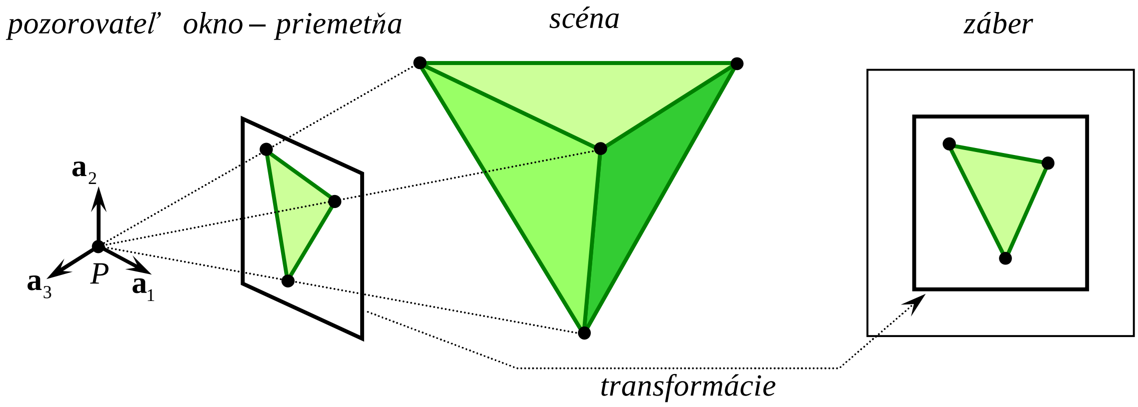
7. ZOBRAZOVACÍ KANÁL

Zobrazovací proces v počítačovej grafike a tiež v mnohých grafických systémoch (napr. v OPEN GL) sa v podstate realizuje v nasledujúcich fázach.

Predpokladáme, že všetky vstupné objekty sú zadané v štandardnej priestorovej karteziánskej súradnicovej sústave $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$, ktorú nazveme <u>svetovou súradnicovou sústavou</u> (ak modelár má modely svojich objektov opísané vo svojej vlastnej súradnicovej sústave, musí si ich do tejto pretransformovať).



Obr.1

1. **<u>Konštrukcia súradnicovej sústavy pozorovateľa (snímacej súradnicovej sústavy)</u>** $\langle P, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$.

Konštrukcia si vyžaduje zadanie:

a) súradnice pozorovateľa (kamery), presnejšie jeho oka : $P = [p_1, p_2, p_3]$

b) súradnice cieľového bodu (bodu, na ktorý sa pozerá) : $C = [c_1, c_2, c_3]$

c) bodmi P a C je definovaný tzv. pohľadový vektor $\mathbf{v}$ = C-P, ten reprezentuje smer, ktorým je pozorovateľ P zameraný (prípadne polohu a smer kamery).

Kamera sa však môže okolo priamky - osi PC otáčať. Aby sme fixovali jej „správnu“ polohu aj čo do otočenia, zadáva sa <u>jednotkový vektor</u> $\mathbf{h} = [h_1, h_2, h_3]$, ktorý reprezentuje smer „hore“(vzhľadom na kameru). Tento vektor <u>nemusí byť</u> kolmý na pohľadový vektor (hoci niektorí autori to predpokladajú), no niekedy sa predpokladá, že $\mathbf{h} = \mathbf{e}_3$. Oba tieto predpoklady umožňujú jednoduché vyjadrenie súradníc vektorov $\mathbf{a}_i$, i=1,2,3.

Týmto máme zvolené dva jednotkové vektory:

$$\mathbf{v} = \frac{C-P}{|C-P|} = [v_1, v_2, v_3] = \frac{1}{\sqrt{(c_1-p_1)^2 + (c_2-p_2)^2 + (c_3-p_3)^2}}[c_1-p_1, c_2-p_2, c_3-p_3] \text{ a vektor } \mathbf{h}$$

(ak by vektor reprezentujúci smer „hore“ nebol jednotkový, vydelíme ho jeho dĺžkou).

