beta_{1,i}^2 \alpha_{i+1}) + \beta_{1,i} \gamma_i (1 - \beta_{1,i}) \alpha_i \alpha_{i+1}}{\alpha_i \delta_i \gamma_{i+1}} - \frac{\alpha_{i+1}}{\gamma_{i+1}} \\ t_{33}^{L3,3} &= \alpha_{i+1} + \frac{-\eta_i \gamma_{i+1} \alpha_{i+1} + \beta_{1,i} \gamma_i \alpha_i}{\alpha_i \delta_i \gamma_{i+1}} + \frac{\alpha_{i+1}}{\gamma_{i+1}} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \beta_{1,i} + 1 \\ \delta_i &= 1 + \beta_{1,i} \gamma_i \\ \chi_i &= \beta_{1,i}^2 \gamma_i \\ \varepsilon_i &= \alpha_i \delta_i \\ \nu_i &= \beta_{1,i} \delta_i \\ \eta_i &= \beta_{1,i} \beta_{1,i+1} \gamma_i \\ \omega_{i-1} &= \beta_{1,i-1} \delta_i \\ \phi_i &= \beta_{1,i} \omega_i \gamma_i \alpha_{i+1} \end{aligned}$$

Pomocou týchto matic zapíšeme jednotlivé segmenty $p_{i,j}(t)$ Lagrangeových kriviek $P_i(t)$ v Bézierovom tvare nasledovne

$$(3.11) \quad p_{i,j}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \end{pmatrix} M_{Bz}^3 T_{L,j,i}^3 \begin{pmatrix} V_{i-2} \\ V_{i-1} \\ V_i \end{pmatrix}, \quad \text{pre } t \in (0,1), j=0,1,2,3$$

kde M_{Bz}^3 je známa matica pre Bézierove krivky tretieho rádu.

Vynásobením matíc $M_{Bz}^3 T_{L,j,i}^3$ získame maticové vyjadrenie interpolačných kriviek v báze geometricky hladkých interpolačných Lagrangeových polynomov. Ich vyjadrenia tu nebudeme uvádzať.

Ked' už poznáme maticové vyjadrenia G^2 hladkých interpolačných funkcií a bázových funkcií, môžeme prejsť k samotnému odvodeniu výslednej matice opisujúcej i -ty segment ($G^2,2$) hladkej (C-R) krivky.

4. Maticové vyjadrenie ($G^2,2$) C-R splajnovej krivky

G^2 hladkú Catmullovú-Romovú splajnovú krivku vytvoríme tak, že použijeme G^2 hladké β -splajnové funkcie ako bázové funkcie, tieto funkcie označíme symbolom $b_{i+j,j}(\beta_1, \beta_2; t)$, a G^2 hladké Lagrangeové funkcie $P_i(t)$ ako interpolačné funkcie.

Východiskom k vyjadreniu segmentu $Q_i(t)$ krivky $Q(t)$ bude vzťah (2).

$$Q_i(t) = \sum_{j=-k+1}^r P_{i+j}(t) W_{i+j}(t), \quad t \in [i, i+1], i=k-1, \dots, m-r$$

Ak $P_{i+j}(t)$ vyjadrieme podľa (3.4), za $W_{i+j}(t)$ dosadíme G^2 hladké β -splajny $b_{i+j,j}(\beta_1, \beta_2, t)$ a využijeme vzťah $k=n+2$ ($n=2$), tak po úpravách dostaneme

$$Q_i(t) = \sum_{l=-n-1}^r V_{i+l} \left\{ \sum_{q+j=l} \Lambda_{i+q,j}(r; \beta_1, \dots, \beta_n; t) b_{i+q,q}(\beta_1, \dots, \beta_n; t) \right\}$$

kde $q=-3, \dots, 0; j=0, 1, \dots, 2; l=q+i$.

Ak položíme

$$(4.1) \quad \Phi_{i,l}(r; \beta_1, \dots, \beta_n; t) = \sum_{q+j=l} \Lambda_{i+q,j}(r; \beta_1, \dots, \beta_n; t) b_{i+q,q}(\beta_1, \dots, \beta_n; t)$$

dostaneme

$$(4.2) \quad Q_i(t) = \sum_{l=-n-1}^r V_{i+l} \Phi_{i,l}(r; \beta_1, \dots, \beta_n; t), \quad t \in [i, i+1]$$

Funkcie $\Phi_{i,l}(r; \beta_1, \beta_2, t)$, $n=2$ nazveme Catmullovými-Romovými zlučovacími funkiami.

Nie je ľahké presvedčiť sa, že tieto funkcie sú geometricky hladké.

Vzťahy (4.1) a (4.2) spolu definujú triedu geometricky hladkých (C-R) splajnových kriviek.