Potom súradnicová sústava pozorovateľa (snímacia súradnicová sústava) je určená:

1) začiatkom $P=[p_1, p_2, p_3]$ (bodový pozorovateľ – oko)

2) $\mathbf{a}_3 := -\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad [a_{13}, a_{23}, a_{33}] = [-v_1, -v_2, -v_3]$

3) $\mathbf{a}_1 := \mathbf{v}\times\mathbf{h} = \left[\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ h_2 & h_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ h_1 & h_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}\right]$ t.j. $\mathbf{a}_1 = [a_{11}, a_{21}, a_{31}]$ kde

$a_{11} = v_2h_3 - v_3h_2; \quad a_{21} = -v_1h_3 + v_3h_1$ a $a_{31} = v_1h_2 - v_2h_1$.

4) $\mathbf{a}_2 := \mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1 = \left[\begin{vmatrix} a_{23} & a_{33} \\ a_{21} & a_{31} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{33} \\ a_{11} & a_{31} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} \\ a_{11} & a_{21} \end{vmatrix}\right]$ t.j.

$a_{12} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}; \quad a_{22} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}$ a $a_{32} = a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}$.

2. <u>Transformácia svetovej súradnicovej sústavy do súradnicovej sústavy pozorovateľa (snímacej súradnicovej sústavy)</u> t.j. $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle \quad \to \quad \langle P, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\rangle$.

Vieme, že ak bod má súradnice $X=[x_1, x_2, x_3]$ v sústave $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle$ a súradnice $X=[y_1, y_2, y_3]$ v sústave $\langle P, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\rangle$, môžeme zapísať:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & p_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & p_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pretože

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & p_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pričom prvá matica súčinu je maticou posunutia o vektor (p_1, p_2, p_3) (jej inverznou maticou je matica posunutia o vektor $(-p_1, -p_2, -p_3)$) a druhá matica súčinu je ortogonálna (jej inverznou maticou je matica k nej transponovaná). Platí:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & p_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -p_1 \\ 0 & 1 & 0 & -p_2 \\ 0 & 0 & 1 & -p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & -(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3) \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & -(a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3) \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & -(a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Táto maticová rovnosť nám umožňuje počítať súradnice bodov v snímacej súradnicovej sústave, ak poznáme ich svetové súradnice.

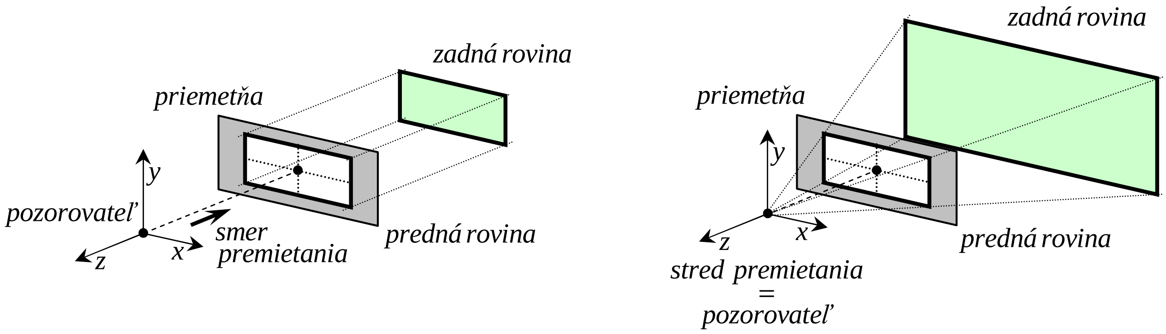
3. Tretím krokom zobrazovacieho procesu je **premietanie** (rovnobežné alebo stredové) priestoru do roviny – priemetne (pohľadovej roviny). Ako vieme z predchádzajúceho, je účelné zvoliť ju kolmo k tretej súradnicovej osi snímacej súradnicovej sústavy, čiže k vektoru $\mathbf{a}_3$ resp. k vektoru $\mathbf{v}$. Realizácia tohto kroku si vyžaduje znalosť všeobecných zobrazovacích rovníc pre rovnobežné resp. stredové premietanie a ich špeciálnych typov (ortoprojekcie, axonometrie, perspektívy, atď.).