Uvedieme teraz niektoré dôležité vlastnosti prvkov tejto triedy

1. Každý prvak tejto triedy má lokálne riadenie. Zo vzťahu (4.2) je zrejmé, že segment $Q_i(t)$ závisí len od $r+n+2=6$ vrcholov V_{i-3}, \dots, V_{i+2} . Modifikácia vrcholu nepatriaceho do tejto množiny nemá vplyv na zmenu tohto segmentu. Zmena polohy určitého vrcholu vplýva len na 6 príslušných segmentov.
2. Každý prvak má tvarovacie parametre. $(G^2,2)$ (C-R) splajnové krivky majú po dvoch tvarovacích parametroch na spoj a všeobecne (G^n, r) (C-R) splajnové krivky majú po n tvarovacích parametrov na spoj. V dôsledku vlastnosti lokálnosti modifikácia jedného tvarovacieho parametra má za následok zmenu tvaru maximálne $r+n+2$ segmentov krivky.
3. $(G^2,2)$ (C-R) splajnové krivky sú interpolačné splajnové krivky.
4. Vo všeobecnosti každý segment (G^n, r) (C-R) splajnovej krivky je polynomom rádu $n+r+2$.

Vzhľadom na algebraickú zložitosť členov zo vzťahu (4.1) Farin a Boehm nevyčíslovali body $(G^2,2)$ (C-R) splajnovej krivky priamo zo vzťahov (4.1) a (4.2). Opäť bolo pre nich výhodnejšie určiť Bézierov polygón pre každý segment (C-R) splajnovej krivky a súradnice bodov potom vyčísiť pomocou známych algoritmov na výpočítanie Bézierovej krivky. Ich algoritmus nájdeme v [2], tu ho len schematicky naznačíme pre ľubovoľné n a r .

Konštrukciu všeobecného algoritmu pre ľubovoľné n a r začneme zápisom i -teho segmentu krivky $Q_i(t)$ pomocou vzťahu (2). Funkcie $P_{i+j}(t)$ sú určené G^2 hladkými

Lagrangeovými funkciemi a funkcie $W_{i+j}(t)$ sú určené G^∞ hladkými β -splajnovými bázovými funkciemi $b_{i+j,j}(\beta_1, \dots, \beta_n; t)$.

Nech K označuje stupeň Bézierovej krivky a nech $R_{j+n,0}, \dots, R_{j+n,K}$ označuje jej riadiaci polygón zodpovedajúcej i -temu segmentu interpolačnej funkcie $P_{i+j}(t)$ tzn. nech

$$(4.3) \quad P_{i+j}(t) = \sum_{l=0}^K R_{j+n,l} B_l^K(t-i), \quad t \in [i, i+1], \quad i=k-1, \dots, m-r; \quad j=-k+1, \dots, 0$$

kde

$$\begin{aligned} Q_i(t) &= \sum_{q=-n-1}^0 \left\{ \sum_{j=0}^K R_{q+n,j} B_j^K(t-i) \right\} b_{i,q,q}(\beta_1, \dots, \beta_n; t) = \\ &= \sum_{j=0}^K \left\{ \sum_{q=-n-1}^0 R_{q+n,j} b_{i,q,q}(\beta_1, \dots, \beta_n; t) \right\} B_j^K(t-i), \\ &\quad t \in [i, i+1], \quad i=k-1, \dots, m-r. \end{aligned}$$

Položme $s=q+n+1$. Potom môžeme člen v zátvorkách chápať ako β -splajnovú krivku s riadiacim polygónom $R_{s,j}$, $s=0, \dots, n$. Označme Bézierov polygón pre túto krivku symbolom $S_{s,j}$, $s=0, \dots, n$. Zrejmé platí

$$Q_i(t) = \sum_{j=0}^K \left\{ \sum_{q=0}^{n+1} S_{q,j} B_q^{n+1}(t-i) \right\} B_j^K(t-i), \quad t \in [i, i+1].$$

Späťne preznačme s na q a reparametrizujme $Q_i(t)$ do intervalu $[0, 1]$. Po týchto operáciách dostaneme

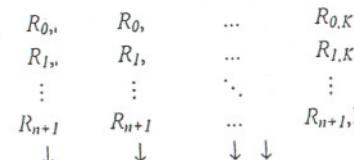
$$(4.4) \quad Q_i(t) = \sum_{j=0}^K \left\{ \sum_{q=0}^{n+1} S_{q,j} B_q^{n+1}(t) \right\} B_j^K(t) \quad t \in [0, 1]$$

Pretože pravá strana rovnice (4.4) je polynomom stupňa $K+n+1$, môžme nájsť Bézierov polygón $b_{i,0}, \dots, b_{i,K+n+1}$ taký, že

$$Q_i(t) = \sum_{l=0}^{K+n+1} b_{i,l} B_l^{K+n+1}(t) \quad t \in [0, 1].$$

Farin a Boehm ukázali, že tento Bézierov polygón vyčíslujeme z Bézierových polygónov $S_{q,j}$.