Stredové premietanie: špeciálne, ak priemetňa má v snímacej súradnicovej sústave rovnicu $z = -d$, kde $d > 0$ a stredom premietania je bod $S = P$, tak zobrazovacie rovnice tohto stredového premietania, ako už vieme, sú:

$$x' = \frac{dx}{-z} = \frac{x}{z/(-d)}; \; y' = \frac{dy}{-z} = \frac{y}{z/(-d)}; \qquad \text{resp. } x' = -x/(z/d); \; y' = -y/(z/d).$$

Rovnobežné premietania: na rozdiel od stredových premietaní sú afinnými zobrazeniami a existuje medzi nimi značné množstvo rôznych typov. Asi najjednoduchšie sú ortogonálne (kolmé) premietania, u ktorých premietacie priamky sú rovnobežné s niektorou súradnicovou osou, najčastejšie s treťou osou z.
Táto transformácia zobrazuje body priestoru E^3 do bodov súradnicovej roviny $z = 0$ a to tak, že bodu $X = (x, y, z, 1)^T$ priradí bod $X' = (x, y, 0, 1)^T$. Treba povedať, že hoci súradnica z nie je potrebná pre finálnu kresbu, ale uchováva informáciu o hĺbke, ktorá je užitočná pri odstraňovaní skrytých plôch, zisťovaní ich z-rozsahov a usporiadavaní podľa vzdialenosti od pozorovateľa, a preto ju mnohé programové produkty a grafické systémy uchovávajú. Tento krok zobrazovacieho procesu však nepozostáva len z premietania samotného (afinnej zložky) ale aj z orezávania (rovinného i priestorového) a z tzv. perspektívnej normalizácie.

Pohľadový objem (pohľadové teleso, pohľadový priestor) sa zavádza pri premietaniach preto, aby sme potlačili zobrazovanie takých objektov, ktoré sa nenachádzajú v oblasti nášho záujmu a prípadne sú za chrbtom pozorovateľa. Je to teda časť priestoru ohraničujúca tie objekty, ktoré chceme premietať. Ostatné objekty musia byť pred ďalším spracovaním odstránené alebo odrezané. Pri stredovom premietaní takýmto pohľadovým priestorom je teleso - zrezaný ihlan a pri rovnobežnom premietaní je týmto telesom - kváder.



Obr.2

Oba prípady vidno na obr.2 prevzatom z učebnice Žára: Moderní počítačová grafika. Uhly pri vrchole nezrezaného ihlana by mali zodpovedať šírke záberu kamery, čo síce nie je mnoho, ale ak zohľadníme aj periférne videnie, môžeme za akceptovateľný uhol považovať uhol do 50°. Pri pohľadovom telese dôležitú úlohu má predná (near) a zadná (far) stena, lebo pri orezaní pohľadovým telesom zabezpečujú tieto dve steny odstránenie príliš blízkych objektov brániacich vo výhľade ako aj príliš vzdialených objektov, ktoré sú z hľadiska pozorovateľa nezaujímavé a ich spracúvanie spomaľuje zobrazovací proces.

Na obr. 2 je predná stena - orezávacia rovina totožná s priemetňou. V skutočnosti však priemetňa môže byť umiestnená v ľubovoľnej vzdialenosti od pozorovateľa, pretože v poslednej fáze zobrazovacieho reťazca nasleduje úprava mierky, ktorá okno obsahujúce premietnuté objekty zobrazí do určeného okna na obrazovke počítača.

V záujme zjednodušenia výpočtov v orezávacích algoritmoch sa niekedy v priestore obsahujúcom zobrazované objekty škálovaním zabezpečí, aby sa pohľadový priestor zmestil do jednotkovej kocky $\langle -1,1\rangle^3$.

Pri matematickom opise sú použité označenia pre výber roviny a polohy bodu v rovine:

n – near, *f* – far, *t* – top, *b* – bottom, *r* – right, *l* – left;

•Uvažujeme stredové premietanie: pozorovateľ v bode *P* a priemetňa $z=-d$, teda zobrazovacie rovnice tohto stredového premietania sú:

$$x' = \frac{dx}{-z} = \frac{x}{z/(-d)};\quad y' = \frac{dy}{-z} = \frac{y}{z/(-d)}; \qquad (1)$$

($x=-\frac{dx}{z};\ y=-\frac{dy}{z} \Leftrightarrow 1=-\frac{d}{z} \Rightarrow z=-d; x'=\frac{0}{-0}, y'=\frac{0}{-0} \Leftrightarrow x', y'$ nie sú definované t.j. bod *P*=[0,0,0] nemá priemet).