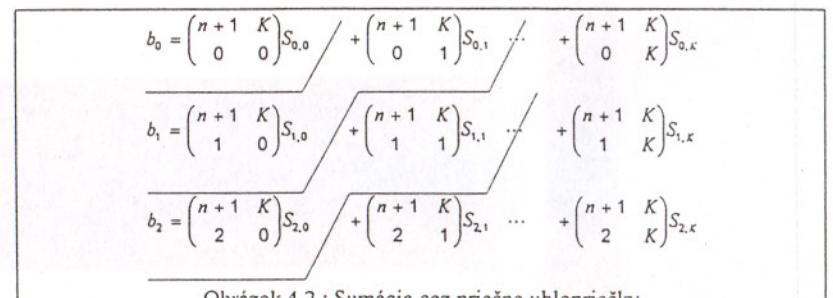
Algoritmus pre ľubovoľné n a r môžeme schematicky opísť usporiadáním bodov $R_{q,j}$ a $S_{q,j}$ do polí, tak ako je to na obrázku (4.1)



$$\begin{array}{ccccccc} S_{0,0} & S_{0,1} & \dots & S_{0,K} & & & \\ S_{1,0} & S_{1,1} & \dots & S_{1,K} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ S_{n+1} & S_{n+1,1} & \dots & S_{n+1,K} & & & \end{array}$$

Obrázok 4.1 : Usporiadanie bodov $R_{a,i}$ a $S_{a,i}$ do polí.

1. Riadky R -poľa zodpovedajú Bézierovým polygónom interpolačných funkcií a výčíslujú sa z riadiaceho polygónu V_0, \dots, V_n .
2. q -ty stĺpec S -poľa je Bézierov polygón β -splajnovej krivky, ktoréj riadiaci polygón je q -ty stĺpec poľa R .
3. Každý člen $b_{i,l}$, $l=0, \dots, n+K+1$, Bézierovho polygónu opisujúceho i -ty segment výslednej (C-R) splajnovej krivky získame sčítaním prvkov nasledujúcej schémy cez l -tú priečnu uhlopriečku (pozri obr. 4.2).



Obrázok 4.2 : Sumácia cez priečne uhlopriečky.

Výsledná Bézierová krivka opisujúca i -ty segment ($G^2,2$) (C-R) splajnovej krivky je krivkou šiesteho rádu a vyjadríme ju nasledovne

$$Q_i(t) = \sum_{j=0}^5 b_{i,j} B_j^5(t) \quad t \in [0, 1]; \quad i=5, \dots, m-2$$

Na základe uvedeného postupu, sme našli maticové vyjadrenie i -teho segmentu ($G^2,2$) C-R splajnovej krivky s globálnymi parametrami, tzn. že $\beta_{1,i}=\beta_1$ a $\beta_{2,i}=\beta_2$ v tvare:

$$(4.5) \quad Q_i(t) = T M G_{G2,R2} C, \quad t \in [0, 1] \\ \text{kde}$$

$$T = [1 \ t \ t^2 \ t^3 \ t^4 \ t^5],$$

$$C = [V_{i-3} \ V_{i-2} \ \dots \ V_{i-1}] \text{ a}$$

$$\begin{aligned}
 mg_{41}^{G2,2} &= \frac{6\beta_1^4(-2\beta_1 + 6\beta_1^2 + 3\beta_1)}{\alpha} \\
 mg_{42}^{G2,2} &= \frac{-2\beta_1^2(2(\beta_1 + 3\beta_1^2 + \beta_1^3(2 + 2\beta_1 + 3\beta_1^2)) + \beta_1(5 + \beta_1 + 9\beta_1^2 + 3\beta_1^3 + 3\beta_1))}{\alpha} \\
 mg_{43}^{G2,2} &= \frac{2}{\alpha}(4(\beta_1 + \beta_1^2) + \beta_1^2(10 + 8\beta_1 + 12\beta_1^2 + 4\beta_1^3 + 6\beta_1^4) + \beta_1(2 + 7\beta_1 + 13\beta_1^2 + \beta_1^3(8 + \beta_1 + 9\beta_1^2) + \beta_1(5 + 3\beta_1^2))) \\
 mg_{44}^{G2,2} &= \frac{-2}{\beta_1^2\alpha}(\beta_1^2(4 + 6\beta_1 + 8\beta_1^2) + \beta_1^2(12 + 10\beta_1 + 6\beta_1^2 + 6\beta_1^3) + \beta_1(6\beta_1 + 4\beta_1^2 + 7\beta_1^3 + \beta_1^4(7 + 13\beta_1 + 3\beta_1^2) + \beta_1(2 + 5\beta_1^2))) \\
 mg_{45}^{G2,2} &= \frac{2}{\beta_1^3\alpha}(4\beta_1 + 2\beta_1^2(3 - \beta_1 + 2\beta_1^2) + 8\beta_1^4 + \beta_1(2 - \beta_1(6 + 4\beta_1 + 5\beta_1^2) + 2\beta_1)) \\
 mg_{46}^{G2,2} &= \frac{-4}{\beta_1^3\alpha}(2\beta_1 + 7\beta_1^2 + \beta_1) \\
 mg_{47}^{G2,2} &= \frac{-2\beta_1^4(2\beta_1^2 + \beta_1)}{\alpha} \\
 mg_{48}^{G2,2} &= \frac{2\beta_1^4}{\alpha}(2(\beta_1 + \beta_1^2 + \beta_1^3(-1 + \beta_1 + \beta_1^2)) + \beta_1(2 + \beta_1 + 3\beta_1^2 + \beta_1^3 + \beta_1)) \\
 mg_{49}^{G2,2} &= \frac{2}{\alpha}(2(\beta_1 + 5\beta_1^2) + 2\beta_1^2(10 + 10\beta_1 + 4\beta_1^2 + \beta_1^3) + \beta_1(1 + 2\beta_1 + 4\beta_1^2 + \beta_1^3(3 - \beta_1 - 3\beta_1^2) - \beta_1(1 + \beta_1^2))) \\
 mg_{50}^{G2,2} &= \frac{2}{\beta_1^2\alpha}(\beta_1^2(2 + 10\beta_1 + 36\beta_1^2) + \beta_1^2(72 + 76\beta_1 + 50\beta_1^2 + 14\beta_1^3) + \beta_1(3\beta_1 + 5\beta_1^2 + 15\beta_1^3 + \beta_1^4(34 + 32\beta_1 + 7\beta_1^2) + \beta_1(1 + 7\beta_1^2))) \\
 mg_{51}^{G2,2} &= \frac{-2}{\beta_1^3\alpha}(2\beta_1 + 2\beta_1^2(3 + 4\beta_1 + 7\beta_1^2 + 5\beta_1^3) + \beta_1(1 + \beta_1(3 + 5\beta_1 + 4\beta_1^2) + \beta_1)) \\
 mg_{52}^{G2,2} &= \frac{2}{\beta_1^3\alpha}(2\beta_1 + 10\beta_1^2 + \beta_1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 MG_{G2,R2} &= \begin{pmatrix} -42 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4\beta_1^7}{\alpha} & mg_{22}^{G2,2} & mg_{23}^{G2,2} & mg_{24}^{G2,2} & 0 & 0 \\ mg_{31}^{G2,2} & mg_{32}^{G2,2} & mg_{33}^{G2,2} & mg_{34}^{G2,2} & mg_{35}^{G2,2} & 0 \\ mg_{41}^{G2,2} & mg_{42}^{G2,2} & mg_{43}^{G2,2} & mg_{44}^{G2,2} & mg_{45}^{G2,2} & mg_{46}^{G2,2} \\ mg_{51}^{G2,2} & mg_{52}^{G2,2} & mg_{53}^{G2,2} & mg_{54}^{G2,2} & mg_{55}^{G2,2} & mg_{56}^{G2,2} \\ mg_{61}^{G2,2} & mg_{62}^{G2,2} & mg_{63}^{G2,2} & mg_{64}^{G2,2} & mg_{65}^{G2,2} & mg_{66}^{G2,2} \end{pmatrix} \\