•• Grafický zobrazovací kanál potrebujeme na premietnutie 3D-objektov na prednú rovinu a potom ich zobraziť na obrazovú dosku (viewport).

••• Pridanie pseudohĺbky. Premietaním sa stráca informácia o hĺbke t.j. informácia o tom ako ďaleko je bod od oka, ktorá je nevyhnutná pre viditeľnosť. Preto pre každý bod X , ktorý premietame, musíme vypočítať tzv. <u>pseudohĺbku</u> , ktorá poskytuje adekvátnu mieru hĺbky pre bod X (presnejšie umožňuje <u>porovnávať</u> jeho vzdialenosť od pozorovateľa so vzdialenosťami iných bodov).

Definícia : Hovoríme, že bod X sa premieta do bodu $X' = (x', y', z')$ $\Leftrightarrow$ ak hodnoty x', y' sú vypočítané podľa (1) a z' je pseudohĺbka bodu X t.j. číslo $z' = (az+b)/(-z)$, kde a, b sú reálne čísla zvolené tak, aby : $-1 \le z' \le 1$ pričom $-1 = z'(-n) \wedge 1 = z'(-f)$, kde $z = -n$ a $z = -f$ sú rovnice prednej resp. zadnej orezávacej roviny zrezaného 4-bokého ihlana, ktorý predstavuje pozorovací priestor stredového premietania.

Vyriešením rovníc $-an + b = -n$ a $-af + b = f$ dostávame: $a = \dfrac{n+f}{n-f}$ a $b = \dfrac{2nf}{n-f}$ $\Rightarrow$

$$z' = z'(z) = -\frac{1}{z}\left[\frac{n+f}{n-f}z + \frac{2nf}{n-f}\right].$$

<u>*Poznámka*</u>: Mnohí autori volia tvar funkcie pre pseudohĺbku v súlade s tvarom funkcií (1) pre vyjadrenie x' resp. y'. V našom prípade by tento prístup viedol k funkcii $z' = (dz)/(-z)$ t.j. $z' = -d$.

Po pridaní pseudohĺbky má naše perspektívne <u>premietanie</u> tvar:

$$(x', y', z') = \left(n\frac{x}{-z}, n\frac{y}{-z}, \frac{az+b}{-z}\right) \tag{2}$$

kde $a = \dfrac{n+f}{n-f}$ a $b = \dfrac{2nf}{n-f}$.

K tomu , aby sme mohli toto premietanie zapísať v maticovom tvare (čipy grafických kariet dokážu násobiť body maticami hardverovo a preto je táto operácia veľmi rýchla) musíme prejsť k homogénnym alebo aspoň k rozšíreným afinným súradniciam. Potom môžeme maticami opísať nielen afinné ale i projektívne transformácie priestoru $\bar{E}_3$.

Projektívne transformácie sú reprezentované maticami typu 4 x 4 a afinné transformácie sú ich špeciálnymi prípadmi keď ich posledný riadok má tvar (0,0,0,1). Miesto termínu <u>projektívna</u> transformácia sa v PG často používa termín <u>perspektívna</u> transformácia.

Ako možno zapísať zobrazenie (2) pomocou matíc?

Uvažujme „neafinnú“ maticu

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ktorá je regulárna a zobrazí bod $(\rho x, \rho y, \rho z, \rho)^T$ do bodu $(\rho n x, \rho n y, \rho(az+b), -\rho z)^T$ resp.po vydelení poslednou súradnicou čiže tzv. perspektívnym delením do bodu $(n\dfrac{x}{-z}, n\dfrac{y}{-z}, \dfrac{az+b}{-z}, 1)^T$ resp. $(n\dfrac{x}{-z}, n\dfrac{y}{-z}, \dfrac{az+b}{-z})^T$, čo je obraz bodu $(x, y, z)^T$ <u>perspektívnou</u>

transformáciou (2) priestoru $\overline{E}_3$. Teda P je matica tejto transformácie (nie projekcie, hoci matica P sa nazýva projekčnou maticou 1.druhu).
Teda perspektívna transformácia je zobrazenie: $\overline{E}_3 \to \overline{E}_3$:

$$(x, y, z)^T \to \left(n\frac{x}{-z}, n\frac{y}{-z}, \frac{az+b}{-z}\right)^T \sim \mathrm{P}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Perspektívna transformácia teda zobrazuje 3D-body opäť do 3D-bodov, pričom objekty priestoru $\overline{E}_3$ istým spôsobom deformuje. Zachováva však priamkovosť, rovinnosť objektov, reláciu „ležať medzi“, „patriť dovnútra“, alebo do vonkajšku objektu, pomery vzdialeností v pozorovacom smere a pod.
Tieto tvrdenia sa pokúsime čiastočne objasniť na špeciálnom prípade perspektívnej transformácie definovanej maticou P, ktorej prvky spĺňajú tieto podmienky: (a) $a^2 - 4b > 0$;
(b) $n^2 - an + b = 0,$ ale $b \neq n^2$. (Týmto podmienkam vyhovuje napr. trojica : a = 5, b = 4, n = 4 ($a - 4b = 25 - 16 = 9$ a $n^2 - an + b = 16 - 20 + 4 = 0$)).
Charakteristická rovnica $|\mathrm{P} - \lambda \mathrm{E}| = 0$, tejto špeciálnej perspektívnej transformácie h má tvar:

$$\begin{vmatrix} n-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda & b \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (n-\lambda)^2 \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (n-\lambda)^2\left(\lambda^2 - a\lambda + b\right) = 0. \qquad (3)$$

Pretože $n^2 - an + b = 0$ má rovnica $\lambda^2 - a\lambda + b = 0$ jeden koreň $\lambda = n$, v dôsledku čoho má charakteristická rovnica (3) trojnásobný koreň $\lambda = n$, a jej štvrtý koreň (t.j. druhý koreň rovnice $\lambda^2 - a\lambda + b = 0$) $\lambda_4 = a - n$ je reálny, jednoduchý a rôzny od trojnásobného koreňa $\lambda = n$. Navyše platí : $h(\mathrm{P} - n\mathrm{E}) = h\begin{pmatrix} a-n & b \\ -1 & -n \end{pmatrix} = 1$. Potom však podľa klasifikačných kritérií pre kolineácie je perspektívna transformácia h definovaná maticou P priestorovou perspektívnou kolineáciou (presnejšie homológiou), ktorej stredom je bod $S = [0, 0, -bn, 1]$, bodovo samodružnou rovinou je rovina $\sigma \equiv x_3 + nx_4 = 0, (S \notin \sigma)$, kolmá na os z (tzv. osová rovina homológie) a úbežnicovými rovinami sú roviny $u = h(\omega_\infty)$ (ω_∞ je nevlastná rovina) o rovnici $x_3 + ax_4 = 0$ a $v = h^{-1}(\omega_\infty)$ o rovnici $x_3 = 0$, ktoré sú tiež kolmé na os z, čiže rovnobežné s osovou rovinou σ, pričom úbežnicová rovina v obsahuje bod P = [0,0,0] – stanovište pozorovateľa.. Takáto perspektívna kolineácia zosúladená s vlastnosťami ľudského videnia sa nazýva aj reliefna perspektíva a obraz objektu nachádzajúceho sa pred rovinou σ (čiže v polpriestore neobsahujúcom bod P) sa zobrazí do priestorovej vrstvy určenej rovinami σ a u, a nazýva sa reliefom tohto objektu.

Iste sa môžeme dohodnúť v názore, že relief dosť dobre charakterizuje tvar priestorového objektu (v každom prípade lepšie ako obrazy) a dosť dobre napĺňa tvrdenie predchádzajúcej vety, predsa však nám môže vadiť jeho sploštenie a chceli by sme ho natiahnuť, preškálovať v smere osi z (čo by však bolo, ako uvidíme neskôr zbytočné). Pred touto možnosťou však dáme prednosť návratu k perspektívnej transformácii určenej pôvodnou maticou P bez akýchkoľvek podmienok na jej prvky.