 (4.6) \quad \text{kde} \quad \alpha &= (2\beta_1(1 + \beta_1) + \beta_2)(2 + 2\beta_1(2 + \beta_1(2 + \beta_1)) + \beta_2) \\
 mg_{22}^{G2,2} &= \frac{-2\beta_1^3(2\beta_1(2 + \beta_1(3 + \beta_1(2 + \beta_1)) + \beta_2) + \beta_2)}{\alpha} \\
 mg_{23}^{G2,2} &= \frac{2(\beta_1 - 1)(\beta_1(4 + \beta_1(10 + \beta_1(14 + \beta_1(10 + 4\beta_1) + 2\beta_2) + 3\beta_2) + 3\beta_2) + 2\beta_2)}{\alpha} \\
 mg_{24}^{G2,2} &= \frac{2(2 + \beta_1(4 + \beta_1(6 + 4\beta_1) + \beta_2) + 2\beta_2)}{\alpha} \\
 mg_{25}^{G2,2} &= \frac{-2\beta_1^4(2\beta_1^2 + \beta_1)}{\alpha} \\
 mg_{26}^{G2,2} &= \frac{2\beta_1^2(2\beta_1 + \beta_1^2 + \beta_1^3(-1 + \beta_1 + \beta_1^2)) + \beta_1(2 + \beta_1 + 3\beta_1^2 + \beta_1^3 + \beta_1)}{\alpha} \\
 mg_{27}^{G2,2} &= \frac{2(2\beta_1 + 5\beta_1^2) + 2\beta_1^2(10 + 10\beta_1 + 4\beta_1^2 + \beta_1^3) + \beta_1(1 + 2\beta_1 + 4\beta_1^2 + \beta_1^3(3 - \beta_1 - 3\beta_1^2) - \beta_1(1 + \beta_1^2))}{\alpha} \\
 mg_{28}^{G2,2} &= \frac{2}{\beta_1^2\alpha}(\beta_1^2(2 + 10\beta_1 + 36\beta_1^2) + \beta_1^2(72 + 76\beta_1 + 50\beta_1^2 + 14\beta_1^3) + \beta_1(3\beta_1 + 5\beta_1^2 + 15\beta_1^3 + \beta_1^4(34 + 32\beta_1 + 7\beta_1^2) + \beta_1(1 + 7\beta_1^2))) \\
 mg_{29}^{G2,2} &= \frac{-2}{\beta_1^3\alpha}(2\beta_1 + 2\beta_1^2(3 + 4\beta_1 + 7\beta_1^2 + 5\beta_1^3) + \beta_1(1 + \beta_1(3 + 5\beta_1 + 4\beta_1^2) + \beta_1)) \\
 mg_{30}^{G2,2} &= \frac{2}{\beta_1^3\alpha}(2\beta_1 + 10\beta_1^2 + \beta_1) \\
 mg_{31}^{G2,2} &= \frac{6\beta_1^3}{\alpha}(2(-\beta_1 + \beta_1^2) + \beta_1(1 - \beta_1 + 3\beta_1^2 + \beta_1^3 + \beta_1)) \\
 mg_{32}^{G2,2} &= \frac{2}{\alpha}(2(-\beta_1 + 2\beta_1) + 6\beta_1^2(1 - \beta_1 + \beta_1^2) + \beta_1(-1 + 3\beta_1 - 9\beta_1^2 + 3\beta_1^3(2 + \beta_1 - 3\beta_1^2) - 3\beta_1(1 - \beta_1^2))) \\
 mg_{33}^{G2,2} &= \frac{2}{\beta_1^2\alpha}(2\beta_1^2(1 + 2\beta_1 - \beta_1^2) + 2\beta_1^2(1 + 3\beta_1^2) + \beta_1(3\beta_1 + 3\beta_1^2 + 4\beta_1^3 + 3\beta_1^4(-1 + 3\beta_1 + \beta_1^2) + \beta_1(1 + 3\beta_1^2))) \\
 mg_{34}^{G2,2} &= \frac{2}{\beta_1^3\alpha}(-2\beta_1 + 4\beta_1^2(-1 + 2\beta_1 + \beta_1^2) - 6\beta_1^3 - \beta_1(1 + 3\beta_1(1 + \beta_1 + \beta_1^2) + \beta_1)) \\
 mg_{35}^{G2,2} &= \frac{2}{\beta_1^3\alpha}(2\beta_1 + 8\beta_1^2 + \beta_1)
 \end{aligned}$$

kde $mg_{r,s}^{G2,2}$ je prvok matice v r -tom riadku a s -tom stĺpci. Nevyhnutné matematické úpravy sme spravili pomocou výpočtového systému MATHEMATICA.

Nech teraz sa β_1 rovná jednej. Z β -podmienok vyplýva, že tvar výslednej krivky je ovplyvňovaný len parametrami β_2 , $\beta_2 \geq 0$. Vtedy hovoríme o β_2 (C-R) splajnových krivkách. V tomto prípade maticu (4.6) označíme symbolom $MG_{G2,R2}$ a jej prvky sú dané nasledovne:

$$(4.7) \quad MG_{G2,R2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{\alpha} & \frac{-2(16 + 3\beta_1)}{\alpha} & 0 & -mg_{22}^{G2,2} & 0 & 0 \\ 2(-4 + \beta_1) & 2(28 + \beta_1(2 - \beta_1)) & 0 & 56 - \beta_1(20 + \beta_1) & -24 & 0 \\ -6\beta_1 & 6\beta_1 & \frac{2(-4 - \beta_1(19 + 6\beta_1))}{12 + \beta_1} & 2(3 + 4\beta_1) & -\beta_1 mg_{24}^{G2,2} & \frac{2(10 + \beta_1)}{\alpha} \\ 2(4 + 3\beta_1) & -2(22 + \beta_1(18 + 3\beta_1)) & \frac{16(6 + \beta_1(5 + \beta_1))}{12 + \beta_1} & -2(52 + \beta_1(40 + 7\beta_1)) & 2(20 + \beta_1(17 + 2\beta_1)) & \frac{-4(9 + \beta_1)}{\alpha} \\ \frac{\alpha}{a} & \frac{2(6 + \beta_1(7 + \beta_1))}{\alpha} & \frac{4(30 + \beta_1(3 - \beta_1))}{\alpha} & \frac{8(65 - 2\beta_1(12 + \beta_1))}{\alpha} & \frac{-2(40 + \beta_1(13 + \beta_1))}{\alpha} & \frac{2}{4 + \beta_1} \end{pmatrix}$$

kde $\alpha = 48 + 16\beta_2 + \beta_2^2$.

Na záver uvažujme $(C^2,2)$ (C-R) splajnové krivky. Tieto krivky sú krivkami šiesteho rádu a sú konštruované tak, aby prechádzali riadiacimi vrcholmi $V_2V_3\dots V_{n-2}$ a boli parametricky hladké druhého rádu. Maticu určujúcu i -ty segment tejto krivky označíme symbolom M_{C2R2} a má nasledujúci tvar :

$$(4.8) \quad M_{C^2R^2} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ -2 & 14 & -24 & 14 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 0 & 5 \\ 2 & -11 & 24 & -26 & 10 & -9 \\ -1 & 3 & 30 & 130 & -20 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Záver

V príspevku sme uviedli maticové vyjadrenie $(G^2, 2)$ C-R splajnových kriviek s globálnymi tvarovacími parametrami. V tomto príspevku sme dali odpovede na niektoré otázky z práce [2]. Konkrétnie, našli sme také vyjadrenie $(G^2, 2)$ C-R splajnových kriviek, ktoré umožňuje rýchle prepočítanie súradnice krivky - jej zmenených segmentov, bez výpočtu Bézierových vrcholov, keď sa zmení poloha niektorého riadiaceho vrchola alebo ak sa zmení hodnota tvarovacieho parametra. Ďalej, pretože C-R splajnové plochy sú plochami tenzorového súčinu, z maticového vyjadrenia krivky vieme jednoduchým zovšeobecnením nájsť maticové vyjadrenie i,j -tej záplaty $(G^2, 2)$ C-R splajnovej plochy.

Abstract

In this paper we present the class $(G^2, 2)$ C-R spline curves. We demonstrate how to use the Farin Boehm's algorithms to obtain the matrix expression of the $(G^2, 2)$ C-R spline curves with the global shape parameters.

Literatúra

- [1] E.E.Catmull, R.J. Rom : A class of local interpolating splines. In Computer Aided Geometric Design, R.E.Barnhill and R.F.Riesenfeld, Eds. Academic Press, Orlando, 1974, pp. 317-326
- [2] B.A.Barsky, T.DeRose : Geometric Continuity, Shape Parameters, and Geometric Constructions for Catmull-Rom Splines, ACM Transactions on Graphics, Vol. 7, No. 1, January 1988, pp 1-41.

Pedagogický softvér - axonometria

Mária Bohdalová

KMDG SvF STU

Radlinského 11

813 68 Bratislava

Božena Čižmárová

KMDG SvFSTU

Radlinského 11

813 68 Bratislava

1. Úvod

Výučba deskriptívnej geometrie prispieva k pochopeniu javov geometrického sveta. Sveta, ktorý pomáha hlavne inžinierom všetkých technických odborov, najmä v stavebnickom, v architektúre a strojníctve ale i v ďalších, riešiť problémy každodennej technickej praxe. Pre inžinierov je dôležité vedieť previesť teoretické úlohy do grafickej podoby a až potom striktne formálne vyriešiť výsledky svojich predstáv.

Geometrický svet nie je pre každého ľahko porozumiteľný. Niečo v geometrickom svete vidíme úplne jašne, iné svoju zložitosťou zabraňuje tomu, aby sme sa na to pozreli jediným pohľadom. Vtedy sa treba vedieť pozrieť na danú vec vhodným spôsobom.

Jedna z metód klasickej deskriptívnej geometrie, ktorá značne pomáha rozvíjať geometrické myslenie, priestorovú predstavivosť a schopnosť jednoducho zachytíť vlastné predstavy o objektoch na papieri je axonometria.