Ako táto projektívna (perspektívna) transformácia súvisí s perspektívnou projekciou (premietaním)? Tu si treba uvedomiť, že prvé dve súradnice $x' = n\dfrac{x}{-z}, y' = n\dfrac{y}{-z}$ obrazu bodu slúžia na vykreslenie obrazu bodu, na jeho umiestnenie v obrazovkových súradniciach. Tretia zložka sa „odkladá“ aby bolo možné neskôr ju použiť pri testovaní hĺbky pre viditeľnosť. Pokiaľ sa zaujímame iba o umiestnenie bodu na obrazovke, je ignorovanie tretej súradnice ekvivalentné jej nahradeniu

číslom 0, čiže nahradeniu: $(n\dfrac{x}{-z}, n\dfrac{y}{-z}, \dfrac{az+b}{-z}) \to (n\dfrac{x}{-z}, n\dfrac{y}{-z}, 0)$, čo nie je nič iné ako známa

ortoprojekcia: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} nx/(-z) \\ ny/(-z) \\ (az+b)/(-z) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nx/(-z) \\ ny/(-z) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Platí teda:

<u>perspektívne premietanie(projekcia) = perspektívna transformácia + ortoprojekcia</u> (+ = súčin)**.**

Platí teda tvrdenie:

Perspektívna transformácia deformuje objekty tak, že keď sa na ne pozeráme ortografickou projekciou vidíme to isté ako keby sme sa na netransformované objekty pozerali perspektívnym premietaním.

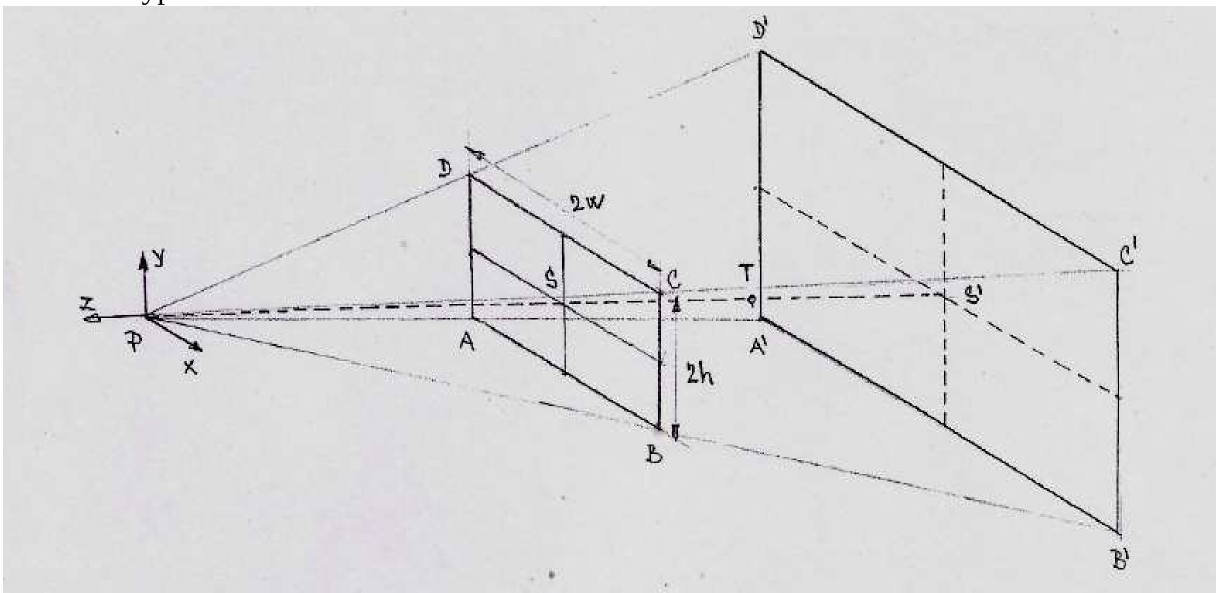
Kanonickým pohľadovým priestorom stredového (perspektívneho) premietania je zrezaný ihlan. Do tohto sa dosť ťažko orezávajú prečnievajúce objekty, preto sa projekčná matica P zvykne nahrádzať maticou:

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} \dfrac{2n}{r-l} & 0 & \dfrac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \dfrac{2n}{t-b} & \dfrac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{f+n}{n-f} & \dfrac{2fn}{n-f} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ resp. } \mathrm{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{n}{w} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{n}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{f+n}{n-f} & \dfrac{2fn}{n-f} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

ktorá je s maticou R totožná, kde *n* – near, *f* – far, *t* – top, *b* – bottom, *r* – right, *l* – left; a *w*, *h* pozri obr.