Axonometria ako metóda pre zobrazovanie troj-rozmerných objektov sa v deskriptívnej geometrii používa veľmi dávno a nájdeme ju skoro v každej publikácii venovanej zobrazovacím metódam. V technickej praxi je obľúbená najmä pre jej názornosť. Názornosť metódy vyplýva z toho, že na každom technickom objekte vieme temer vždy určiť tri rôzne smery majúce tú vlastnosť, že každé dva sú na seba kolmé. Z praxe tieto smery poznáme pod názvom

"šírka", "dĺžka" a "výška" technického objektu. Ak predpokladáme, že tieto tri smery reprezentujú kartézsky súradnicový systém a ak vhodne zvolíme smer pohľadu a priemetiu, tak získame "ťahko" pochopiteľný názorný obraz technického objektu.

Pre inžinierov technickej praxe, je dôležité nielen vedieť "čítať" axonometrické obrázky a vedieť sa vhodným spôsobom pozrieť na obrázok, ale aj správne si načrtiť objekt svojej predstavy. V procese načrtávania je nevyhnutné vedieť správne vytvoriť obraz objektu. Proces tvorby obrazu objektu je mnohokrát náročný a v knižnej podobe ľahko zachytiteľný. Tu sa stretávame s hlavným nedostatkom knižnej literatúry, ktorý spočíva v tom, že v knihách a skriptách nachádzame už hotové obrázky. Z tohto dôvodu sme sa rozhodli spracovať problematiku tejto zobrazovacej metódy na počítači s cieľom zachytiť tvorbu obrázka v procese jeho vzniku.

2. Axonometria - výučbový softvér

V rámci výskumnej úlohy na Katedre matematiky a Deskriptívnej geometrie Stavebnej fakulty STU v Bratislave sme spracovali axonometriu vo výučbovom softvéri. Týmto krokom sme sa rozhodli prispieť k zvýšeniu kvality výučby deskriptívnej geometrie nielen na našej fakulte, ale aj na iných stredných a vysokých školach, kde sa deskriptívna geometria vyučuje. Pri tvorbe spomínaného softvéru sme použili autorský výučbový softvér AVIS a grafický editor DRGENIUS. Systém AVIS je programový systém navrhnutý pre použitie aj v Computer Assisted Learning a jedna jeho verzia umožňuje vytváranie vlastných aplikácií, tzv. scenárov predmetu pre koncových užívateľov - študentov.

V našom prípade sme vytvorili tri scenáre predmetu AXONOMETRIA. Jednotlivé scenáre sú vytvorené ako voľne nadväzujúce samostatné celky. Všetky tri scenáre pokrývajú náplň prednášok z axonometrie v zimnom semestri na Stavebnej fakulte STU v Bratislave.

Každý scenár obsahuje 7-8 kapitol. Kapitoly je možné prečítať buď následne všetky za sebou, alebo vo zvolenom poradí, pre tých ktorí už nietkoré časti ovládajú.

Kapitola je buď :

- *výkladová* - obsahuje výklad nových pojmov a geometrických konštrukcií, alebo

- *výkladovo upotreňujúca* - okrem výkladu nových pojmov a konštrukcií obsahuje aj zadania úloh, ktoré rieši študent následne alebo ako domáce zadanie na papier.

Výklad nových pojmov a konštrukcií je riešený postupným zobrazovaním vhodných obrázkov a sprievodného textu. Študent sleduje tvorbu obrázka v procese jeho vzniku, riadi si tempo výkladu. Opäťovne sa môže vrátiť k tej kapitole, ktorej náplň bola pre neho problematická pre pochopenie. Práca s jednotlivými kapitolami je pre študenta nenáročná, v každom okamihu má na obrazovke vysvetlený text, ktorý mu oznamuje čo má robiť, aby sa vykonala vopred špecifikovaná akcia.

Predmet AXONOMETRIA obsahuje nasledujúce tri scenáre Axonometria 1, Axonometria 2 a Axonometria 3.

Axonometria 1 je úvodnou časťou a obsahuje nasledujúce kapitoly:

1. Súradnicový trojhran
2. Definícia axonometrie
3. Základné pojmy
4. Zobrazenie bodu v šíkmej axonometrii redukčnou metódou
5. Zobrazenie objektu v šíkmej axonometrii redukčnou metódou
6. Zobrazenie kružnice v šíkmej axonometrii
7. Druhy šíkmej axonometrie.