Táto projekčná matica realizuje okrem perspektívnej transformácie pomocou vhodných posunutí a škálovaní aj transformáciu kamerového pohľadového zrezaného ihlana na kanonickú pohľadovú kocku $(-1 \le x, y, z \le 1)$

Ilustrácia výpočtu:



$$\begin{array}{c} M \\ \begin{bmatrix} n/w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n/h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{n-f} & \frac{2fn}{n-f} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & S \end{array} \\ \begin{bmatrix} -w & w & w & -w & 0 \\ -h & -h & h & h & 0 \\ -n & -n & -n & -n & -n \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A^* & B^* & C^* & D^* & S^* \end{array} \\ \begin{bmatrix} -n & n & n & -n & 0 \\ -n & -n & n & n & 0 \\ -n & -n & -n & -n & -n \\ n & n & n & n & n \end{bmatrix} \end{array} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Obrazy bodov A, B, C, D, S

Výpočet: $A' = PA \cap (z=-f)$: $x=-wt$, $y=-ht$, $z=-nt$;

$\wedge\ z=-f \Rightarrow t=f/n \Rightarrow A'=[-w\frac{f}{n}, -h\frac{f}{n}, -f]$;

podobne: $B', C', D' \Rightarrow S' = \frac{1}{4}(A'+B'+C'+D') = [0,0,-f]$

Potom:

$$M \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A' & B' & C' & D' & S' & T \end{array} \\ \begin{bmatrix} -w\frac{f}{n} & w\frac{f}{n} & w\frac{f}{n} & -w\frac{f}{n} & 0 & 0 \\ -h\frac{f}{n} & -h\frac{f}{n} & h\frac{f}{n} & h\frac{f}{n} & 0 & 0 \\ -f & -f & -f & -f & -f & -\frac{1}{2}(f+n) \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A'^* & B'^* & C'^* & D'^* & S'^* & T^* \end{array} \\ \begin{bmatrix} -f & f & f & -f & 0 & 0 \\ -f & -f & f & f & 0 & 0 \\ f & f & f & f & f & -\frac{f-n}{f+n} \\ f & f & f & f & f & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\frac{f-n}{f+n} \end{bmatrix}$$

Obrazy bodov A', B', C', D', S' a T

Platí: $-1 \leq -\frac{f-n}{f+n} \leq 1$ (zrejmé)

V niektorej literatúre je matica M pre <u>stredové premietanie</u> zapísaná

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} c/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{f+n}{n-f} & \dfrac{2fn}{n-f} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ a k nej inverzná } \mathrm{M}^{-1}=\begin{pmatrix} a/c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dfrac{n-f}{2fn} & \dfrac{n+f}{2fn} \end{pmatrix}$$

Kde $x/y=a \Rightarrow x=ay; \quad -z/y=\cot g\theta/2=c \Rightarrow y=-z/c$

Potom napr. pre bod z prednej orezávacej roviny: $X \in n: z=-n \Rightarrow y=n/c \Rightarrow X = HPR$

$x=ay=an/c \Rightarrow X = HR=(an/c;n/c;-n;1)^T$;

$\Rightarrow \mathrm{M}X = (1,1,-1,1)^T$

Pre <u>rovnobežné premietanie</u> býva matica M opísaná ako:

$$\mathrm{M}=S\left(s_x,s_y,s_z\right)T\left(-t_x,-t_{y,}\,-t_z\right)=\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & -t_x s_x \\ 0 & s_y & 0 & -t_y s_y \\ 0 & 0 & s_z & -t_z s_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ a k nej inverzná}$$

$$\mathrm{M}^{-1}=\begin{pmatrix} 1/s_x & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1/s_y & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1/s_z & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathrm{M}\begin{pmatrix} r \\ b \\ f \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$s_x=2/(r-l), \quad s_y=2/(t-b), \quad s_z=-2/(f-n)$

$t_x=(r+l)/2, \quad t_y=(t+b)/2, \quad t_z=(f+n)/2$

Teda na základe vyššie uvedených vzťahov vieme v prípade oboch premietaní – rovnobežného i stredového:

1. Viditeľný (pohľadový) objem vhodnou transformáciou

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}=\mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

zobraziť do „jednotkovej“ kocky, tj. do kocky, ktorej všetky vrcholy majú všetky súradnice 1 alebo -1, čiže do $\langle -1,1\rangle^3$.

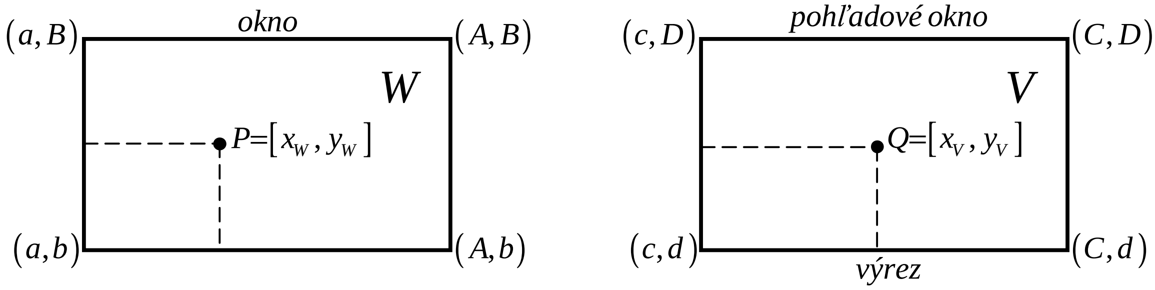
2. Body tohto nového viditeľného objemu vieme opísať v normalizovaných súradniciach.

3. Keďže normalizujúca súradnicová sústava aj u stredového premietania vznikla posúvaním a škálovaním mierok na súradnicových osiach snímacej súradnicovej sústavy postupne parametrami vystupujúcimi ako prvky v matici M, pôvodné stredové premietanie sa “zmenilo“ na kolmé premietanie v smere osi z do priemetne kolmej k osi z (tak isto ako u rovnobežného premietania).

Ako sme už povedali pre realizáciu vlastného premietania pre oba typy úplne stačí „zabudnúť“ na 3.súradnicu, ale rozumnejšie je “ponechať“ ju tam ako reprezentanta hĺbky, ktorú potrebujeme vedieť pri určovaní viditeľnosti (túto môžeme zisťovať aj v normalizovaných súradniciach, lebo normalizujúca transformácia nemá vplyv na usporiadanie objektov podľa hĺbky).

Posledným krokom zobrazovacieho procesu je:

<u>4.Zobrazenie na pohľadové okno (viewport, záber)</u> – ide o zobrazenie okna *W* v priemetni (ak tam nie je vytvorené, môžeme zaň považovať min-max box v priemetni obsahujúci priemety všetkých objektov), ktorého ľavý dolný roh má súradnice [*a*,*b*] a pravý horný roh súradnice [*A*,*B*] na pohľadové okno *V* na obrazovke, ktorého ľavý dolný roh má súradnice [*c*,*d*] a pravý horný – súradnice [*C*,*D*]. Pretože na obrazovke by sme mali vidieť vernú kópiu toho, čo je v priemetni (zväčšeninu prípadne zmenšeninu), je prirodzené požadovať, aby toto zobrazenie <u>zachovávalo pomery</u>.



Ak bod $P \in W$ sa zobrazí do bodu $Q \in V$, tak z požiadavky zachovávania pomerov vyplýva, že

$$\frac{x_V - c}{C - c} = \frac{x_W - a}{A - a} \quad \wedge \quad \frac{y_V - d}{D - d} = \frac{y_W - b}{B - b} \Rightarrow x_V = c + \frac{C - c}{A - a}(x_W - a) \quad \wedge \quad y_V = d + \frac{D - d}{B - b}(y_W - b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{x_V = c + s_x(x_W - a)} \quad \wedge \quad \underline{y_V = d + s_y(y_W - b)} \vee \boxed{x_V = s_x x_W + p} \quad \wedge \quad \boxed{y_V = s_y y_W + q} \quad (*)$$

kde $p = c - s_x a$ a $q = d - s_y b$.

Tieto vzťahy možno pomocou matíc zapísať nasledovne:

$$\begin{pmatrix} x_V \\ y_V \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & p \\ 0 & s_y & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_W \\ y_W \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Ide o kompozíciu škálovania určeného maticou $\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a následného posunutia o vektor $(p, q, 1)^T$.