V scenári Axonometria 2 sme sa zamerali na kolmú axonometriu, jej základné konštrukcie a metódy používané k zobrazovaniu objektov stavebnej praxe. Obsahuje nasledujúce kapitoly :

1. Kolmá (ortogonálna) axonometria
2. Určenie kolmej axonometrie
3. Konštrukcia axonometrických jednotiek pre kolmú axonometriu
4. Zobrazenie objektu v kolmej axonometrii redukčnou metódou
5. Zobrazenie kružnice v kolmej axonometrii
6. Zobrazenie telesa v kolmej axonometrii
7. Zobrazenie objektu v kolmej axonometrii zárezovou metódou.

Na záver, náplňou tretieho scenára Axonometria 3 je riešenie polohových úloh v axonometrii, Sobotkova metóda a metrické úlohy riešené pomocou Sobotkovej metódy. Obsahuje nasledujúce kapitoly

1. Zobrazenie bodu
2. Zobrazenie priamky
3. Zobrazenie roviny
4. Priečenica dvoch rovín
5. Priečeník priamky s rovinou
6. Zobrazenie bodu v axonometrii Sobotkovou metódou
7. Zobrazenie objektu v axonometrii Sobotkovou metódou
8. Riešenie metrických úloh v axonometrii použitím Sobotkovej metódy.

Spôsob a postup práce s jednotlivými scenárami bol zvolený tak, aby ich študenti mohli používať úplne samostatne a s minimálnym užívateľským manuálom. Prechod medzi jednotlivými akciami je závislý výlučne na študentovi. Naviac nie je zanedbateľné, že sa u študentov rozvíja návyk samostatne pracovať s pedagogickým softvérom a s počítačom.

Jednotlivé scenáre predmetu AXONOMETRIA je možné použiť i na iný typ škôl ako je Stavebná fakulta, na ktorých sa vyučuje zobrazovacia metóda axonometria.

Pre sprístupnenie predmetu AXONOMETRIA ale i ďalších predmetov, ktoré sme vytvorili na našej katedre, sme zaviedli v zimnom semestri tohto školského roku voliteľný predmet deskriptívna geometria, ktorý môžu navštievať naši študenti prvého ročníka. Predmety sú prístupné v displayovej učebni čo umožňuje študentom aj v rámci ich voľného času sa venovať individuálnemu štúdiu deskriptívnej geometrie. Spokojnosť s našimi produktami je vysoká, štatistické spracovanie úspešnosti predmetu AXONOMETRIA zatiaľ nemáme k dispozícii.

Pedagogical software - Axonometria

In this paper is presented an illustration of programmes determined for education of parallel projection - axonometry projection. They support is an interactive work of their user with the computer and emphasise an improvement of space imagination.

VÝUČBA ŠTATISTICKÝCH METÓD S VYUŽITÍM TABUĽKOVÉHO PROCESORA QUATTRO PRO

Lubica Floreková; Marta Benková; Anna Čurpeková
Katedra riadenia výrobných procesov F BERG TU
Košice

1. ÚVOD

V posledných približne piatich rokoch boli curricula našej fakulty značne posilnené prierezovými, "zabezpečovacími" predmetmi z oblasti informačných technológií (IT). Je to dané nielen skutočnosťou, že Vysoká škola technická sa stala technickou univerzitou, ale aj tým, že súčasné výroby a technológie okrem teoretického a odborného vzdelania, vyžadujú aj zvládnutie rozsiahleho množstva podporných predmetov, ktoré zaistujú kvantitatívne vyšší prístup k riešeniu odborných problémov.

Základnú zostavu spoločných predmetov z oblasti IT tvorí výučba algoritmizácie, programovacieho jazyka (v súčasnosti Pascal), operačného systému (v súčasnosti MS DOS), textových editorov (v súčasnosti WinT602), grafických editorov (v súčasnosti Paintbrush, Freelance Graphics) a tabuľkových procesorov (v súčasnosti Quattro Pro).

Tieto predmety absolvujú všetci študenti v spoločnej časti štúdia, ktorá trvá tri semestre.

Hlavným cieľom výučby predmetov z oblasti informačných technológií nie je iba vzdelávanie, ale aj školenie, teda komplexný prístup VET (Vocation - Education - Training), čo je istý nový prvok v klasickej pedagogickej metodike.

2. PRÍSTUPY

Pri výučbe profesionálnych programových produktov (PPP) treba brať do úvahy skutočnosť, že náš objekt vzdelávania - vysokoškolský študent, by sa mal postupne pretransformovať na realizátora svojich vzdelávacích cieľov. Vzdelávacím cieľom študenta teraz nechápeme iba získavanie vedomostí o príslušnom PPP. Zmena cieľov závisí od zmeny v prístupe k náplni učiva, od požiadavky na zvýšenie kvality a efektívnosti získaného výsledku, ktorým je tu kvalifikácia študenta, jeho odbornosť, spôsobilosť samostatne príslušný PPP neskôr využívať.